

PROGRAMA DE ASIGNATURA

1.- **IDENTIFICACIÓN**

1.1	DEPARTAMENTO	MATEMÁTICA Y FÍSICA
1.2	CARRERA	INGENIERÍA CIVIL Y DE EJECUCIÓN
1.3	NOMBRE DE LA ASIG.	ÁLGEBRA I
1.4	CÓDIGO	ALI1011, ALI1021, ALI1031, ALI1051, ALI1161, ALI 1191
1.5	PREREQUISITOS	INGRESO
1.6	Nº HRS. SEMANALES	6-2-0
1.7	SEMESTRE	I

2.- **OBJETIVOS GENERALES**

Lograr un dominio del Álgebra Elemental a nivel de comprensión y aplicación para:
Formular
Resolver
Demostrar
Desarrollar problemas y
Transferir los conocimientos adquiridos a nuevas situaciones problemáticas.

3.- **UNIDADES PROGRAMÁTICAS**

3.1	Introducción a las Estructuras Algebraicas	(4ses.)
3.2	El cuerpo ordenado completo de los Números Reales	(9ses.)
3.3	Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	(3ses.)
3.4	Trigonometría	(5ses.)
3,5	El cuerpo de los Números Complejos	(5ses.)
3.6	El Anillo de los Polinomios.	(5ses.)
3.7.1	Inducción	(2ses.)
3.7.2	Sumatorias y Productorias	(2ses.)
3.7.3	Progresiones	(2ses.)
3.7.4	Teorema del Binomio	(2ses.)

4.- **SISTEMA DE EVALUACIÓN**

4.1	Pruebas globales escritas.
4.2	Examen escrito

5.- **BIBLIOGRAFÍA**

- 5.1 AYRES F. , Álgebra Moderna, Schaum-McGraw-Hill, (1992) .
- 5.2 BRITTON J. R., KRIEGH R. B., RUTLAND L. W., Matemáticas Universitarias Tomo I, C. E. C. S. A., (1972).
- 5.3 FLEMING W., VARBERG D., Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Prentice-Hall Hispanoamericana, (1991).
- 5.4 GOLES E., Álgebra, Dolmen, (1993) .
- 5.5 LEHMANN CH., Álgebra, Limusa-Wiley, (1991).
- 5.6 LEITHOLD L., Matemáticas Previas al Cálculo (Análisis Funcional y Geometría Analítica), Harla, S. A. (1994).
- 5.7 OTEYZA de E., LAM E., HERNÁNDEZ C., CARRILLO A. M., Matemáticas, Prentice Hall, 1998.
- 5.8 ROJO A. O., Álgebra I, El Ateneo, (1989).
- 5.9 STEIN S. K. , BARCELLOS A., Cálculo y Geometría Analítica, McGraw-Hill, (1995).
- 5.10 SWOKOWSKI E. W., COLE J. A., Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, International Thompson Editores, (1999).
- 5.11 TAYLOR H E., WADE T. L., Matemáticas Básicas con Vectores y Matrices, Limusa-Wiley, (1977).
- 5.12 VANCE E. P., Álgebra y Trigonometría Moderna, Addison-Wesley Iberoamericana, (1986).
- 5.13 ZILL D. G., DEWAR J. M., Álgebra y Trigonometría, McGraw-Hill, (1992).

GUÍA N° 01

Esta guía tiene por objetivo que el alumno distinga una **función** de **A** en **B** de una **relación** de **A** en **B**; que dada una función **f** de **A** en **B**, indique el **dominio** de **f**; que determine por qué motivo una relación **f** de **A** en **B** no es función de **A** en **B** (según definición); que construya una función de **f** de **A** en **B** para conjuntos **A** y **B** sencillos.

Definición 1: Sean **A** y **B** conjuntos. Una relación \mathcal{R} de **A** en **B** es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Definición 2: Sea \mathcal{R} una relación de **A** en **B**. Llamaremos dominio de la relación \mathcal{R} al subconjunto de **A**

$$\text{Dom } \mathcal{R} := \{x \in \mathbf{A} / (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

Definición 3: Sea **f** una relación de **A** en **B**. Diremos que **f** es una **función** de **A** en **B** si:

$$(3.1) \quad \text{Dom } \mathbf{f} = \mathbf{A}$$

$$(3.2) \quad (x, y) \in \mathbf{f} \text{ y } (x, z) \in \mathbf{f} \implies y = z.$$

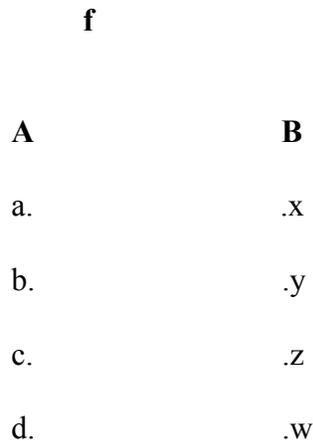
EJERCICIOS:

(1) Sean $\mathbf{A} = \{a, b\}$, $\mathbf{B} = \{c\}$. Escriba **todas** las relaciones de **A** en **B**.

(2) Sean $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$, $\mathbf{B} = \{c\}$. Escriba **todas** las relaciones de **A** en **B**.

(3) Escriba el dominio de las relaciones en (1) y (2).

- (4) Separe las relaciones de **A** en **B** de (1) y (2) en las que **son funciones** de **A** en **B** y las que **no lo son**. Justifique.
- (5) Dados $A = \{m, n, p\}$, $B = \{r, s\}$, construya una función **f** de **A** en **B**.
- (6) Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{m, n, p\}$ y $f = \{(1, m), (2, n), (3, p), (4, m)\}$. Decida si **f** es función de **A** en **B**. Fundamente.
- (7) Sea el diagrama de flechas correspondiente:



- 7.1) Determine $\text{Dom}f$.
- 7.2) Escriba **f** como conjunto de pares ordenados.
- 7.3) Indique el $\text{Rec}f$.
- 7.4) Decida si $f: A \longrightarrow B$, es epiyectiva y si es inyectiva. Fundamente.
- 7.5) Dibuje el diagrama cartesiano.

(8) Sean $A = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y f una relación de A en A definida por:

$$f(p) := \begin{cases} 4, & \text{si } p \text{ es par} \\ 6, & \text{si } p = 0 \\ 3, & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases}$$

Decida, justificadamente, si f es función.

(9) Dado el diagrama:

g

K	T
4	35
8	16
3	169
10	64
1 3	9
33	1 00

Determine:

- a) Si g es función de K en T .
- b) Si su respuesta es afirmativa, determine la ley de correspondencia.
- (10) Sean $A = \{\triangle, \square, \circ, \dots\}$ y $B = \left\{ \frac{1}{2}b \cdot h, \pi a^2, a^2, a \cdot b \right\}$
- Encuentre una función H de A en B que esté relacionada con el concepto de área y establezca la ley de correspondencia.

(11) Se define $F: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $F(n) := n + 3$. Demuestre que F es una función biyectiva.

(12) Sean $A = \{x, y, z, u\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $f = \{(x, 3), (z, 1), (u, 9), (y, 5)\}$
Determine:

a) $f(\{x, z\})$

b) $f(\{x, y, z\})$

c) $f(\{u\})$

d) $f^{-1}(\{5\})$

e) $f^{-1}(\{3, 5\})$

f) $f^{-1}(\{1, 3, 5, 9\})$.

(13) Sean $A = \{x, y, z, t\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $g = \{(x, 1), (y, 1), (z, 5), (x, 3), (t, 3)\}$

Decida si g es función de A en B . **Fundamente.**

(14) Dados $A = \{s, t, p\}$, $B = \{x, y\}$ y $f = \{(s, x), (t, x), (p, y)\}$

(a) Decida si f es función de A en B . **Fundamente.**

(b) Indique si es Verdadero (V) o Falso (F) .

(b.1) $(x, y) \in f$

(b.2) $y \in A$

(b.3) $t \in f$

(b.4) $(p, y) \in f$

(b.5) $(y, t) \in A$

(b.6) $(s, x) \in f$

(b.7) $y \in A \times B$

(b.8) $(s, y) \in A \times B$.



GUÍA N° 1

Unidad Programática: **ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.**

Objetivos: El alumno deberá ser capaz de

- Conocer e identificar los conceptos de operación binaria interna y de estructura algebraica.
- Identificar las propiedades de una operación binaria interna en un conjunto dado.
- Verificar las propiedades de una operación binaria interna.
- Identificar las siguientes estructuras
 - a) grupo
 - b) grupo abeliano
 - c) anillo
 - d) cuerpo
- Demostrar que una estructura dada es un grupo, grupo abeliano, anillo o cuerpo.
- Describir y utilizar las propiedades inherentes a una estructura algebraica (grupo, anillo, cuerpo).
- Establecer y demostrar algunas consecuencias que se deducen de las estructuras algebraicas.
- Identificar, establecer y demostrar algunas propiedades de las estructuras :

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$$

$$(\mathbb{R}, +, \cdot)$$

[1] En \mathbb{Z}^+ se define la operación binaria interna \star por : $a \star b := a^b$.

1.1 Determine si la operación \star es conmutativa.

1.2 ¿La operación \star es asociativa?

1.3 En caso que exista, calcule el elemento neutro para la operación \star .

[2] Sea $\mathbf{B} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a = b\}$ y se definen en \mathbf{B} las leyes de composición internas \circ y Δ como:

$$(a, a) \circ (b, b) := (a + b, a + b)$$

$$(a, a) \Delta (b, b) := (ab, ab)$$

Sabiendo que : (\mathbf{B}, \circ) es un grupo abeliano, Δ es asociativa y conmutativa. Demuestre que : $(\mathbf{B}, \circ, \Delta)$ es un cuerpo.

[3] Sea $\mathbf{S} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y se define en \mathbf{S} la ley de composición interna $\#$ como:

$$\begin{aligned} \# : \mathbf{S} \times \mathbf{S} &\longrightarrow \mathbf{S} \\ ((a, b), (c, d)) &\longmapsto (a, b) \# (c, d) := (a + b, cd) \end{aligned}$$

¿Existe elemento inverso en el conjunto \mathbf{S} , para la operación $\#$?. **Justifique.**

[4] Sea el conjunto $\mathbf{T} = \{x \in \mathbb{R} / x = a + b\sqrt{3} ; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Considere las operaciones $+$ y \cdot usuales en \mathbb{R} . ¿Es $(\mathbf{T}, +, \cdot)$ un anillo?. **Justifique.**

- [5] Sean $K = \{a, b, c, d\}$ y las operaciones binarias internas \diamond y \star definidas mediante las siguientes tablas:

\diamond	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

\star	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

Las operaciones \diamond y \star son asociativas y además la **segunda distribuye a la primera**.

5.1 Determine si (K, \diamond, \star) es un cuerpo. **Justifique** su respuesta.

5.2 Resuelva en (K, \diamond, \star) las ecuaciones:

a) $c \diamond x = b$

b) $(x \diamond d) \star c = b$.

- [6] Dado el conjunto $M = \{1, -1, i, -i\}$ y como ley de composición interna, la multiplicación usual con $i^2 = -1$.

6.1 Construya la tabla de doble entrada.

6.2 Demuestre que (M, \cdot) es grupo abeliano. (Suponga que \cdot es asociativa)

6.3 Resuelva en (M, \cdot) la ecuación $x^3 = -1$.

- [7] Dadas las operaciones definidas mediante las tablas siguientes:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

\cdot	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Determine **todas** las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 \cdot x + y = 0 \\ x + (-2) \cdot y = 1 \end{cases}$$

[8] En $A = \{a, b, c\}$ se define la ley de composición interna \circ por:

\circ	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

- 8.1 Determine el elemento inverso de $(a \circ c^{-1})$. Justifique.
- 8.2 Suponga que \circ es asociativo en A . Resuelva en (A, \circ) justificando cada uno de sus pasos la siguiente ecuación:
- $$(b \circ x) \circ c = c \circ a$$
- 8.3 Fundamente las razones por las cuales la ecuación anterior admite una solución única en A .

[9] En \mathbb{Z} se definen las operaciones $*$ y \cdot , por:

$$a * b := a + b - 1 \quad \text{y} \quad a \cdot b := a + b - ab.$$

Suponiendo que $(\mathbb{Z}, *)$ es grupo abeliano. Demuestre que $(\mathbb{Z}, *, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

[10] Sea $S = \{a, b\}$ con las leyes adición y multiplicación definida por:

+	a	b
a	a	b
b	b	a

\cdot	a	b
a	a	a
b	a	b

Verifique si $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

[11] Dado el conjunto $\mathbf{D} = \{0, 1, 2\}$ y las leyes de composición interna definidas por:

\$	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

#	0	1	2
0	1	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

Determine si el conjunto \mathbf{D} posee neutro para cada ley dada y además encuentre el simétrico de cada elemento (en caso que exista).

