Capítulo 3

Sucesiones de números reales

Como libros de referencia para los temas de este capítulo, aunque haya algunas diferencias de detalle entre su tratamiento y el nuestro, pueden consultarse [Bartle-Sherbert] (especialmente sus comentarios sobre algunos conceptos) y [Ross], algo más conciso pero igualmente claro.

3.1. Sucesiones de números reales

3.1.1. Definición de sucesión. Sucesiones acotadas y sucesiones convergentes. Límite de una sucesión convergente

Informalmente, una sucesión de números reales es una "lista ilimitada" de números

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_n, \ldots$$

(n indica el 'lugar' que ocupa el número s_n en la lista); puesto en forma de tabla

lugar	1	2	3	4	5	...	n	...
valor	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	...	s_n	...

es obvio que se trata justamente de una función real con dominio $\mathbb{N}$. Esta es su definición formal.

Definiciones 3.1.1. *Una sucesión de elementos de un conjunto es una aplicación con dominio $\mathbb{N}$ y codominio dicho conjunto. En particular, una* ***sucesión de números reales*** *es una función real con dominio $\mathbb{N}$, o sea, una aplicación $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Tradicionalmente, el valor que una sucesión s toma en cada $n \in \mathbb{N}$ se denota por s_n, en lugar de $s(n)$ como para las demás funciones. Normalmente nos referiremos a s_n con el nombre de ***término n-ésimo de una sucesión****, pero no debe perderse de vista que cada término lleva una* ***doble*** *información: su valor y el 'lugar n que ocupa'.*

Como el dominio $\mathbb{N}$ es común a todas las sucesiones, en vez de utilizar la notación $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ para una sucesión es más frecuente encontrar notaciones del tipo $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ó $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ó $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ o alguna similar, poniendo mayor énfasis en los términos. Aunque esta notación propicie a veces la confusión, no debería ser necesario insistir en la diferencia entre la propia sucesión y *el conjunto de valores* que toma la sucesión, que es la misma que hay entre cualquier función y su conjunto de valores (conjunto imagen o rango); obsérvese, por ejemplo, que una sucesión tiene siempre *infinitos términos* incluso aunque tome un solo valor, como es el caso de las sucesiones constantes.

Ejemplos. Los ejemplos más 'corrientes' de sucesiones se especifican dando una fórmula que defina el término n-ésimo, como en los siguientes casos:

- $s_n = a$, donde a es un número real prefijado (**sucesión constante**); la sucesión consta de los términos

$$a, a, a, \ldots, a, \ldots$$

- $s_n = n$ (**sucesión de los números naturales**); la sucesión consta de los términos

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$$

- $s_n = \frac{1}{n}$; la sucesión consta de los términos

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

- $s_n = (-1)^n$; la sucesión consta de los términos

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

- Las fórmulas no tienen por qué referirse solo a operaciones algebraicas sencillas. Por ejemplo, considérese la sucesión

$$3,1;\ 3,14;\ 3,141;\ 3,1415;\ 3,14159;\ 3,141592;\ 3,1415926;\ 3,14159265;\ 3,141592653;\ \ldots$$

formada por las aproximaciones decimales de π (el término n-ésimo sería la aproximación decimal con n cifras decimales exactas). Aunque no supiésemos escribir con todas sus cifras el término 1000000000000000, sabemos que tal término está perfectamente definido, y lo mismo podemos decir de cualquier otro. En este caso podemos dar una fórmula explícita para el término n-ésimo con ayuda de la función *parte entera*: concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = 3 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde $a_k = [10^k \pi] - 10[10^{k-1}\pi]$ $(1 \leq k \leq n)$; el hecho de que esta fórmula no proporcione un algoritmo de cálculo para los a_k no obsta para que éstos estén definidos sin ambigüedad y sin excepción alguna.

- ***Sucesiones recurrentes***. Reciben este nombre las sucesiones cuyos términos se definen en función de los anteriores (definición *inductiva* o *recursiva*). Un ejemplo muy citado de este tipo es la **sucesión de Fibonacci**, dada por

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1,\ s_{n+2} = s_{n+1} + s_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

cuyos primeros términos son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Las sucesiones definidas por recurrencia aparecen con frecuencia en cálculos con ordenadores: ver comentario en [Bartle-Sherbert, pág. 85].