[12] Sean $\mathbf{J} = \{(u, v) / u \in \mathbb{R} \wedge v \in \mathbb{R}\}$ y la operación binaria interna en \mathbf{J} dada por:

$$(x, y) \# (r, t) := (r^2 + xy, 0)$$

Averigue si $\#$ es asociativa en \mathbf{J} . **Fundamente.**

[13] Sea $\mathbf{G} =] -1, 1 [= \{u \in \mathbb{R} / -1 < u < 1\}$. Se define Δ la operación binaria interna en \mathbf{G} por:

$$a \Delta b := \frac{a+b}{1+ab}$$

13.1 Para cada $u \in \mathbf{G}$, determine su inverso con respecto a la operación Δ .

13.2 Calcule $\left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \frac{(-1)}{5} \right\}^{-1}$

[14] Sea $\mathbf{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$ y se define la ley de composición interna $*$ como:

$$(a, b) * (c, d) := (ac, bc + d)$$

14.1 ¿Es verdad que: para todo $(a, b); (c, d)$ perteneciente a \mathbf{G} se cumple que:

$$[(a, b) * (c, d)]^{-1} = (a, b)^{-1} * (c, d)^{-1} ? \quad \text{Fundamente su respuesta.}$$

14.2 Calcule $[(1, 10) * (2, 7)]^{-1}$.

[15] Sean $F = \{ f : A \longrightarrow \mathbb{Z} \}$, Δ una operación binaria interna en F , tales que

$$\begin{aligned} \Delta : F \times F &\longrightarrow F & \text{donde } (f \Delta g)(a) &:= f(a) + g(a), \quad \forall a \in A. \\ (f, g) &\longmapsto f \Delta g \end{aligned}$$

Demuestre que (F, Δ) es un grupo abeliano.

[16] En $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se definen las leyes de composición internas $+$ y \cdot como:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac, 0).$$

Suponiendo que $(A, +)$ es un grupo abeliano. Averigüe si $(A, +, \cdot)$ posee estructura de cuerpo. **Justifique.**

[17] Para $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$ se definen las leyes de composición interna: $*$ y $\$$

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

$$((a, b), (c, d)) \longmapsto (a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

$$\$: G \times G \longrightarrow G$$

$$((a, b), (c, d)) \longmapsto (a, b)\$(c, d) := (a + c, b + d)$$

Considere que $(G, *)$ es grupo abeliano y averigüe si $(G, *, \$)$ es un anillo.

[18] Sea $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$ y se define la ley de composición interna

$$\diamond : P \times P \longrightarrow P$$

$$((x, y), (z, w)) \longmapsto (x, y) \diamond (z, w) := (x + z, y + w)$$

¿Existe elemento inverso en el conjunto P para la ley \diamond ? **Justifique.**

[19] Sea $E = \{0, 1, 2, 3\}$ y se definen las leyes de composición internas Δ y \circ mediante las tablas de doble entrada.

Δ	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

\circ	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Sabiendo que (E, Δ) es grupo abeliano y que \circ es asociativa. Encuentre, si existe(n), la(s) solución(es) de cada una de las ecuaciones siguientes :

19.1 $x \circ (3 \Delta 3) \circ (1 \Delta 2) = 0$

19.2 $(3 \Delta 0) \circ (1 \Delta 1) \circ x = 1$

[20] Sea $L = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Se define la ley de composición interna \circ como :

$$\begin{cases} a_i \circ a_j := a_{i+j} & , \text{ si } i+j < 5 \\ a_i \circ a_j := a_{i+j-5} & , \text{ si } i+j \geq 5 \end{cases}$$

20.1 Construya la tabla de doble entrada para la ley \circ .

20.2 Averigue si (L, \circ) posee estructura de grupo abeliano. Asuma la asociatividad de la ley \circ .



GUÍA N° 2

Unidad Programática: *NÚMEROS REALES.*

Objetivos: El alumno deberá ser capaz de:

- Demostrar propiedades de los números reales que involucran los axiomas de cuerpo y/o axiomas de orden.
- Resolver una inecuación lineal, expresando su solución como intervalo o como unión y/o intersección de intervalos.
- Resolver analíticamente una inecuación cuadrática, expresando su solución como intervalo o como unión de intervalos.
- Resolver ecuaciones con una variable que involucren la función valor absoluto.
- Aplicar las propiedades de la función valor absoluto para obtener expresiones equivalentes como desigualdades.
- Demostrar desigualdades que involucren tanto la aplicación de las propiedades de ellas, como el uso de las técnicas de demostración utilizadas en la obtención de dichas propiedades.
- Aplicar correctamente las propiedades de las desigualdades para resolver una (in)ecuación dependiente de uno o más parámetro(s), estableciendo las restricciones y/o análisis pertinentes.
- Decidir, justificadamente, si un conjunto es acotado y determinar sus elementos notables, cuando existan.

NÚMEROS REALES 2.1

[1] Utilizando las propiedades algebraicas de \mathbb{R} , demuestre que:

a) $a \cdot 0 = 0; \quad \forall a \in \mathbb{R}$

b) $-(1 \cdot a) = (-1) \cdot a; \quad \forall a \in \mathbb{R}$

c) $a(-b) = (-a)b = -ab; \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

d) $-(-a) = a; \quad \forall a \in \mathbb{R}$

e) $ab = (-a)(-b); \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

f) $(a^{-1})^{-1} = a; \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

g) $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}; \quad \forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$

h) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}; \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0$

i) $-0 = 0$

j) $-a - b = -(a + b); \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

k) $a - (b - c) = (a - b) + c; \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

l) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd; \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

m) $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0); \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

n) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b); \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

[2] Resuelva en \mathbb{R} , fundamentando cada paso, las siguientes ecuaciones:

a) $ax + b = c$

b) $5x + 8 + 3x - 2 = 2x$

c) $3(x + 2) = 5x$

d) $7(2 - 4x) = 5(x - 9)$

e) $(x - 1) \cdot (x + 2) = 0.$

[3] Determine, justificadamente, el resultado de:

$$(M_1 + N_1 + P_1) \cdot (M_2 + N_2 + P_2)$$

donde M_1, N_1, P_1, M_2, N_2 y P_2 son números reales.



NÚMEROS REALES 2.2

1) Use las propiedades algebraicas y de orden en \mathbb{R} para demostrar que:

$$1.1) \quad (0 \leq a < b) \text{ y } (0 \leq c < d) \Rightarrow ac < bd$$

$$1.2) \quad 0 \leq a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

$$1.3) \quad a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$$1.4) \quad a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$1.5) \quad ab \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$$

$$1.6) \quad a > 1 \Rightarrow a^2 > a$$

$$1.7) \quad 0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a + b)$$

$$1.8) \quad (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$1.9) \quad p + \frac{1}{p} \geq 2 \text{ para todo } p \text{ en } \mathbb{R}$$

$$1.10) \quad \text{Si } p, q \in \mathbb{R} \text{ y } p < q \text{ entonces } p < \frac{1}{2}(p + q) < q$$

$$1.11) \quad 0 < p < 1 \Rightarrow p^2 < p$$

$$1.12) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \text{ para todos números reales } a, b \text{ y } c$$

$$1.13) \quad 2(p^3 + q^3 + r^3) > qr(q + r) + pr(p + r) + pq(p + q) \text{ para todos } p, q, r \text{ en } \mathbb{R}^+$$

$$\text{Ayuda: } x^3 + y^3 > x^2y + y^2x$$

$$1.14) \quad 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}.$$

2) Demuestre que para todos $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$ se tiene que:

<p>a) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$</p> <p>c) $a + b > 2\sqrt{ab}$</p> <p>e) $\frac{1}{2}(a + b) > \frac{2ab}{(a+b)}$</p>	<p>b) $a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$</p> <p>d) $a^2 + b^2 > 2ab$</p>
---	---

3) Sean $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, tales que: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Demuestre que: $ax + by + cz \leq 1$.

4) Si $a, b \geq 0$, demuestre que:

$$\sqrt{(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Entregue un ejemplo numérico donde se cumpla la desigualdad en forma estricta.

5) Sean a, b, c, d números reales positivos tales: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Pruebe que:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Deduzca que $\frac{1}{2} < \frac{7}{11} < \frac{4}{5}$.

6) Si a, b, c son números reales positivos no **todos iguales** demuestre que:

$$(a + b + c)(bc + ca + ab) > 9abc.$$

7) Pruebe que

$$x^3 + \frac{1}{x^3} \geq x^2 + \frac{1}{x^2}$$

para todo $x > 0$. ¿Cuándo es válida la igualdad?



3) Resuelva las siguientes ecuaciones e inecuaciones lineales de una variable que involucren a la función valor absoluto.

3.1) a) $|x + 3| = 4 - x$ b) $|x + 2| + |x - 2| = 3$

c) $|3x + 2| = 5 - x.$

3.2) a) $|x - 5| - |x - 1| \geq 8$ b) $5 \leq |6x + 5| < 12$

c) $|4x + 3| + |12x - 1| \leq 6$ d) $\left| \frac{x}{3} \right| < 1$

e) $\left| \frac{(3x+1)}{(x+2)} \right| < 2$ f) $\left| \frac{(4x+1)}{(x+3)} \right| > 3$

3.3) a) $\frac{|x-1|-|2x+3|}{3x-4}$ b) $\frac{x-1}{x+1} - 2 < 2x + 1$

c) $\frac{|x|-4}{|x|+4} < \frac{|x|-5}{|x|+5}$ d) $||x| - 3| > ||x| - 5|.$

4) Aplique las propiedades de la función valor absoluto para demostrar que las proposiciones dadas son equivalentes.

4.1) $x \in] - 4, 1[$ 4.2) $x \in] - \infty, \frac{1}{5} [\cup] \frac{3}{5}, \infty [$

$x \in \{x \in \mathbb{R} / |2x + 3| < 5\}$ $x \in \{x \in \mathbb{R} / |5x - 2| > 1\}.$

5) 5.1) Determine el conjunto de valores de **m** para que la ecuación $mx^2 - (m + 1)x + m = 0$ tenga raíces reales.

5.2) Aplique correctamente las propiedades de las desigualdades para resolver la inecuación lineal dependiente del parámetro **a**.

a) $ax + 3 < 1$ b) $|ax + 2| < 3.$

5.3) Determine los valores de **k** para los cuales las raíces de la ecuación cuadrática dada sean complejas.

a) $x^2 + kx - k = 0$ b) $(k + 1)x^2 - 2kx + 1 = 0.$

- 5.4) Calcule los valores de k para los cuales se verifica que $x^2 + (2k + 1)x + k(k + 3) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- 5.5) Determine los posibles valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que la ecuación $k|x^2 + kx + 1 = 0$ admita dos soluciones reales y diferentes.
- 6) Resuelva las siguientes inecuaciones:

6.1) $\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{-x^2+x-2} \leq 0$

6.2) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}} \geq x$

6.3) $\frac{(x-2)^4(x^2-3)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} > 0$

6.4) $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$

6.5) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$

6.6) $8x - 3 > \sqrt{(x-6)(x-9)}$

6.7) $6x + 3 < \sqrt{-x^2 - x + 6}$

6.8) $2x - \sqrt{x-1} < 0$

6.9) $\sqrt{x^2 + x + 1} > (x - 2)$.

- 7) Determine cuáles de los conjuntos siguientes son acotados inferiormente, superiormente, cuáles son acotados y cuando corresponda, obtenga máximos, mínimos, supremos, ínfimos.

7.1) $] -\infty, -\frac{3}{4}]$

7.2) $[5, \infty[$

7.3) $\{x \in \mathbb{Z} / -1 < x < 1\}$

7.4) $\left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

7.5) $\left\{x \in \mathbb{R} / x = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

7.6) $\left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{(2n+3)}{(\sqrt{5}n-2)}, n \in \mathbb{N}\right\}$

8) Determine supremo e ínfimo (si existen) de los siguientes conjuntos \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ para:

8.1) $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} / |x| > |1 - x|\}$, $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 < 0\}$

8.2) $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2n + 1\}$, $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7n\}$

9.- Sean $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} / |3x + 7| \leq -4x\}$, $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} / |x| - |x - 1| \geq 1\}$

9.1) Determine (si existe) $\sup \mathbf{A}$

9.2) Explícite el conjunto de cotas superiores de \mathbf{B} .

10) Sean los conjuntos \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} dados respectivamente por: $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$, $\mathbf{B} =]7, 10[$, $\mathbf{C} = \{15\}$, $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$.

10.1) Determine si existen o no, y en caso de existir, indique cuáles son: $\max \mathbf{D}$, $\min \mathbf{D}$, $\inf \mathbf{D}$, $\sup \mathbf{D}$.

10.2) ¿ \mathbf{D} es acotado? **Justifique.**

11) Sean \mathbf{A} , \mathbf{B} subconjuntos de \mathbb{R} y sea $c > 0$. Se definen los conjuntos $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $c\mathbf{A}$ como sigue:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := \{a + b / a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\} \quad \text{y} \quad c\mathbf{A} := \{ca / a \in \mathbf{A}\}$$

Supongamos que \mathbf{A} y \mathbf{B} están acotados superiormente. Demuestre que:

$$\sup(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} + \sup \mathbf{B} \quad \text{y} \quad \text{que} \quad \sup(c\mathbf{A}) = c(\sup \mathbf{A}).$$

¿Qué sucede con $\sup(c\mathbf{A})$ si $c < 0$?



GUÍA N° 3

UNIDAD PROGRAMÁTICA: ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

Objetivos: El alumno deberá ser capaz de

- Simplificar expresiones exponenciales y/o logarítmicas.
- Aplicar correctamente las funciones exponenciales y/o logarítmicas en la resolución de problemas que las involucren.
- Resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas, analizando el conjunto de soluciones posibles.

[1] Escriba el equivalente exponencial de los siguientes enunciados:

A) $\log_2 16 = 4$

B) $\log_3 81 = 4$

C) $\log 10 = 1$

D) $\log 0.1 = -1$

E) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

F) $\log_a x = b$

G) $\log_b a = -c$

H) $\ln 1 = 0.$

[2] Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que:

- | | |
|---|--|
| <p>A) $\log_x 8 = 3$</p> <p>C) $\log(ax) = \log(ab^2)$</p> <p>E) $3^x = \frac{1}{27}$</p> <p>G) $x^{3/2} = 125$</p> | <p>B) $\log_x 0.01 = -2$</p> <p>D) $\log_{(x+5)} 3 = 2$</p> <p>F) $5^x = 3$</p> <p>H) $\sqrt[3]{x} = 8.$</p> |
|---|--|

[3] Aplique las propiedades de los logaritmos para escribir el desarrollo de las expresiones :

- | | |
|--|--|
| <p>A) $\log\left(\frac{a}{bc}\right)$</p> <p>C) $\log(a^2 - b^2)$</p> <p>E) $\log\left(\frac{ab}{c}\right)^2$</p> <p>G) $\log\left(\frac{2a\sqrt{3}}{5b^2x^3}\right)$</p> <p>I) $\log(a^3 + b^3).$</p> | <p>B) $\log\left(\frac{\sqrt{ab}}{c}\right)$</p> <p>D) $\log(4^{x+1})$</p> <p>F) $\log\sqrt{\frac{a^4}{bc^3}}$</p> <p>H) $\log\left(\frac{a^2b^2}{(a^2+b)}\right)$</p> |
|--|--|

[4] Determine la expresión que corresponda al desarrollo de:

- | | |
|--|--|
| <p>A) $\log a + 2\log b$</p> <p>C) $x\log 2 + (x - 5)\log 3 - \log 2$</p> <p>E) $\log(x + 3) + \log(2x) - \log(x + 5)$</p> <p>G) $-2\log_a x + 3\log_a(2x) + \log_a(x - 2)$</p> <p>I) $1 + \log_3 a + \frac{1}{2}\log_3 a^3 - 4\log_3 a^6 .$</p> | <p>B) $\log(a + b) - \log(a - b)$</p> <p>D) $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log(x + 3)$</p> <p>F) $n\log a + a\log n$</p> <p>H) $2\log x - 3\log y + z$</p> |
|--|--|

[5] Calcule el resultado de las siguientes expresiones :

- A) $\log_3 27 + \log_2 8 + \log_5 1$
- B) $\log_{2/3} \left(\frac{32}{243} \right) + \log_{2/3} \left(\frac{243}{32} \right)$
- C) $\left(\log \sqrt[4]{10} \right) (\log_{1/4} 16) (\log_{32} 8)$
- D) $\log_{3/5} \left(\frac{625}{81} \right) \log_{2/3} \left(\frac{32}{243} \right)$
- E) $\log_{m+n} (m^2 + n^2 + 2mn) \log_{m-n} (m^2 + n^2 - 2mn) .$

[6] Resuelva las siguientes ecuaciones:

- | | |
|--|----------------------------------|
| A) $2^x = 64$ | B) $2^{2x-1} = 1$ |
| C) $5^{x+1} = 2$ | D) $3^{x+2} = 2^{x+3}$ |
| E) $21^{x-3} = 3^{2x}$ | F) $a^{x-3} = 1$ |
| G) $2b^{3x} = 3$ | H) $a^{-x} = 104$ |
| I) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ | J) $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 = 0$ |
| K) $5^{2x+2} + 1 = (10 + 5^x)5^x$ | L) $\log x^5 + \log^2 x + 6 = 0$ |
| M) $(\log_2 x)(\log_2 x + 1) = 2$ | |
| N) $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$ | |
| O) $\log(x + 1) + \log(2x + 1) = \log(x + 2) + \log(5x - 7)$ | |
| P) $\frac{1}{(4-\log x)} + \frac{1}{(3+\log x)} = 1$ | |

[7] Resuelva los siguientes sistemas:

A)
$$\begin{cases} 2\log x - \log y = 3 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} \log_2(x^3y) = 6 \\ (2\log_2x)(\log_2y) = 6 \end{cases}$$

C)
$$\begin{cases} \log_x(ay) = p \\ \log_y(bx) = q \end{cases}$$

D)
$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 5x^2 - 3y^2 = 11.300 \end{cases}$$

E)
$$\begin{cases} \log^2x + \log^2y = \frac{5}{2}\log^2a \\ xy = a^2 \end{cases}$$

F)
$$\begin{cases} 2^{2x} - 2^{2y} = -240 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^y = -20 \end{cases}$$

G)
$$\begin{cases} 3^x - 3^y = 6 \\ 3^{x+y+2} = 18 \end{cases}$$

H)
$$\begin{cases} 3b^x - b^y = 2b^2 \\ b^{x+y} = b^4 \end{cases}$$

I)
$$\begin{cases} 3^{2x} + \log y = 109 \\ 3^x \sqrt{\log y} = 30 \end{cases}$$

J)
$$\begin{cases} 3^{1-x-y} = 4^{-y} \\ 2^{2x-1} = 3^{3y-x} \end{cases}$$

[8] Explícite el **conjunto solución** del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \log_x 100 - \log_y 10 = 0 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} .$$



GUÍA N° 4

Unidad Programática: *TRIGONOMETRÍA.*

Objetivos: El alumno deberá ser capaz de:

- Evaluar expresiones trigonométricas que involucren los ángulos $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$ ó sus múltiplos, sin usar calculadora.
- Dado el valor de una función trigonométrica, determinar los valores de las demás funciones.
- Simplificar expresiones trigonométricas.
- Aplicar correctamente las funciones trigonométricas en la resolución de problemas que las involucren.
- Aplicar las identidades trigonométricas fundamentales en la demostración de otras identidades.
- Resolver ecuaciones trigonométricas analizando el conjunto de soluciones posibles.

NOTA : Las identidades y ecuaciones trigonométricas involucran los siguientes contenidos :

- Ángulos simples.
- Suma y diferencia de ángulos.
- Múltiplos de ángulos.
- Transformación de sumas en productos y viceversa.

(1) Evalúe las expresiones

- | | |
|---|--|
| <p>a) $\text{sen}(27\pi/4)$</p> <p>c) $\text{tg}(23\pi/6)$</p> <p>e) $\text{sec}(-131\pi/3)$</p> | <p>b) $\text{sen}(-19\pi/3)$</p> <p>d) $\text{cotg}(-35\pi/4)$</p> <p>f) $\text{cosec}(-58\pi/3)$</p> |
|---|--|

(2) Indique el signo de cada expresión (no use calculadora)

- | | |
|---|--|
| <p>a) $\text{sen} 2$</p> <p>c) $\text{sen}(-11\pi/6)$</p> | <p>b) $\text{tg} 4$</p> <p>d) $\text{tg}(-5\pi/4)$</p> |
|---|--|

(3) Determine los valores de $\text{sen}\alpha$, $\text{cos}\alpha$ y $\text{tg}\alpha$ bajo las condiciones siguientes:

- | | | |
|---|--|---|
| <p>a) $\text{sen}\alpha = \frac{5}{13}$</p> <p>b) $\text{cos}\alpha = -\frac{4}{5}$</p> <p>c) $\text{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$</p> | <p>tal que</p> <p>tal que</p> <p>tal que</p> | <p>$0 < \alpha < \pi/2$</p> <p>$0 < \alpha < 3\pi/2$</p> <p>$\pi/2 < \alpha < \pi$</p> |
|---|--|---|

(4) Determine el valor de las otras funciones trigonométricas de α si:

- | | |
|---|---|
| <p>a) $\text{sen}\alpha = \frac{2}{3}$</p> <p>c) $\text{sec}\alpha = \frac{7}{5}$</p> <p>e) $\text{sec}\alpha = \sqrt{2}$ y α pertenece al segundo cuadrante.</p> <p>f) $\text{cotg}\alpha = -\frac{3}{4}$ y α pertenece al cuarto cuadrante.</p> | <p>b) $\text{cos}\alpha = -\frac{3}{5}$</p> <p>d) $\text{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ y $\text{cos}\alpha < 0$</p> |
|---|---|

(5) Evalúe $X = \frac{\cos(2\alpha) - \text{sen}^2(\alpha + \frac{7\pi}{3})}{\text{tg}(\alpha - \frac{3\pi}{2})}$ si $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\text{cos}\alpha > 0$.

(6) Verifique las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{cos}^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$ b) $\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$

c) $4\operatorname{sen}^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 3\operatorname{sec}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 2\operatorname{cotg}^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

e) $\frac{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sec}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{cos}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}$

(7) Exprese en forma más simple

a) $\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cotg}\alpha} + \frac{\operatorname{cos}\alpha}{\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

b) $\frac{\operatorname{cos}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sec}(-\alpha) \operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{sec}(2\pi+\alpha) \operatorname{sen}(\pi+\alpha) \operatorname{cotg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$

(8) Demuestre o refute

a) $\operatorname{sen}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{cos}(\pi - \beta) \operatorname{cotg}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{3\pi}{2}\right) \operatorname{tg}(-\beta)$

b) $\frac{\operatorname{sen}(\pi - \beta)}{\operatorname{tg}(\pi + \beta)} \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{\operatorname{cos}(2\pi - \beta)}{\operatorname{sen}\beta} = \operatorname{sen}\beta$

c) $\operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sec}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha) - \operatorname{cos}\alpha(\operatorname{sec}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha) = \operatorname{sec}\alpha \operatorname{cosec}\alpha$

d) $\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{cos}^2\alpha = \operatorname{cotg}^2\alpha \operatorname{cos}^2\alpha$

e) $\frac{\operatorname{cos}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{cotg}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cos}\alpha$

(9) Demuestre que

a) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sec \alpha$

b) $\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} \beta}{1+\operatorname{sen} \beta}} = \sec \beta - \operatorname{tg} \beta$

c) $\operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)$

d) $\frac{\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg} \gamma}{1-\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{tg} \beta$

(10) Transforme los siguientes productos en sumas.

a) $\operatorname{sen}(3\alpha) \cos(5\alpha)$

b) $\cos \alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(11) Transforme las siguientes sumas en productos.

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\beta}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\beta}{6}\right)$

b) $\cos(6\beta) + \cos(7\beta)$

(12) Demuestre que

a) $\frac{\operatorname{sen}(7\alpha)-\operatorname{sen}(5\alpha)}{\cos(7\alpha)+\cos(5\alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$

b) $1 + \operatorname{tg}(2\alpha) \operatorname{tg} \alpha = \sec(2\alpha)$

c) $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(x - y)\right)$

d) $\frac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)-\cos(5x)} = \operatorname{cotg}(7x/2)$

e) $\frac{\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen} x}{\cos(2x)+\cos(5x)+\cos x} = \operatorname{tg}(2x)$

$$f) \quad \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}x}{\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x} = 2\operatorname{sen}^2x - 1$$

$$g) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) = \frac{2\operatorname{sen}x}{\operatorname{cos}x + \operatorname{cos}y}$$

$$h) \quad \operatorname{sen}x \operatorname{sen}(x+2y) - \operatorname{sen}y \operatorname{sen}(y+2x) = \operatorname{sen}(x-y)\operatorname{sen}(x+y)$$

$$i) \quad \frac{1 + \operatorname{sen}(2\alpha)}{1 - \operatorname{sen}(2\alpha)} = \left[\frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1} \right]^2$$

$$j) \quad \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{sec}\alpha} + \frac{\operatorname{sec}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{cos}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$$

(13) Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas, obteniendo su conjunto solución en $[0, 2\pi[$

- | | | |
|----|--|---|
| a) | $4\operatorname{sen}^2x + 8\operatorname{sen}x + 3 = 0$ | $S = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ |
| b) | $4\operatorname{sen}x\operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x = 0$ | $S = \{0, 1.23, 5.05\}$ |
| c) | $\operatorname{sen}^2x = \frac{1}{4}$ | $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ |
| d) | $2\operatorname{sen}^2x + 3\operatorname{cos}x = 0$ | $S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$ |
| e) | $\operatorname{cosec}x = 1 + \operatorname{cotg}^2x$ | $S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ |
| f) | $4\operatorname{cos}^2x\operatorname{cosec}x + 8\operatorname{cos}^2x - 3\operatorname{cosec}x = 6$ | $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ |
| g) | $\operatorname{tg}^2x - (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg}x + \sqrt{3} = 0$ | $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3} \right\}$ |
| h) | $\operatorname{sec}x - \operatorname{tg}x - \operatorname{cosec}x + \operatorname{cotg}x = 0$ | $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$ |
| i) | $2\operatorname{tg}x + 2\operatorname{sen}x - 2\operatorname{tg}^2x \operatorname{sen}x = 0$ | $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{6} \right\}$ |
| j) | $3\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$ | $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$ |
| k) | $\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{cos}x = 0$ | $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$ |
| l) | $\operatorname{sen}x = -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ | $S = \left\{ 0, \frac{4\pi}{3} \right\}$ |
| m) | $\left(\operatorname{sen}(2x) + \sqrt{3}\operatorname{cos}(2x)\right)^2 - 5 = \operatorname{cos}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ | $S = \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}$ |
| n) | $\operatorname{sen}x \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}(3x) = \frac{4}{5}$ | $S = \emptyset$ |
| o) | $\operatorname{sen}^3x + \operatorname{cos}^3x = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$ | $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}$ |

(14) Sea **ABC** un triángulo rectángulo de catetos **a** y **b**, hipotenusa **c** y altura correspondiente a la hipotenusa **h**. Resuelva el triángulo rectángulo, en cada caso, con los siguientes datos:

a) $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ $a = 0.1[\text{m}]$ b) $\beta = \frac{7\pi}{36}$ $h = 0.15[\text{m}]$

c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ $a - b = 0.1[\text{m}]$

(15) Sea **ABC** un triángulo cualquiera de lados **a**, **b**, **c**. Resuelva, en cada caso, con la información dada:

a) $a = b$ $h_c = 8[\text{m}]$ $c = 12[\text{m}]$

b) $\alpha = \frac{\pi}{12}$ $\beta = \frac{7\pi}{36}$ $c = 0.4[\text{m}]$

c) $a = 15[\text{m}]$ $b = 18[\text{m}]$ $\alpha = 2\beta$

d) $a = 5[\text{m}]$ $b = 4[\text{m}]$ $\cos \gamma = \frac{3}{8}$

e) $a = 4[\text{m}]$ $b = \sqrt{10} [\text{m}]$ $c = \sqrt{2} [\text{m}]$

(16) a) Demuestre que el área de un triángulo **ABC** se puede obtener como:
 $\text{Área} = \frac{1}{2}ab\text{sen}\gamma = \frac{1}{2}bc\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}ac\text{sen}\beta$.