Otros ejemplos de sucesiones recurrentes son las *progresiones aritméticas* de primer término x y razón h, que pueden definirse recursivamente por

$$s_1 = x, \quad s_{n+1} = s_n + h,$$

y las *progresiones geométricas* de primer término x y razón r, dadas por

$$s_1 = x, \quad s_{n+1} = s_n \cdot r.$$

Se encuentran sin dificultad fórmulas explícitas en ambos casos: $s_n = x + (n-1)\,h$ para las primeras, $s_n = x \cdot r^{n-1}$ para las segundas.

- La regla que define una sucesión no tiene por qué ser de carácter 'estrictamente matemático'. Por ejemplo, puede definirse una sucesión poniendo

$$s_n = \begin{cases} 10^7/3 & \text{si el nombre en castellano del número } n \text{ contiene la letra d} \\ \sqrt{\pi} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(¿cuáles serían sus primeros términos?), o mediante cualquier otra condición que permita asegurar que a cada $n \in \mathbb{N}$ sin excepción se le asocia inequívocamente un número real perfectamente definido.

- Existen sucesiones cuyo rango es *exactamente* $\mathbb{Z}$. Más difícil: existen sucesiones cuyo rango es *exactamente* $\mathbb{Q}$ (la construcción usual se hace mediante el *proceso diagonal de Cantor*: ver [Bartle-Sherbert, págs. 36–37], [Spivak, pág. 609]). Las llamaremos *enumeraciones de* $\mathbb{Q}$, es decir: una ***enumeración de*** $\mathbb{Q}$ es una sucesión cuyo rango es *exactamente* $\mathbb{Q}$.

- ¿Queda definida una sucesión si para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos

$$s_n = \text{máx}\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2nx - 1 < 0\}?$$

¿Y si ponemos

$$s_n = \text{máx}\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2nx - 1 \leq 0\}?$$

En caso afirmativo, ¿puede darse una expresión más directa para s_n?

Notación. Para mayor comodidad de escritura, a menudo se denotan las sucesiones simplemente por (s_n) en vez de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ó $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ si esto no da lugar a imprecisiones.

Definición 3.1.2. *Una sucesión (s_n) es* ***convergente*** *si existe un número real a tal que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número natural $N = N(\varepsilon)$ de modo que siempre que $n > N$ se verifique $|s_n - a| < \varepsilon$.*

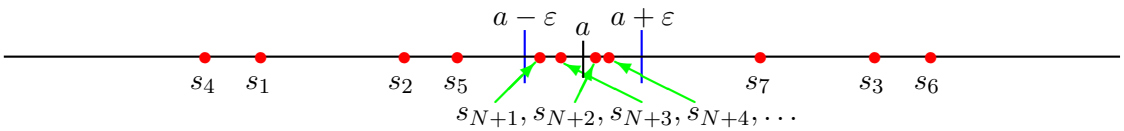
Se dice entonces que el número a es ***límite*** *de la sucesión (s_n), y se escribe $a = \lim_n s_n$. También diremos que (s_n) converge a a.*

Usaremos a veces la fórmula $s_n \to a$ como expresión abreviada de *la sucesión de término n-ésimo s_n es convergente y tiene por límite a.*

Nota. Recuérdese que la desigualdad $|s_n - a| < \varepsilon$ es equivalente a las dos desigualdades $-\varepsilon < s_n - a < \varepsilon$, que equivalen a su vez a las desigualdades

$$a - \varepsilon < s_n < a + \varepsilon,$$

lo que permite reformular la definición anterior de manera evidente.



Ejemplos (sucesiones convergentes). a) Las sucesiones constantes convergen al número real igual a todos sus términos.

b) La sucesión $(1/n)$ converge a 0 (consecuencia de la propiedad arquimediana).