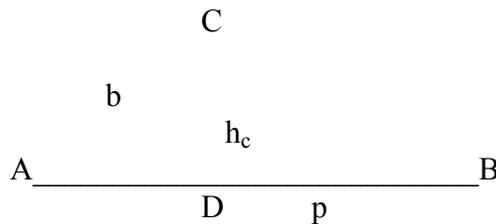
b) Determine el área de un triángulo **ABC** dados $\overline{AC} = 7.41$, $\overline{AB} = 86.9$ y el ángulo $\text{BAC} = 1.20[\text{rad}]$.

(17) Un asta de bandera está colocada verticalmente en lo alto de un edificio; a 12 [m] de distancia, los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio son de $\frac{\pi}{3}[\text{rad}]$ y $\frac{\pi}{6}[\text{rad}]$ respectivamente. Determine la longitud del asta.

(R: $\approx 13.86 [\text{m}]$)

- (18) Un observador cuyos ojos están a 45 [m] por encima de una carretera, halla que el ángulo de elevación de la punta de un poste es 0.3022[rad] y el ángulo de depresión del pie del poste es 0.1501[rad]. Determine la altura del poste y la distancia al observador.
(R: ≈ 13.77 y 29.75 [m])
- (19) Determine el ángulo de elevación del sol cuando la sombra de un poste de 4 [m] de altura es de $2\sqrt{3}$ [m] de largo.
- (20) El ángulo de elevación de la parte superior de una torre es de $\frac{\pi}{6}$ [rad], acercándose 100[m] se encuentra que el ángulo de elevación es de $\frac{\pi}{3}$ [rad]. Determine la altura de la torre.
- (21) Un trozo de alambre de 5.5 [m] se dobla para formar un triángulo. Un lado tiene 1.5 [m] y el otro 2 [m]. Determine los ángulos del triángulo.
- (22) Demuestre que para cualquier triángulo **ABC** se cumple:
- a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc \cos\alpha + ac \cos\beta + ab \cos\gamma)$
- b) $\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$
- (23) En un triángulo rectángulo, la diferencia de los cuadrados de sus catetos es igual al doble del producto de éstos. Calcule la medida de sus ángulos agudos.
(R: $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$)
- (24) Un barco navega 120 millas náuticas en dirección **N 1.396 E** y luego 200 millas náuticas en dirección **S 0.3491 O**. ¿A qué distancia se encuentra entonces del punto de partida y en qué dirección?

- (25) Un cable con extremos fijos a un poste y a un terreno llano, forma con éste, un ángulo de $1.2217[\text{rad}]$. En un punto situado a $0.635 [\text{m}]$ más lejos del poste que el cable, el ángulo de elevación del extremo superior del poste es de $0.6458[\text{rad}]$. ¿Cuál es la longitud del cable?
- (26) Desde un barco que se halla en el mar, el ángulo que subtienden dos puntos **A**, **B** es de $\frac{\pi}{6}[\text{rad}]$. El barco navega $4000 [\text{m}]$ en dirección de **A**, el ángulo es entonces de $\frac{\pi}{4}[\text{rad}]$. ¿A qué distancia está el barco del punto **B** ?
- (27) Tres ciudades **A**, **B** y **C** ubicadas en línea recta se abastecen de energía eléctrica de una central **D**. La distancia entre **A** y **B** es **p**, la distancia entre **B** y **C** es **q**, la distancia entre **D** y **C** es **a**, y la distancia entre **D** y **A** es **c**. Calcule la distancia entre **D** y **B** en función de **a**, **c**, **p** y **q**.
- (28) En el triángulo de la figura rectángulo en **C**, se tiene que $b = \overline{\text{AC}} = 0.90[\text{m}]$ y $p = \overline{\text{BD}} = 0.96[\text{m}]$. Calcule $\beta = \angle \text{ABC}$



GUÍA N° 5

Unidad Programática: NÚMEROS COMPLEJOS.

Objetivos: EL alumno deberá ser capaz de

- Visualizar la estructura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ como cuerpo .
- Desarrollar las expresiones que involucren la suma (resta), multiplicación y división con números complejos, expresados en la forma (a, b) o $(a + ib)$.
- Conocer y aplicar las propiedades de: conjugación, módulo, parte imaginaria y parte real de un número complejo .
- Aplicar correctamente las propiedades que se deducen de la igualdad de números complejos .
- Resolver ecuaciones en \mathbb{C} .
- Expresar un número complejo dado en forma canónica, en forma polar y viceversa .
- Multiplicar, dividir, obtener potencias y raíces de números complejos expresados en forma polar .

1.- Obtenga la forma $a + bi$ de los siguientes números complejos:

1.1 $(1 - 4i)(3 + 11i) - (1 + i)^{-1}$ 1.2 $(1 - i)^3(1 + i)$

1.3 $\left[\frac{2i}{(1+i)}\right]^4$ 1.4 $\frac{i}{(1+i)} + \frac{(1+i)}{i}$.

2.- Calcule: $i^{18} - 3i^7 + i^2(1 - i^4) - (-i)^{26}$.

3.- Resuelva las ecuaciones siguientes:

3.1 $(1 + i)z = 2 - i$.

3.2 $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (**F1:** $z^3 + z^2 + z + 1 = z(z^2 + 1) + (z^2 + 1)$).

4.- Demuestre que el número complejo $z = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$ satisface la siguiente ecuación: $\frac{3}{(z+1)} - \frac{1}{z} = 1$.

5.- Obtenga las tres soluciones de la ecuación $z^3 - 1 = 0$. Denótelas por 1, a y b, demuestre que:

5.1 $a = b^2$

5.2 $b = a^2$

5.3 $ab = 1$.

6.- Dados $z, w \in \mathbb{C}$, demuestre que:

6.1 $z \cdot w = w \cdot z$

6.2 $(-z)^{-1} = -(z^{-1})$, $z \neq 0$

6.3 $\overline{(-z)} = -(\bar{z})$

6.4 $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, $z \neq 0$.

7.- Sean $w, z \in \mathbb{C}$, demuestre que:

7.1 $\operatorname{Re}(w) < |w|$

7.2 $\operatorname{Re}(w \bar{z}) < |w||z|$

7.3 $\operatorname{Re}(\bar{w} z) > -|w||z|$.

8.- Factorice la expresión dada, en factores de primer grado, en el cuerpo de los números complejos.

8.1 $x^2 + x + 1$

8.2 $\frac{16}{81}x^2 + 49$

8.3 $2x^2 - 2x + 1$

8.4 $3x^2 - 2x + 1$.

Ayuda: Si $q > 0$ entonces $(x + p)^2 + q = (x + (p - i\sqrt{q}))(x + (p + i\sqrt{q}))$.
Como **ilustración** considere

$$4x^2 - 12x + 13 = 4\left(x - \left(\frac{3}{2} - i\right)\right)\left(x - \left(\frac{3}{2} + i\right)\right).$$

9.- Demuestre que para todos $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x + yi| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2} |x + yi|.$$

10.- Suponga conocida la posición de z en el plano complejo. Describa geoméricamente la posición relativa de los siguientes números complejos.

10.1 $z + \bar{z}$

10.2 $\frac{z}{i}$

10.3 $\frac{z}{|z|}$

10.4 $\frac{1}{z}$

10.5 $\frac{z}{\bar{z}}$

10.6 z^2 .

11.- Pruebe que $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ e interprete geoméricamente este resultado.

12.- Halle el lugar geométrico de los puntos en el plano que representan a los números complejos que satisfacen las relaciones:

11.1 $1 \leq |z - z_0| \leq 2$ 11.2 $a\text{Re}z + b\text{Im}z = c; a, b, c \in \mathbb{R}$

11.3 $0 \leq \text{Im}z < 1$ 11.4 $|z - 1| + |z + 1| = 2.$

13.- Exprese en forma polar los siguientes números complejos:

13.1 -4 13.2 $-6i$ 13.3 $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

13.4 $-\sqrt{7} + i\sqrt{21}$ 13.5 $-2 + i$

13.6 $(1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})i.$

14.- Demuestre que $\left(\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\right)^{18} = 1.$

15.- Realice las operaciones indicadas y reduzca a la forma más simple.

15.1 $(\sqrt{3} + i)^3$ 15.2 $(1 + i\sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i)^3$

15.3 $\frac{(1+i)}{(1-i)^2}$ 15.4 $\frac{(-\sqrt{3} + i)(1+i\sqrt{3})}{(1+i)}$

15.5 $(\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta + i(\text{cos}\alpha - \text{cos}\beta))^n$

15.6 $\left(\frac{(1+i)}{(1-i)}\right)^2 - \left(\frac{(1-i)}{(1+i)}\right)^3.$

16.- Calcule la parte real, la parte imaginaria y el módulo de

$$\left[\frac{1 + \cos\alpha + i\text{sen}\alpha}{1 + \cos\beta + i\text{sen}\beta} \right]$$

17.- Calcule :

17.1 las raíces cuadradas de i . 17.2 las raíces cúbicas de $1 - i$.

17.3 las raíces cuartas de $-16i$ y de 1 .

17.4 las raíces quintas de 1 .

17.5 las raíces cuartas de $\frac{(8\sqrt{2}+i8\sqrt{2})}{\left(\frac{384}{\sqrt{3}}-128i\right)}$.

17.6 las raíces cuartas de $-2 - i2\sqrt{3}$ y compruebe gráficamente.

18.- Sean $1, w, w^2$ las raíces cúbicas de 1 , demuestre que :

18.1 $(1 + w^2)^4 = w$ 18.2 $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$.

19.- Resuelva las siguientes ecuaciones :

19.1 $z^2 + z + 1 = 0$ 19.2 $2z^2 - 3z + 2 = 0$

19.3 $z^4 + 1 = 0$ 19.4 $(2 - 2i)z^2 - (11 + 9i)z - (16 + 6i) = 0$

20.- Determine los seis números complejos que son elementos del conjunto solución de $z^6 - 1 = 0$. (**Ayuda:** Use suma por diferencia).

21.- Si $n \in \mathbb{N}$ y $z \neq 0$, se define $z^{-n} := (z^n)^{-1}$. Calcule:

21.1 $(1 + i)^{-3}$ 21.2 $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}$ y demuestre que si

$z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ entonces $z^{-n} = r^{-n}(\cos(-n\alpha) + i\operatorname{sen}(-n\alpha))$.

- 22.- Si n y $m \in \mathbb{N}$ son números primos relativos (es decir, el único divisor común es 1) y $z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ demuestre que la ecuación $w^n = z^m$ tiene exactamente n soluciones w_0, w_1, \dots, w_{n-1} , las que están dadas por:

$$w_k = r^{m/n} \left(\cos \left[\frac{m(\alpha + 2k\pi)}{n} \right] + i \operatorname{sen} \left[\frac{m(\alpha + 2k\pi)}{n} \right] \right)$$

$k = 0, 1, \dots, (n-1)$. La relación $w^n = z^m$ sirve para definir " $z^{m/n}$ ". Además, calcule

22.1 $(1 + i)^{3/2}$

22.2 $(-16i)^{3/4}$

22.3 $1^{2/5}$

22.4 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)^{2/3}$.

- 23.- Utilice el Teorema de De Moivre para demostrar que:

$$\cos(5\alpha) = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + 5\cos\alpha\operatorname{sen}^4\alpha.$$

- 24.- Demuestre que: Para todo entero positivo n ,

$$\left[\frac{1 + \operatorname{sen}\alpha + i\operatorname{cos}\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha - i\operatorname{cos}\alpha} \right]^n = \cos \left[n \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] + i \operatorname{sen} \left[n \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right].$$

- 25.- Sean $z, w \in \mathbb{C}$, demuestre que:

25.1 $|z + w| \geq |z| - |w|$.

25.2 $||z| - |w|| \leq |z - w|$. **Sugerencia:** Escriba $z = z + w + (-w)$, y use (25.1).

- 26.- Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $|z + w| = |z - w|$, demuestre que $\operatorname{Re} \left(\frac{z}{w} \right) = 0$.

- 27.- Si $u, v \in \mathbb{C}$, demuestre que $(u\bar{v} + \bar{u}v) \in \mathbb{R}$.

28.- Dado el número complejo $z = (1, 4)$, determine el número complejo w tal que el triángulo formado por: $0, z, w$ sea equilátero.

29.- Exprese en forma binomia y polar:

29.1 $e^{-\pi i}$

29.2 $e^{1-i\pi/6}$

29.3 e^{1+i}

30.- Demuestre que:

30.1 $z = x + yi \Rightarrow |e^z| = e^x$

30.2 $\text{Im}z > 0 \Rightarrow |e^{iz}| < 1.$

EJERCICIOS MISCELANEOS

1.- Resuelva

$$\left(e^{1+\frac{\pi i}{4}} \right)^5 z^4 - 2 + i \text{Im}(4 - \sqrt{3} i) = 0.$$

2.- Sean $z = e^{i\alpha}$, $w = re^{i\beta}$; pruebe que:

$$\frac{z+w}{z-w} = \frac{1-r^2+i2r\text{sen}(\beta-\alpha)}{1+r^2-2r\text{cos}(\beta-\alpha)} \text{ y que, en particular}$$

$$\text{Re} \left[\frac{1+w}{1-w} \right] = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\text{cos}\beta}.$$

3.- Calcule $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, donde n es un número entero positivo.

Resp.: $2i^{(n-1)}$

4.- Resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones.

4.1 $(3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i$ $(4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i$	4.2 $x + iy - 2z = 10$ $x - y + 2iz = 20$ $ix + 3iy - (1 + i)z = 30$
--	---

Resp.: **3.1** $x = 1 + i, y = i$

3.2 $x = 3 - 11i, y = -3 - 9i, z = 1 - 7i$

5.- Demuestre que:

$$(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \alpha\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12} + \alpha\right) \right)$$

6.- Sea $z \in \mathbb{C}$ pruebe que: $i \cdot z = r \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right).$

7.- Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z + \left(\frac{1}{z}\right) = 2\cos\alpha$. Pruebe que :

$$z^m + \left(\frac{1}{z^m}\right) = 2\cos(m\alpha).$$

Ayuda: Escriba z en forma polar y luego aplique la Fórmula de **De Moivre**.



GUÍA N° 6

Unidad Programática: POLINOMIOS.

Objetivos: El alumno deberá ser capaz de

- Utilizar correctamente la división sintética para hallar cuocientes y restos en divisiones del tipo $P(x) : (x - r)$.
- Resolver problemas que involucren el teorema del factor y/o el teorema del resto.
- Determinar los ceros de polinomios con coeficientes enteros, racionales y reales.
- Explicitar un polinomio si se conocen sus ceros y las multiplicidades de tales ceros.
- Determinar los restantes ceros de un polinomio si se conocen algunos de ellos.
- Factorizar un polinomio ya sea en \mathbb{Q} , \mathbb{R} o \mathbb{C} .
- Descomponer en fracciones parciales una función racional propia.

1.- Dados los polinomios sobre \mathbb{R}

$$P(x) = 2x^5 + 3x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$S(x) = 6x^6 - x^2 + x - 2$$

$$T(x) = x^4 + 2x^3 - 3$$

Calcule: **1.1** $U(x) = 2P(x) - 3S(x) - T(x)$

1.2 $W(x) = 6P(x) + \sqrt{2} T(x)$

1.3 $Z(x) = S(x) + 5T(x) - eP(x)$.

2.- Dados los polinomios siguientes, calcule su producto y deje expresado el resultado como un nuevo polinomio, en el cual ya no existen términos semejantes.

2.1 $2x^2y^3 - 5xy^2 - 7$; $6x^5y + 2x^2y^2 + 3x - 1$

2.2 $2x^2y + 3xy^2 - xy$; $5xy^2 - 2x^2y + xy - 2$.

3.- Evalúe los siguientes polinomios.

3.1 $P(x) = 2x^5 - 2x^3 + x^2 - 1$ si $x = -2$

3.2 $Q(x) = 3x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 2x^2 - 6x - 2$ si $x = -3$

3.3 $R(x) = x^4 - x^2 + x - 1$ si $x = 2$.

4.- Para $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$. Determine el valor de verdad de la siguiente aseveración: $2P(-1) = P(3) - 1$.

5.- Efectúe las siguientes divisiones.

5.1 $4x^4 + 5x^2 - 7x + 3 : 2x^2 + 3x - 2$

5.2 $2x^3 + 5x^2 - 22x + 15 : x^2 + 3$

5.3 $8x^5 - 18x^3 - 6x^2 - 6x + 22 : 2x^2 - 5$

5.4 $13x^3 + 3x + 10x^5 - 16 - 6x^2 + 4x^4 : 3 + 2x^2$.

6.- Use la definición de igualdad de polinomios para calcular el valor de las constantes : **A, B, C, D**

6.1 $2x^2 - 3x - 1 = Ax^2 + B(x + 2) + C(x - 1)$

6.2 $2x^2 - 3x - 1 = A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C$

6.3 $x^3 - 3x^2 + 2x - 7 = A(x - 1)^3 + B(x - 2)^2 + C(x - 1) + D$

6.4 $16x^3 + 1 = A(2x + 1)^3 + B(x - 1)^2 + C(x - 1) + D$.

7.- Determine el valor de la constante **a** y el cociente si $(x + 2)$ es un divisor del polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + ax + 6$. Factorice completamente a $P(x)$.

8.- Factorice completamente $Q(x) = x^3 - 19x + 30$.

9.- Determine los ceros racionales (en cada caso) del polinomio $R(x)$.

9.1 $R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

9.2 $R(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

9.3 $R(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 21$

9.4 $R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$.

10.- Exprese cada uno de los polinomios como producto de tres factores lineales (cuando sea posible).

10.1 $x^3 - x^2 - 16x - 20$

10.2 $x^3 - 7x - 6$

10.3 $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4$.

11.- Determine k sabiendo que $x - 1$ es un factor de $x^5 - 2kx^2 + 2$.

12.- El resto al dividir $x^4 + 13x + k$ por $(x + 3)$ es 20. Determine el valor de k .

13.- Determine a y b tales que $x^4 + ax^2 + b$ tiene como factores a $(x + 1)$ y $(x - 2)$.

14.- Factorice completamente.

14.1 $P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

14.2 $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24$.

15.- Determine el valor de k y los ceros del polinomio $P(x) = 9x^4 - 25x^2 + 10kx - k^2$ si $(x - 1)$ y $(x + 2)$ son factores.

16.- Determine la forma de los infinitos polinomios de grado 3 que tienen a 2 como un cero y a -7 como cero de multiplicidad 2.

17.- Si $P(x)$ es mónico y tiene grado 4. Determine $P(x)$ sabiendo que tiene como ceros a los números reales: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, -7 y 5 .

18.- Un polinomio $P(x)$ de grado 3 tiene como ceros -1 , 0 y 2 . Determine sus coeficientes. ¿Es $P(x)$ único?

19.- Un polinomio mónico $P(x)$ tiene un cero en $x = 2$. Determine $P(x)$. Señale otro polinomio no mónico $A(x)$ de grado 3 con los mismos ceros.

- 31.- Si i es un cero de $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ determine los otros ceros.
- 32.- Demuestre que todo polinomio de grado 5 con coeficientes reales tiene por lo menos un cero real.
- 33.- Escriba un polinomio con coeficientes racionales de grado 4 con $(3 + \sqrt{7})$ como cero de multiplicidad dos.
- 34.- Escriba un polinomio de cuarto grado con coeficientes racionales que tenga a $(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ como uno de sus ceros .
- 35.-
- Determine el número posible de ceros reales positivos de $P(x)$.
 - Determine el número posible de ceros reales negativos de $P(x)$.
 - ¿Cuáles son los posibles ceros racionales de $P(x)$? .
 - Factorice $P(x)$ como producto de factores lineales y de factores cuadráticos irreducibles .
 - Factorice $P(x)$ como producto de factores lineales .

Para $P(x) =$

35.1 $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 36x + 36$

35.2 $x^4 + 6x^2 + 9$

35.3 $x^4 + x^3 + x^2 - 4x - 20$

35.4 $12x^4 + 4x^3 - 23x^2 + x + 6$

35.5 $x^3 - 2x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$

35.6 $2x^5 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

- 36.- Determine todos los ceros de $Q(x) = x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2$, sabiendo que cada uno de los ceros $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ y $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ tiene multiplicidad dos.

- 37.- Descomponga en fracciones parciales :

37.1 $\frac{-x+22}{x^2-2x-8}$

37.2 $\frac{x^5+1}{(x^2+x+1)^2}$

37.3 $\frac{x^2-12x+18}{x^3-6x^2+9x}$

37.4 $\frac{(x^2+1)^2}{x^2-2x-8}$

6.- Dado el polinomio $p(x) = 6x^3 - n^2x^2 + mx - 3n$, obtenga **m** y **n** de modo que :

- 6.1** Al dividir $p(x)$ por $(x - 2)$ el resto sea 21. **6.2** -1 sea un cero de $p(x)$.
6.3 **m** y **n** son números enteros .

7.- Dado el polinomio $p(x) = a^2x^5 + b^2x^4 + abx^3 + 5x^2 + 2x - 26$. Determine todos los valores **a** y **b**, (si los hay) de modo que $(x - 1)$ sea un divisor de $p(x)$ y que al dividir $p(x)$ por $(x + 1)$ el resto sea -24 .

8.- Determine **a** y **b** $\in \mathbb{R}$ para que el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b$, sea divisible por $(x^2 - 1)$ y encuentre **todos** los ceros reales de $p(x)$.

9.- Determine **a** y **b** en el polinomio $p(x) = x^4 + ax^2 + b$ y factorícelo completamente si dos de sus factores son $(x + 1)$ y $(x - 2)$.

10.- En cada caso determine los ceros y factorice el polinomio dado

10.1 $q(x) = x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15$

10.2 $r(x) = 2x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 10x - 4$.

11.- Al dividir $x^3 + bx^2 + cx + d$ por $(x + p)^2$ se obtiene exactamente $(x + a)$
Demuestre las siguientes afirmaciones:

11.1 $b - 2p = a$

11.2 $c - p^2 = 2ap$

11.3 $d = p^2a$.

12.- Sea $p(x)$ un polinomio tal que $\text{gr}(p(x)) > 3$. Si se sabe que al dividir $p(x)$ por $(x - 3)$ el resto es 2, que 2 es un cero de $p(x)$ y además $p(4) = 6$, encuentre el resto al dividir $p(x)$ por $(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.

13.- Descomponga en fracciones parciales

$$H(x) = \frac{5x^3 + 8x + 21}{(x^2 - 4x - 5)(x + 1)} .$$

(Calcular el valor de las constantes es parte del ejercicio.)



GUÍA N° 7

Unidad Programática: NÚMEROS NATURALES

Objetivos: El alumno deberá ser capaz de:

- Demostrar proposiciones algebraicas mediante el método de inducción.
- Calcular el valor de expresiones que contengan símbolos de sumatoria y/o productoria.
- Deducir fórmulas para expresiones que contengan símbolos de sumatoria y/o productoria.
- Dado un conjunto ordenado determinar si sus términos están en Progresión Aritmética o Progresión Geométrica.
- Explicitar una Progresión Aritmética o una Progresión Geométrica, conociendo la información adecuada.
- Dada una expresión binomial determinar el término k-ésimo, el término independiente, el(los) término(s) central(es) de su desarrollo.
- Aplicar los contenidos de la unidad en la resolución de problemas prácticos.

3.7 $7^{3n+1} - 19^{2n+1} + 12$ es divisible por 342

3.8 $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

SUMATORIAS Y PRODUCTORIAS.

4) Resumir mediante sumatorias o productorias

4.1 $2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$ 4.2 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

4.3 $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \dots \cdot x^{n+2}$ 4.4 $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (n-1)^2$.

5) Calcule las siguientes sumas:

5.1 $\sum_{k=0}^{10} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^k$ 5.2 $\sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{7}k^2 + 2^k\right)$

5.3 $\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^4 a_{ij}\right)$ 5.4 $\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^3 (i^2 + 3^j)\right)$

6) Determine una fórmula para las siguientes sumas:

6.1 $\sum_{k=1}^n k^2$ (Ayuda: $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$)

6.2 $\sum_{k=1}^n k^3$ (Ayuda: $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$)

6.3 $\sum_{k=1}^n kk!$ 6.4 $\sum_{k=1}^n (2k+1)^2$

6.5 $\sum_{k=1}^n (-1)^n k^2$ 6.6 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

$$6.7 \quad \sum_{k=1}^n x^k, \quad x \neq 1 \qquad 6.8 \quad \sum_{k=1}^n k2^k$$

$$6.9 \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+m-1)(k+m)} \quad \left(\text{Ayuda: } a_k = \frac{1}{(k+m)}, \quad a_{k-1} = \frac{1}{(k+m-1)} \right)$$

7) Demuestre por inducción que:

$$7.1 \quad \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} (1 - (n+1)q^n + nq^{n-1})$$

$$7.2 \quad \sum_{k=1}^n (k^2 + 1)k! = n(n+1)!$$

$$7.3 \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| < \sum_{k=1}^n |a_k|$$

8) Calcule la suma de **todos** los múltiplos positivos de 17, menores que 1000.

9) Calcule $\sum_{k=1}^n (3k-1)$ y demuestre por inducción la fórmula hallada.

10) Examine algunos de los valores de los productos

$$10.1 \quad \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)} \right) \qquad 10.2 \quad \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

para valores pequeños de **n** y conjeture fórmulas generales para ellos. Demuestre sus conjeturas por inducción.