Ejemplos (sucesiones no convergentes). a) La sucesión $((-1)^n)$ no es convergente (si tuviese límite a, no puede ser $a = 1$ puesto que entonces eligiendo $\varepsilon = 2 > 0$, cualquiera que fuese N bastaría tomar $n = 2N + 1 > N$ para conseguir que $|s_n - a| = |-1-1| = 2 \not< \varepsilon$; y si $a \neq 1$, eligiendo ahora $\varepsilon = |1 - a| > 0$, cualquiera que fuese N bastaría tomar $n = 2N > N$ para conseguir que $|s_n - a| = |1 - a| \not< \varepsilon = |1 - a|$).

b) La sucesión (n) no puede ser convergente, pues si tuviese límite a, tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia, para algún N habría de ser $n < a + 1$ siempre que n fuese mayor que N, lo cual es imposible (consecuencia una vez más de la propiedad arquimediana).

Proposición 3.1.3. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Dada una sucesión (s_n), son equivalentes entre sí:*

a) (s_n) es convergente con límite a; abreviadamente, $a = \lim_n s_n$ o $s_n \to a$.

b) siempre que $a' < a$, existe un n' tal que para todo $n > n'$ es $s_n > a'$
y
siempre que $a'' > a$, existe un n'' tal que para todo $n > n''$ es $s_n < a''$.

c) si a', a'' son números reales tales que $a \in (a', a'')$, existe entonces un N tal que para todo $n > N$ es $s_n \in (a', a'')$.

Demostración. a) $\Longrightarrow$ b) Dado $a' < a$, tomando $\varepsilon = a - a' > 0$ existirá por hipótesis un N tal que si $n > N$ entonces $s_n > a - \varepsilon = a - (a - a') = a'$. Para $a < a''$ se razona de manera similar.
b) $\Longrightarrow$ c) Basta observar que $x \in (a', a'')$ significa que $a' < x < a''$. Por consiguiente, si $a \in (a', a'')$ existen n' y n'' tales que para todo $n > n'$ es $s_n > a'$ y para todo $n > n''$ es $s_n < a''$. Tomando ahora $N = \max\{n', n''\}$, siempre que $n > N$ es simultáneamente $n > n'$ y $n > n''$, luego para todo $n > N$ será $a' < s_n < a''$ o, equivalentemente, $s_n \in (a', a'')$.
c) $\Longrightarrow$ a) Si $\varepsilon > 0$, se tendrá $a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, por lo que debe existir un N tal que para todo $n > N$ es $s_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, o lo que es lo mismo, $|s_n - a| < \varepsilon$. □

Corolario 3.1.4. *Sea (s_n) una sucesión convergente con límite a y sea $c \in \mathbb{R}$. Se tiene:*

a) Si existe m tal que para todo $n > m$ es $s_n \geq c$, entonces $a \geq c$.

b) Si existe m tal que para todo $n > m$ es $s_n \leq c$, entonces $a \leq c$.

Demostración. Se prueba por reducción al absurdo aplicando la proposición anterior (hacerlo). □

¿Es cierto el corolario con desigualdades estrictas?

Corolario 3.1.5 (unicidad del límite de una sucesión convergente). *Sea (s_n) una sucesión convergente y sean a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $a = \lim_n s_n$, $b = \lim_n s_n$. Entonces $a = b$.*

Demostración. Si no, sea, por ejemplo, $a < b$. Tomando c tal que $a < c < b$, puesto que $c < b$ y b es límite de (s_n), debe existir un n' tal que para todo $n > n'$ sea $s_n > c$; igualmente, puesto que $a < c$ y a es límite de (s_n), debe existir un n'' tal que para todo $n > n''$ es $s_n < c$; tomando $n = \max\{n', n''\}$ llegamos a una contradicción: tendría que cumplirse $c < s_n < c$. □

El límite de una sucesión *convergente* es así *el único* número real al que la sucesión converge.

Las definiciones de acotación de sucesiones se obtienen particularizando a sucesiones las que dimos sobre acotación de funciones.

Definición 3.1.6. *Una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ se dice que está acotada superiormente si existe algún número $C \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq C$.*

Se dice que está acotada inferiormente si existe algún número $K \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $K \leq s_n$.