11) Calcule y simplifique:

$$\left(\sum_{k=1}^n 2k(k+2) \right) \left(\prod_{k=3}^n \frac{k^2}{(k^2+1+2k)} \right)$$

12) Demuestre que $\sum_{k=0}^n (xa_k - b_k)^2 \geq 0$, para todo **x** real.

13) De (12) deduzca que $\left[\sum_{k=0}^n a_k b_k \right] \leq \left[\sum_{k=0}^n a_k^2 \right] \left[\sum_{k=0}^n b_k^2 \right]$.

14) Si $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} - \{0\}$. Demuestre que

$$\left[\sum_{k=1}^n a_k \right] \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right] \geq n^2.$$

15) Calcule $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n$.

COEFICIENTES BINOMIALES. TEOREMA DEL BINOMIO.

1) Si $\binom{n}{12} = \binom{n}{8}$, obtenga $\binom{n}{17}$ y $\binom{22}{n}$.

2) Demuestre que si $x \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$\binom{x}{n} + \binom{x}{n+1} = \binom{x+1}{n+1}$$

3) Si $n, k \in \mathbb{N}$ y $k < n - 2$. Demuestre que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

4) Resuelva en \mathbb{N} el sistema

$$\left. \begin{aligned} \binom{x}{y+1} &= \binom{x}{y-1} \\ 4\binom{x}{y} &= 5\binom{x}{y+1} \end{aligned} \right|$$

- 5) 5.1 Determine el séptimo término en el desarrollo de

$$(3x - 2\sqrt{x})^{10}.$$

- 5.2 Determine el término independiente de x en el desarrollo de

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^{12}.$$

- 6) En el desarrollo de $\left(1 + \frac{1}{x} + 6x\right)^{10}$, obtenga el **término independiente de x** . (Si existe).
- 7) En el desarrollo de $(x\sqrt{x} + x^{-4})^n$ el coeficiente del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en 44 unidades. Determine el **término independiente x** .
- 8) Determine una relación entre a y n , de modo que en desarrollo de $(1 + a)^n$ aparezcan dos términos consecutivos iguales.
- 9) Calcule n tal que el coeficiente del cuarto término sea el doble del coeficiente del quinto término en el desarrollo de $(a + b)^n$.
- 10) Demuestre que el coeficiente central del desarrollo de $(a + b)^{2n}$ es igual a la suma de los coeficientes de los términos centrales del desarrollo de $(a + b)^{2n-1}$.
- 11) ¿Cuántos términos contiene el desarrollo de $(a + b + c + d)^n$?
- 12) Encuentre el coeficiente de x^2 en el desarrollo de $\left(x^3y^4 - \frac{1}{xy^2}\right)^{14}$.

- 13) 13.1 Encuentre el término intermedio del desarrollo de $\left(\frac{3}{a} + a\right)^{12}$.
- 13.2 Si se tiene $(Ax + By)^5$ calcule **A** y **B** si el coeficiente del tercer término es 12 y el del sexto término es 32.
- 13.3 Encuentre el coeficiente del término que contiene a^2b^2cd en el desarrollo de $(a + b + c + d)^6$.

- 14) Sean $n, k \in \mathbb{N}, n > k$. Calcule **A**, donde

$$A = 1 + 3 \binom{n}{1} + 3^2 \binom{n}{2} + \dots + 3^k \binom{n}{k} + \dots + 3^n.$$

- 15) Dado el binomio $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{20}$

- 15.1 ¿Cuál es el término independiente?
 15.2 Calcúlelo, si existe.

- 16) Demuestre que

$$n! < \left[\frac{1}{2}(n + 1)\right]^n.$$

PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

- 1) Determine la suma de n términos de las progresiones que se indican:

1.1 49, 44, 39, $n = 17$

1.2 $3, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \dots$ $n = 20$

1.3 $\frac{1}{(1+\sqrt{x})}, \frac{1}{(1-x)}, \frac{1}{(1-\sqrt{x})}, \dots$ $n = 10$

1.4 $1, \sqrt{3}, 3, \dots$ $n = 12$

1.5 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$ $n = 7$

1.6 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \dots$ $n = 8.$

2) Interpole

2.1 18 medios aritméticos entre $-35x$ y $3x$.

2.2 5 medios geométricos entre $3\frac{5}{9}$ y $40\frac{1}{2}$.

3) Si $a_1 = -2$ y $d = 4$ ¿cuántos términos deben considerarse para que la suma sea 160? .

4) Los términos de lugar 2, 31 y último de una progresión aritmética son $\frac{31}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{13}{2}$, respectivamente. Determine el primer término y el número de términos.

5) El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el segundo 24. Determine la citada progresión .

6) Si tres números diferentes a, b y c están en progresión geométrica, demuestre que: $\frac{1}{(b-a)}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{(b-c)}$ están en progresión aritmética.

7) Demuestre que los recíprocos de los términos de una progresión geométrica forman también una progresión geométrica.

8) Determine una progresión geométrica tal que $a_4 + a_6 = 120$ y $a_7 + a_9 = 960$.

- 9) Calcule dos números tales que su medio aritmético sea 20 y su medio geométrico sea 18.
- 10) El producto de 3 números en progresión aritmética es 120 si se multiplican el primero por 15, el segundo por 12 y tercero por 10 resulta una progresión geométrica. Determine los números.
- 11) El producto de 3 números en progresión aritmética es 750 y la suma de ellos es 30. Obtenga los números.
- 12) Calcule
- 12.1 $1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \frac{31}{256} + \dots$
- 12.2 $x(x + y) + x^2(x^2 + y^2) + \dots + x^n(x^n + y^n)$
- 12.3 $\frac{4}{7} - \frac{5}{7^2} + \frac{4}{7^3} - \frac{5}{7^4} + \frac{4}{7^5} - \dots$
- 13) En la progresión aritmética: $-7, -5, -3, \dots$ ¿Existe algún término igual a 65?
- 14) 14.1 Obtenga el medio geométrico entre $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ y $\sqrt{7} - \sqrt{3}$.
- 14.2 Interpole 3 medios geométricos entre 24 y $\frac{3}{2}$.
- 15) En cierto cultivo, las bacterias se duplican cada 20 minutos ¿Cuántas veces el número original de bacterias hay en el cultivo al cabo de 2 horas, suponiendo que ninguna desaparece?.
- 16) Encuentre 3 números en progresión geométrica, sabiendo que su suma es de 26 y de tal manera que el más grande sobrepase en 10 unidades a la suma de los otros dos.



PRUEBAS Y EXAMENES

PRUEBA GLOBAL N° 1

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

[1] Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Determine, justificadamente, si la relación R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de A en B es una función. Si es una función, dé su recorrido.

(1.1) $R_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2)\}$

(1.2) $R_2 = \{(a, 1), (b, 2), (a, 2), (c, 1), (d, 2)\}$

(1.3) $R_3 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$

(1.4) $R_4 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$.

[2] Sea $T = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$ y consideremos sobre dicho conjunto la ley de composición interna **asociativa**, $*$, dada por $m * p := m + p - pm$.

(2.1) Determine si $(T, *)$ es grupo.

(2.2) Calcule $\{(2*3)^{-1} * (-2*4)\}^{-1}$.

[3] Sea un anillo $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ demuestre que:

$$(-b) \cdot a \cdot (-a) = b \cdot a^2 \text{ para todos } a, b \in \mathbf{A}.$$

[4] Resuelva la siguiente ecuación en el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$5 - 4x + 6 + x = (-3) + 5x.$$

Fundamente cada paso.

[5] En el cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ demuestre que se cumple:

$$\text{Si } a > 0 \text{ entonces } a^2 + a + 1 > 0.$$

[6] Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestre que:

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Entregue un ejemplo numérico donde se cumpla la desigualdad en forma estricta.

rrrrrrrrrr † † † rrrrrrrrrr

PRUEBA GLOBAL N° 2

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje aciosamente y con calma.

(4) ¡QUE LA FUERZA LOS ACOMPAÑE!

PREGUNTAS:

En las preguntas [1] y [2] para cada una de las inecuaciones planteadas escriba el correspondiente conjunto solución como intervalo o como unión y /o intersección de intervalos.

[1]
$$\frac{x}{(x+1)} \geq \frac{1}{(x-1)}$$

[2]
$$|3 - 4x| - |12x - 1| \leq 6.$$

[3] Considere el siguiente subconjunto de los números reales

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = 2 + \frac{1}{2^n}; n = 0, 1, 2, \dots, \right\}$$

(3.1) Dibuje su representación en la recta real.

(3.2) Indique si **A** es acotado superiormente y si **A** es acotado inferiormente.
Fundamente.

(3.3) En el caso que exista señale: $\max(A)$, $\min(A)$, $\sup(A)$ e $\inf(A)$.
Justifique.

[4] Para $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ demuestre la identidad logarítmica

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b.$$

[5] Dada la ecuación exponencial

$$5^{x-1} + 5^x + 5^{x-3} = 151$$

entregue su **conjunto solución**.

[6] Determine el **conjunto solución** del sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \log_5 x + \log_{11}(11^y) = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{array} \right|$$

rrrrrrrrrr ‡ ‡ ‡ rrrrrrrrrr

PRUEBA GLOBAL N° 3

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en 7 (siete) preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

[1] Verifique que:

$$\frac{\operatorname{sen}(-3\pi/2) + \cos(5\pi/6)}{\operatorname{tg}(8\pi/3) + \operatorname{cotg}(-5\pi/4)} = \frac{\sqrt{3}-2}{2(\sqrt{3}+1)}$$

[2] Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$\operatorname{cos} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

[3] Determine el conjunto de **soluciones básicas** de la ecuación trigonométrica:

$$2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{cos} x = 0.$$

[4] Un asta de bandera está colocada verticalmente en lo alto de un edificio; a una distancia de 12[m] del edificio, los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$ [rad] respectivamente. Determine la longitud del asta.

[5] Encuentre la parte real y la parte imaginaria de

$$z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} .$$

[6] Demuestre que :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 1 .$$

[7] Resuelva en \mathbb{C} la ecuación :

$$z^3 + i = 0 .$$



PRUEBA GLOBAL N° 4

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS :

[1] Utilizando división sintética, verifique que $(x + 2)$ y $(x - 1)$ **no** son factores del polinomio $p(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$.

[2] Determine **todas** las raíces de la ecuación polinomial:

$$4x^4 - 3x^3 - 4x + 3 = 0.$$

[3] Dado $p(x) = x^4 + cx^2 + d$, determine los valores de **c**, **d** y factorícelo completamente, sabiendo que $(x + 1)$ y $(x - 2)$ son dos factores de **p(x)**.

[4] Descomponga en fracciones parciales

$$H(x) = \frac{5x^3 + 8x + 21}{(x^2 - 4x - 5)(x + 1)} .$$

(Calcular el valor de las constantes es parte del ejercicio.)

[5] Demuestre por inducción que para todo entero positivo n se cumple que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)} .$$

[6] 6.1 Sea $A = \{x_1 = 8, x_2 = 8, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = -3\}$. Calcule :

$$\sum_{i=1}^5 \{3x_i^2 - 3\} + \prod_{j=1}^4 \left\{ \frac{x_j}{x_{j+1}} \right\} . \quad \text{(6pts)}$$

6.2 Use el símbolo de suma, para abreviar la notación en :

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + (n + 1)^4. \quad \text{(4pts)}$$

Resultados : Viernes 07/07/2000 de 15:45 a 16:15 [hrs] PM en la salas 21 y 22



EXAMEN

INSTRUCCIONES: (1) El examen que usted lee en este momento consiste en **10 (diez)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder **cada una** de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración del examen : **150** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en este examen, de modo que trabaje acuosamente y con calma.

PREGUNTAS :

[1] Sea $G =] - 1, 1[$ y consideremos en G la ley de composición interna Δ definida por $a \Delta b := \frac{(a+b)}{(1+ab)}$.

1.1 Para cada $c \in G$, determine el elemento inverso de c con respecto a la ley de composición interna, Δ .

1.2 Calcule $\left\{ \frac{1}{2} \Delta \left(-\frac{1}{5} \right) \right\}^{-1}$.

[2] Resuelva la inecuación: $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$. Deje expresada la solución como intervalo o como unión y/o intersección de intervalos.

[3] Explícite el **conjunto solución** del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \log_x 100 - \log_y 10 = 0 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} .$$

[4] Determine el **conjunto solución** de la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\text{sen}(2x)\cos x + \cos(2x)\text{sen} x = 1.$$

- [5] Un observador determina que el ángulo de elevación a una torre es α [rad]; avanza a [m] hacia la torre y el ángulo de elevación es $\frac{\pi}{4}$ [rad]; sigue avanzando otros b [m] y el ángulo es de $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ [rad]. Demuestre que la altura de la torre está dada por $H = \frac{ab}{a-b}$.

- [6] Calcule el valor de x (en la **forma binómica**) si :

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right).$$

- [7] Utilice **división sintética** para determinar **todos** los ceros del polinomio

$$P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48.$$

- [8] **Sin calcular el valor las constantes**, descomponga en fracciones parciales

$$8.1 \quad \frac{(x+3)}{(x^2+10x+25)^2(x^4-1)^2}$$

$$8.2 \quad \frac{x^4 + 2x^3 - 3x + 1}{(x-5)(x+3)(x+4)}.$$

- [9] Demuestre por inducción que para todo entero positivo n

$$7^{(n+1)} + 5 \text{ es divisible por } 6.$$

- [10] Calcule : $S = \sum_{k=3}^{2000} k(k-2)$. (**Ayuda:** Utilice las propiedades de la sumatoria y

las sumas conocidas : $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$; $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$).

Resultados el Jueves 20 de julio de 2000 a las 17:30 horas en sala 23

PRUEBA GLOBAL N° 1

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

[1] Considere el conjunto $S = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$. Definamos la operación binaria interna $*$ en S como

$$(u, v) * (x, y) := (ux, vx + y)$$

Demuestre que $(S, *)$ es un grupo y verifique que tal grupo **no** es abeliano. (Ayuda: La operación $*$ es asociativa.)

[2] Sea $E = \{0, 1, 2, 3\}$ y se definen las leyes de composición internas Δ y \circ mediante las tablas de doble entrada.

Δ	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

\circ	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Sabiendo que (E, Δ) es grupo abeliano y que la operación \circ es asociativa. Determine, si existe(n), la(s) solución(es) de cada una de las ecuaciones siguientes:

(2.1) $x \circ (3 \Delta 3) \circ (1 \Delta 2) = 0$

(2.2) $(3 \Delta 0) \circ (1 \Delta 1) \circ x = 1$

[3] Usando las propiedades algebraicas y de orden en \mathbb{R} , demuestre que:

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R}^+; \quad a < b, \quad \text{entonces} \quad \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

En los problemas [4] y [5] para cada una de las inecuaciones planteadas, escriba el **conjunto solución** como intervalo o como unión y/o intersección de intervalos.

[4] $|x + 2| + |x - 1| \leq 5.$

[5] $\frac{(1+x^2)(x^2-x+1)}{\sqrt{(x+1)^2(x^2-2x-8)}} < 0.$

[6] Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, tal que $A = \{n \in \mathbb{N} / 5 < n^2 + 1 \leq 197\} \cap]\pi, 14[.$

(6.1) Indique si A es acotado superiormente o acotado inferiormente o acotado. **Fundamente** su respuesta.

(6.2) En caso de existir determine : $\max(A)$, $\min(A)$, $\sup A$, $\inf(A)$. **Justifique.**



PRUEBA GLOBAL N° 2

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

[1] Determine el **conjunto solución** de la ecuación exponencial-logarítmica:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\{(\log^2 x)+1\}} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\{2-\log(x^3)\}}$$

[2] Obtenga el **conjunto solución** del sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \log x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 10^{12} \end{array} \right\}$$

[3] Calcule $\sin(4\alpha)$ sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ y que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

[4] Demuestre la siguiente identidad trigonométrica :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta) = \sin^2 \beta.$$

[5] Determine el **conjunto de soluciones básicas** de la ecuación trigonométrica :

$$\sqrt{2} \cos x = \cot x.$$

[6] Dos lados adyacentes de un paralelogramo forman un ángulo α y dichos lados tienen longitudes **a** y **b**. Determine las longitudes de las diagonales del paralelogramo. (Considere que la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es de 2π [rad]).

£££££ §§§ £££££

PRUEBA GLOBAL N° 3

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

[1] Demuestre que el número complejo $w = 1 - i$ satisface la ecuación:

$$w^2 - 2w + 2 = 0$$

[2] Si $z = x + iy$ obtenga las **partes real e imaginaria** del número complejo:

$$\alpha = \frac{z-1}{z+1}$$

[3] Sea z un número complejo de módulo 1, o sea, $|z| = 1$. Calcule:

$$\beta = |z + 1|^2 + |z - 1|^2$$

- [4] Determine la forma polar (trigonométrica) del siguiente número complejo:

$$z = \frac{i}{-2-2i}$$

- [5] Sea $w = -8i$, exprese en la **forma canónica (binomial)** las raíces cúbicas de w .

- [6] Resuelva la ecuación $z^2 + i = 0$ y use su respuesta para resolver la ecuación $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$.

£££££ §§§ £££££

PRUEBA GLOBAL N° 4

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

[1] Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 12x^3 + 55x^2 - 114x + 90$, se sabe que el polinomio es divisible por $x - 3$. Escriba $P(x)$ como producto de factores.

[2] Determinar el valor de las constantes "**p**" y "**q**" si cuando el polinomio cuártico $s(x) = x^4 + px^3 + qx^2 - 18x - 12$ se divide por $(x + 1)(x + 3)$ el resto es $2x + 3$.

[3] Determinar un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales, de grado tres, de modo que $3i$ y 4 sean ceros de $P(x)$ y que además $P(-1) = 50$.

[4] Descomponer en fracciones parciales la expresión $\frac{2x^3+3x+6}{x^3+2x^2+9}$.

[5] Demostrar, utilizando inducción matemática la siguiente proposición:

$$P(n): n^2 + n \text{ es divisible por } 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[6] Calcular:

(6.1) $\sum_{j=7}^{2427} (5-j)^2$, sabiendo que.

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}n(n+1); \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(6.2) $\prod_{k=1}^3 \sum_{i=0}^{60} 5^{-k}$.

£££££ §§§ £££££

EXAMEN

INSTRUCCIONES: (1) El examen que usted lee en este momento consiste en **10 (diez)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder **cada una** de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración del examen : **180** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en este examen, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS :

[1] Dado $(\mathbb{Z}, \circ, *)$ donde las operaciones binarias internas están definidas por:

$$\boxed{b \circ a := a + b} \quad \text{y} \quad \boxed{u * v := uv + 1}$$

Determine (justificando adecuadamente) si la operación $*$ distribuye a la operación \circ .

[2] Resuelva la siguiente inecuación: $|2x - |x|| \leq 1$. Escriba la solución como intervalo o como unión y/o intersección de intervalos.

[3] Explícite el **conjunto solución** del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 6^{y+1} = 2^x \\ 4^x - 3^{y-1} = 0 \end{cases} .$$

[4] Resuelva en $] - \pi, 3\pi/2]$ de la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\boxed{\cos x - \cos(2x) = 0}$$

- [5] Dos torres de control están ubicadas a una distancia de d [kms]. Desde la primera de ellas con rumbo α^{rad} se localiza un incendio. A partir de la segunda torre, el incendio se observa con rumbo β^{rad} . Calcule la distancia desde la primera torre al incendio.

- [6] Compruebe aplicando el Teorema de De Moivre que:

$$\boxed{\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(-2+2i)^4} = \frac{1}{8}}$$

- [7] Dado el polinomio $\boxed{P(x) = 2x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 10x - 4}$

determine **todos** sus ceros y escriba la correspondiente factorización.

- [8] Dada la función racional:

$$\boxed{G(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 1}{(x^4 - 16)}}$$

obtenga su descomposición en fracciones parciales (**debe** calcular las constantes).

- [9] Demuestre por inducción que para todo entero positivo n se cumple que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

- [10] Deduzca una fórmula para las siguiente suma:

$$\sum_{k=2}^{n+2} (k-1)^4 - \sum_{k=1}^n k^4$$

Resultados: Jueves 21 de diciembre de 2000 a las 11:30 horas en sala 23

PRUEBA GLOBAL N° 1

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

(4) ¡QUE LA FUERZA LOS ACOMPAÑE!

PREGUNTAS:

[1] Considere la función $f: \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$

$$n \quad f(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

(1.1) Calcule $A = \frac{1}{4}f(2) + \frac{3}{4}f(f(3) + 2f(10))$.

(1.2) ¿ f es una función inyectiva? **Justifique.**

[2] Dados $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \sqrt[3]{a}, a \in \mathbb{Z}\}$ y la operación \star definida como:

$$\sqrt[3]{u} \star \sqrt[3]{v} := \sqrt[3]{u+v}.$$

Determine si (S, \star) tiene la estructura de grupo.

- [3] Sea (T, Δ) un grupo **abeliano**. Dados $a, b, d \in T$, calcule un $x \in T$ tal que sea solución de la ecuación:

$$a \Delta x \Delta b \Delta x = x \Delta d.$$

Fundamente cada paso y **haga** la comprobación.

- [4] Considere $(\mathbb{Q} - \{0\}, \circ, *)$ donde las operaciones binarias internas \circ y $*$ están definidas por:

$$a \circ b := ba \quad \text{y} \quad a * b := a + b + 2$$

Indique (justificando) **una** propiedad de cuerpo que **no** se cumpla.

- [5] Demuestre la siguiente identidad en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Señale **explícitamente** cada propiedad o teorema que haya utilizado.

- [6] Dados los números reales **no** nulos $a, b, y c$, deduzca la siguiente igualdad:

$$\frac{a^{-1}}{c} + \frac{b^{-1}}{c} = \frac{c^{-1}(a+b)}{ab}.$$

Justifique cada aserto.

rrrrrrrrrr † † † rrrrrrrrrr

PRUEBA GLOBAL N° 2

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

[1] Sabiendo que $60 \leq F \leq 80$, use las propiedades de las desigualdades para determinar el intervalo de variación de C si se cumple $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

[2] Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, considere $a > b$. Demuestre que:

$$a^3 + b^3 > a^2b + b^2a.$$

[3] Dado el conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} / x = 11 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x \in \mathbb{N} / x^3 < 1000\}$ determine en caso que exista: $\min(A)$, $\max(A)$, $\inf(A)$, $\sup(A)$. **Justifique** su respuesta

- [4] Si $\text{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ con α en el segundo cuadrante y $\text{sen}\beta = \frac{2}{5}$ con β en el primer cuadrante. **Calcule el valor exacto** de la expresión:

$$\text{sen}(\alpha - \beta).$$

- [5] **Demuestre** la siguiente identidad trigonométrica:

$$\boxed{\frac{1}{1-\text{sen}\gamma} + \frac{1}{1+\text{sen}\gamma} = 2\text{sec}^2\gamma}.$$

- [6] Dada la ecuación trigonométrica:

$$\boxed{\text{cotg}^2x - 3\text{cosec}x + 3 = 0}$$

determine su **conjunto solución** en $[0, 2\pi[$.

rrrrrrrrrr † † † rrrrrrrrrr

En las preguntas [4] a [6] para cada una de las inecuaciones planteadas escriba el correspondiente conjunto solución como intervalo o como unión y/o intersección de intervalos.

[4] $\frac{-3x+1}{\sqrt{2-x^2}} \geq 0.$

[5] $|x - 3| - |x| < 12.$

[6] $\frac{(x^2-5x+6)}{(x^2-7x+12)} < \frac{(x+4)}{(x+3)}.$

rrrrrrrrrr † † † rrrrrrrrrr

PRUEBA GLOBAL N° 3

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

En los problemas [1] y [2] **resuelva** la correspondiente ecuación. En **cada caso verifique** la(s) solución(es) y **escriba el conjunto solución**.

[1]
$$\frac{8(5x^2+x)}{4(x+1)} = 1.$$

[2]
$$\frac{\log(1+\sqrt{x+1})}{\log(\sqrt[3]{x-40})} = 3.$$

[3] **Determine y verifique el conjunto solución** del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 2^{2x} + 2^{2y} = 20 \\ 2^{x+y} = 8 \end{array} \quad \Bigg|$$

PRUEBA GLOBAL N° 1'

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

(4) ¡QUE LA FUERZA LOS ACOMPAÑE!

PREGUNTAS:

[1] (1.1) Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. Escriba una relación de A en B que tenga **4** elementos.

(1.2) Considere la función $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$n \quad \rightarrow \quad f(n) := \begin{cases} k & \text{si } n = 2k \\ 2k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Calcule $A = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} f(3f(14) + 4)$.

[2] Sea $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y se define en S la ley de composición interna $\#$ como:

$$\begin{aligned} \# : S \times S &\longrightarrow S \\ ((a, b), (x, y)) &\rightarrow (a, b) \# (x, y) := (a + x, by) \end{aligned}$$

Determine si $(S, \#)$ es un grupo. **Justifique.**

[3] Sea $(\mathbf{T}, *)$ un grupo **abeliano**. Demuestre que para todos $a, b \in \mathbf{T}$ se satisface

$$(a*b)^{-1} = (b^{-1})*(a^{-1}).$$

[4] Se definen en \mathbb{Z} las leyes de composición interna: $*$ y \circ respectivamente por

$$a*b := a + b + 2 \quad \text{y} \quad a \circ b := ab + 2a + 2b + 2.$$

¿La operación \circ distribuye a la operación $*$?

[5] Resuelva en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la siguiente ecuación, **fundamentando** cuidadosamente cada paso

$$(x + 2)(1 - x) = (3 - 2x)(x + 2).$$

[6] Dados w un número real y a, b números reales no nulos tales que $a \neq b$. Deduzca la siguiente igualdad

$$\frac{w/a}{1/b} = \frac{wb}{a}.$$

Justifique cada aserto.

rrrrrrrrrr † † † rrrrrrrrrr

PRUEBA GLOBAL N° 2'

INSTRUCCIONES: (1) La prueba que usted lee en este momento consiste en **6 (seis)** preguntas, todas ellas del mismo valor relativo o porcentual. En cada pregunta usted deberá argumentar matemáticamente; su desarrollo será evaluado atendiendo a los siguientes conceptos: (a) corrección matemática, (b) creatividad y originalidad, (c) presentación, orden, legibilidad, claridad, precisión.

(2) Coloque su nombre en **cada una** de las hojas y procure responder cada una de las preguntas que se le formulan.

(3) Duración de la prueba: **90** minutos. Esto es más que suficiente para resolver todas las tareas planteadas en esta prueba, de modo que trabaje acuciosamente y con calma.