Se dice que está acotada si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a que exista un número $M \geq 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq M$.

Proposición 3.1.7. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Ver [Bartle-Sherbert, pág. 94, Teorema 3.2.2]. □

Aplicación. Dado $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > 1$, la sucesión que tiene por término n-ésimo x^n no es convergente. En efecto: si ponemos $h = |x| - 1$, entonces $|x^n| = |x|^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$, según la desigualdad de Bernoulli. De aquí se deduce que la sucesión no está acotada.

Tampoco es convergente la sucesión de término n-ésimo $s_n = n$.

3.1.2. Sucesiones monótonas

Las definiciones sobre monotonía de sucesiones se obtienen particularizando a sucesiones las que dimos sobre monotonía de funciones. Esto equivale a lo siguiente:

Definición 3.1.8. *a) Una sucesión (s_n) es monótona no decreciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $s_n \leq s_{n+1}$.*

b) Una sucesión (s_n) es monótona no creciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $s_n \geq s_{n+1}$.

c) Una sucesión (s_n) es estrictamente creciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $s_n < s_{n+1}$.

d) Una sucesión (s_n) es estrictamente decreciente si y solo si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $s_n > s_{n+1}$.

e) Una sucesión se dice que es monótona si es de alguno de los tipos anteriores.

Proposición 3.1.9. *a) Sea (s_n) una sucesión monótona no decreciente. Entonces (s_n) es convergente si y solo si está acotada superiormente, en cuyo caso*

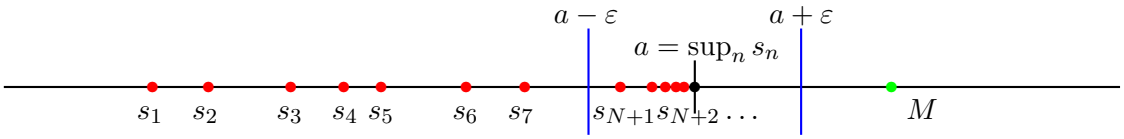
$$\lim_n s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

b) Sea (s_n) una sucesión monótona no creciente. Entonces (s_n) es convergente si y solo si está acotada inferiormente, en cuyo caso

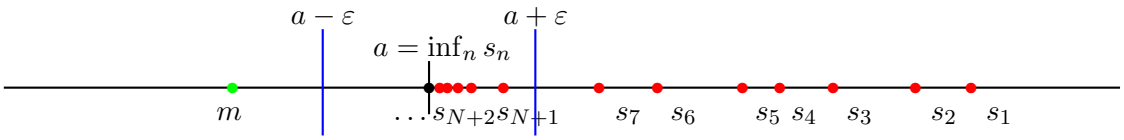
$$\lim_n s_n = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Es consecuencia directa de las definiciones. □

Gráficamente, para sucesiones no decrecientes:



Y para sucesiones no crecientes:



Ejemplo (el número e). La sucesión de término n-ésimo

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es estrictamente creciente y acotada superiormente por 3. Lo primero puede probarse mediante la desigualdad de Bernoulli observando que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\frac{n}{n+1}} = \frac{[n(n+2)]^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$
$$> \frac{n+1}{n}\left(1 + (n+1)\frac{-1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Que 3 acota superiormente a la sucesión puede deducirse del siguiente resultado, que a su vez se demuestra por inducción: *Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $-1 \leq h \leq \frac{1}{n}$ se tiene $(1+h)^n \leq 1+nh+n^2h^2$* (ayuda: si $nh \leq 1$, también $n^2h^3 \leq nh^2$).

El límite de esta sucesión es el número e, base de los logaritmos neperianos y de la función exponencial ya presentados en el capítulo anterior.

Ejemplo. La sucesión (x^n) es monótona no decreciente y acotada si $x \in [0,1]$; veremos que su límite es 0 si $x \in [0,1)$ y 1 si $x = 1$. Cuando $x \in (1, +\infty)$, la sucesión (x^n) es estrictamente creciente y no acotada (para ver esto último, tómese $h = x - 1 > 0$ y aplíquese la desigualdad de Bernoulli a $x^n = (1+h)^n$ junto con la propiedad arquimediana).