PREGUNTAS:

[1] De acuerdo a la ley de Hooke, la fuerza F requerida para estirar un resorte x unidades de longitud más allá de su largo natural, está dada por $F = 4.5x$. ¿Si $10 \leq F \leq 18$, cuáles son los correspondientes valores de x ?

[2] Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, demuestre que

$$bc(b + c) + ab(a + b) + ac(a + c) \geq 6abc.$$

[3] Dado el conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = 3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cap \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 8\}$

(3.1) Determine 3 cotas superiores y 3 cotas inferiores del conjunto A .

(3.2) Decida fundamentadamente, si A tiene supremo e ínfimo.

En las preguntas [4] a [6] para cada una de las inecuaciones planteadas escriba el correspondiente conjunto solución como intervalo o como unión y /o intersección de intervalos.

[4] $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}} \leq x.$

[5] $\left| 2 - \frac{x}{(x+1)} \right| > 6.$

[6] $\frac{x^2+3x+4}{x+3} < 2.$



Apéndice A

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

En los Problemas de Aplicación de la Trigonometría es conveniente tener presente lo siguiente:

- (a) Mediante la utilización del *Teorema del Coseno* es posible determinar:
- La longitud de un lado de un triángulo conociendo las longitudes de los otros dos y la medida del ángulo comprendido por estos últimos o
 - Los ángulos conociendo los tres lados.
- (b) Mediante la utilización del *Teorema del Seno* es posible determinar:
- La longitud de un lado de un triángulo conociendo el ángulo opuesto y otro par lado-ángulo opuesto o
 - La medida de un ángulo de un triángulo conociendo el lado opuesto y otro par lado-ángulo opuesto.

De los **Teoremas de Congruencia** de triángulos en geometría plana elemental, sabemos que un triángulo dado *queda completamente determinado* si se conoce uno de los siguientes conjuntos de datos:

- (1) Un lado y dos ángulos.
- (2) Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.
- (3) Dos lados y el ángulo comprendido.
- (4) Los tres lados.

REMARK: Luego, los Teoremas del Seno (casos (1) y (2)) y del Coseno (casos (3) y (4)) debieran bastarnos para **resolver** cualquier triángulo bien determinado.

Apéndice B

Las principales propiedades de la parte real, parte imaginaria, conjugado y módulo de un número complejo se dan en el siguiente

TEOREMA 6 : Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

$$(6.1) \quad \overline{\overline{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$(6.2) \quad \overline{\overline{z}} = z$$

$$(6.3) \quad z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}z$$

$$(6.3') \quad z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}z$$

$$(6.4) \quad \operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}z + \operatorname{Re}w$$

$$(6.4') \quad \operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}z + \operatorname{Im}w$$

$$(6.5) \quad \overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$(6.5') \quad \overline{(z - w)} = \overline{z} - \overline{w}$$

$$(6.6) \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$(6.7) \quad \overline{z/w} = \overline{z/w}, \quad w \neq 0$$

$$(6.8) \quad |z| = \left| \overline{z} \right|$$

$$(6.9) \quad z\overline{z} = |z|^2 = \left| \overline{z} \right|^2$$

$$(6.10) \quad |zw| = |z| \cdot |w|$$

$$(6.11) \quad |z/w| = |z| / |w|, \quad w \neq 0$$

$$(6.12) \quad \left| \operatorname{Re}(\overline{zw}) \right| \leq |z| \cdot |w|$$

(Desigualdad de Schwarz)

$$(6.13) \quad |z + w| \leq |z| + |w|$$

(Desigualdad triangular)

$$(6.14) \quad \left| |z| - |w| \right| \leq |z - w|$$

Apéndice C

RAÍCES DE UN NÚMERO COMPLEJO.

DEF.1 : Sea $w \in \mathbb{C}$ dado. Llamaremos **raíz n-ésima de w**, a todo número complejo z tal que

$$\boxed{z^n = w}$$

OBS. 1 : Si $w = 0$ entonces tiene una única raíz n-ésima, a saber $z = 0$.

En el caso general suponga que

$$\begin{aligned} w = r \operatorname{cis} \theta \neq 0 & \quad \text{y} \quad z = s \operatorname{cis} \varphi \\ z^n = s^n \operatorname{cis} n\varphi = r \operatorname{cis} \theta & \quad \text{ó equivalentemente} \\ s^n \cos(n\varphi) + i s^n \operatorname{sen}(n\varphi) & = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

luego por igualdad de números complejos

$$\begin{cases} s^n \cos(n\varphi) = r \cos \theta \\ s^n \operatorname{sen}(n\varphi) = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro tenemos

$$s^{2n} = r^2 \Rightarrow \boxed{s = \sqrt[n]{r}}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} \cos(n\varphi) - \cos \theta = 0 & \quad \Leftrightarrow \quad 2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\varphi + \theta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\varphi - \theta}{2} \right) = 0 \\ \Rightarrow n\varphi - \theta = 2k\pi ; \quad k \in \mathbb{Z}^* & \quad \therefore \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}^* \end{aligned}$$

pero notemos que sólo para $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ obtenemos valores de φ en los cuales $\cos \varphi$ ($\operatorname{sen} \varphi$) son diferentes.

Por lo tanto

$$w_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

son las ***n-raíces n-ésimas de w.***

Los siguientes hechos se verifican por simple inspección.

(a) $|w_k| = \sqrt[n]{r}$ para $k = 0, 1, \dots, (n-1)$.

(todas las raíces tienen el mismo módulo).

(b) $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \frac{(\theta+2(k+1)\pi)}{n} - \frac{(\theta+2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n}$

para $k = 0, 1, \dots, (n-1)$.

(La diferencia entre los argumentos de dos raíces consecutivas es constante).

DEF. 2 (EULER) : Si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

TEOREMA 1: Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

OBS. 2 : (1) $z = |z|e^{i\theta}$ (2) $z^n = r^n e^{in\theta}$.



Apéndice D

División Sintética o Método de Hörner.

Este método de gran ayuda poder dividir rápida y efectivamente un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $b(x) = (x - r)$. El método (algoritmo) que se presenta a continuación se llama *división sintética* (método de Hörner o regla de Ruffini).

Pasos del Método.

- [1] Ordenar los coeficientes del dividendo $p(x)$ en orden de potencias decrecientes de x (si alguna potencia de x **no** aparece le corresponde un 0 como coeficiente), tales números se ubican en la primera fila.
- [2] Consideremos el divisor de la forma $(x - r)$. Las filas 2 y 3 se construyen del siguiente modo. Se baja a la tercera fila el primer coeficiente del dividendo, se multiplica éste por r y el producto se suma al segundo coeficiente del dividendo, colocando el resultado en la tercera fila. Luego se multiplica esta suma por r y este producto se suma al tercer coeficiente del dividendo, anotando de nuevo el resultado en la tercera fila. Se repite el proceso hasta que se suma un producto al término constante del dividendo, escribiendo también el resultado en la tercera fila.
- [3] Este último número de la tercera fila es el resto, los demás números son los coeficientes del cociente, que es un grado menor que el dividendo.

Ejemplo: Determine el cociente y el resto que resultan de dividir el polinomio $p(x) = 4x^5 - 30x^3 - 50x - 2$ por el polinomio $b(x) = (x + 3)$.

Desarrollo: Como $b(x) = x + 3 = x - (-3)$ se tiene que $r = -3$.

	4	0	-30	0	-50	-2
-3	↓	-12	36	-18	54	-12
	4	-12	6	-18	4	-14

luego el resto es $r(x) = -14$ y el cociente $q(x) = 4x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 18x + 4$.

Apéndice E

FRACCIONES PARCIALES

DEF.: Se llama **función racional** a toda expresión del tipo

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

en donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales, y $\text{gr}(q(x)) \geq 1$.

NOTA: Si el grado del polinomio $p(x)$ es **mayor o igual** al grado del polinomio $q(x)$, entonces el Algoritmo de la División nos dice que existen polinomios $s(x)$ y $r(x)$ tales que como se sabe $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, con $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(q(x))$ o $r(x) = 0$. Por lo tanto

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)s(x)+r(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} .$$

Luego el "problema" de una función racional arbitraria $F(x)$, se ha reducido al de las "funciones racionales **propias**", es decir, en donde el grado del numerador es **menor que** el grado del denominador.

Con el fin de expandir este tipo de funciones en unidades "elementales", usaremos los siguientes resultados:

TEOREMA 1: Todo polinomio $q(x)$, con $\text{gr}(q(x)) \geq 1$, puede ser siempre factorizado usando factores lineales o cuadráticos irreducibles del modo siguiente:

$$q(x) = a(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x - \alpha_r)^{n_r} \dots \dots \dots \cdot (x^2 + a_1x + b_1)^{m_1} \dots (x^2 + a_sx + b_s)^{m_s}$$

en donde los factores $(x^2 + a_jx + b_j)$ **son tales que** $\Delta_j = a_j^2 - 4b_j < 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$).

TEOREMA 2: Si el polinomio $q(x)$ de grado no nulo, se factoriza de acuerdo al Teorema 1, entonces la función racional propia $\frac{p(x)}{q(x)}$ puede ser escrita como una suma de fracciones, en donde cada factor $(x - \alpha_i)^{n_i}$ y cada factor irreducible $(x^2 + a_i x + b_i)^{m_i}$ dan origen, respectivamente, a las siguientes fracciones parciales

$$\frac{A}{(x - \alpha_i)^k} \qquad \frac{Bx + C}{(x^2 + a_i x + b_i)^j}$$

en donde $k = 1, 2, \dots, n_i$; $j = 1, 2, \dots, m_i$.

CASO 1. El denominador es un producto de factores lineales y distintos; vale decir

$$q(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_r).$$

En este caso, la descomposición en fracciones parciales garantizada por el Teorema 2 es de la siguiente forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha_r)}.$$

CASO 2. El denominador es del tipo

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}.$$

En este caso, **cada** factor $(x - \alpha_i)^{n_i}$, da origen a n_i fracciones parciales del tipo

$$\frac{A_i}{(x-\alpha_i)^k} \quad k = 1, 2, \dots, n_i.$$

CASO 3. El denominador contiene factores cuadráticos irreducibles, sin repetición, vale decir $q(x)$ es de la forma

$$q(x) = a(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_r)^{n_r}(x^2 + a_1x + b_1) \cdots (x^2 + a_sx + b_s).$$

En este caso, rige la misma descomposición que en el caso 2, agregándole la siguiente suma

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+a_1x+b_1)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+a_2x+b_2)} + \cdots + \frac{B_sx+C_r}{(x^2+a_sx+b_s)}.$$

CASO 4. Este es el caso general establecido en el Teorema 2. Aquí cada factor $(x - \alpha)^n$ y cada factor irreducible $(x^2 + ax + b)^m$ da origen a n y m fracciones parciales respectivamente.

FUNCIÓN EXPONENCIAL - FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1)	$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$	$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}; \forall x, y \in \mathbb{R}$
2)	$a^x / a^y = a^{x-y};$	$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}; \forall x, y \in \mathbb{R}$
3)	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x;$	$a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}; \forall x \in \mathbb{R}$
4)	$a^x / b^x = (a/b)^x;$	$a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}; \forall x \in \mathbb{R}$
5)	$(a^x)^y = a^{xy};$	$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}; \forall x, y \in \mathbb{R}$
6)	$x = \log_b y \Leftrightarrow b^x = y;$	$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}$
7)	$b^{\log_b u} = u;$	$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall u \in \mathbb{R}^+$
8)	$\log_b b^v = v;$	$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall v \in \mathbb{R}$
9)	$\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N;$	$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall M, N \in \mathbb{R}^+$
10)	$\log_b (M/N) = \log_b M - \log_b N;$	$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall M, N \in \mathbb{R}^+$
11)	$\log_b (M^p) = p(\log_b M);$	$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall M \in \mathbb{R}^+, \forall p \in \mathbb{R}$
12)	$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a};$	$a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall N \in \mathbb{R}^+$

TRIGONOMETRÍA

I.

Valores de $\text{sen}\alpha$ y $\text{cos}\alpha$, si $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

α [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\text{cos}\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

II.-

Valores de $\text{sen}\alpha$ y $\text{cos}\alpha$, respecto a P_α

Si $P_\alpha \in 1^{\text{er}}$ cuadrante	entonces $\text{sen}\alpha > 0$ y $\text{cos}\alpha > 0$
Si $P_\alpha \in 2^{\text{do}}$ cuadrante	entonces $\text{sen}\alpha > 0$ y $\text{cos}\alpha < 0$
Si $P_\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuadrante	entonces $\text{sen}\alpha < 0$ y $\text{cos}\alpha < 0$
Si $P_\alpha \in 4^{\text{to}}$ cuadrante	entonces $\text{sen}\alpha < 0$ y $\text{cos}\alpha > 0$

III.-

Funciones pares e impares

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$	La función seno es una función impar
$\text{cos}(-\alpha) = \text{cos}\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$	La función coseno es una función par

IV.-

Identidades Trigonómicas

$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$
$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \operatorname{sec}^2\alpha$
$\operatorname{cotg}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
$\left \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$
$\left \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$
$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$
$\operatorname{sen}\beta\cos\alpha = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$
$\operatorname{sen}u + \operatorname{sen}v = 2\operatorname{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$
$\operatorname{sen}u - \operatorname{sen}v = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u-v}{2}\right)$
$\cosu + \cosv = 2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$
$\cosu - \cosv = -2\operatorname{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u-v}{2}\right)$