Ejemplo. La sucesión de término n-ésimo $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ es estrictamente creciente y no acotada (ver [Bartle-Sherbert, pág. 105]).

Ejemplo. La sucesión de término n-ésimo $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ es estrictamente creciente (puesto que $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$) y acotada superiormente por 1 (obsérvese que $s_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \overset{(n)}{\cdots} + \frac{1}{n} = 1$).

De su límite, por el momento, solo podemos asegurar que está entre $s_1 = \frac{1}{2}$ y 1 (o entre $s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ y 1, o entre $s_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ y 1, etcétera). Más adelante podremos probar que su valor exacto es $\log 2$.

3.1.3. Operaciones con sucesiones

Proposición 3.1.10. *Sean (s_n), (t_n) sucesiones convergentes con límites*

$$a = \lim_n s_n, \qquad b = \lim_n t_n,$$

y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

a) $(s_n + t_n)$ es convergente y tiene límite $a + b$.

b) $(c \cdot s_n)$ es convergente y tiene límite $c \cdot a$.

Proposición 3.1.11. *Sean (s_n), (t_n) sucesiones convergentes con límites*

$$a = \lim_n s_n, \qquad b = \lim_n t_n.$$

Entonces $(s_n \cdot t_n)$ es convergente y tiene límite $a \cdot b$.

Ejemplo.

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

En general, aplicando reiteradamente el mismo argumento, $\frac{1}{n^p} \to 0$ cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.1.12. *Si (s_n) es una sucesión acotada y (t_n) es una sucesión convergente a 0, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ converge a 0.*

Ejemplo. La sucesión de término n-ésimo $\frac{(-1)^n}{n}$ converge a 0 (tómese en el enunciado anterior $s_n = (-1)^n$, $t_n = \frac{1}{n}$.)

Lema 3.1.13. *Sea (t_n) una sucesión convergente con límite $b \neq 0$. Fijado r de modo que $0 < r < |b|$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ se verifica*

$$|t_n| > r \qquad \textit{siempre que } n > m.$$

Precisando más: si $b > 0$, es

$$t_n > r \qquad \textit{siempre que } n > m$$

y si $b < 0$,

$$t_n < -r \qquad \textit{siempre que } n > m.$$

Proposición 3.1.14. *Sea (s_n) una sucesión convergente con límite a y (t_n) una sucesión convergente con límite $b \neq 0$. Si (u_n) es una sucesión tal que*

$$u_n = \frac{s_n}{t_n} \qquad \textit{siempre que } t_n \neq 0,$$

entonces (u_n) es convergente con límite a/b.

Corolario 3.1.15. *Sea (s_n) una sucesión convergente con límite a y (t_n) una sucesión convergente* ***sin términos nulos*** *y límite $b \neq 0$. Entonces la sucesión (s_n/t_n) es convergente y*

$$\lim_n \frac{s_n}{t_n} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplos. a) La sucesión de término n-ésimo

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

converge a $1/2$: basta observar que

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}\,(1+\frac{1}{n}).$$

b) La sucesión de término n-ésimo

$$\frac{1}{n}\Big[\big(a+\frac{1}{n}\big)^2 + \big(a+\frac{2}{n}\big)^2 + \cdots + \big(a+\frac{n-1}{n}\big)^2\Big]$$

converge a $a^2 + a + \frac{1}{3}$. (¿Por qué?)

c) Si (s_n) es una sucesión cuyos términos son todos no negativos, convergente y con límite a, entonces la sucesión $(\sqrt{s_n})$ es convergente con límite $\sqrt{a}$. En el caso $a = 0$, esto se deduce inmediatamente de la definición de límite; en el caso $a \neq 0$, se deduce de

$$\sqrt{s_n} - \sqrt{a} = \frac{s_n - a}{\sqrt{s_n} + \sqrt{a}}$$

y de que $(s_n - a)$ converge a 0, mientras que $1/(\sqrt{s_n} + \sqrt{a})$ está acotada:

$$0 < \frac{1}{\sqrt{s_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\ .$$

d) La sucesión de término n-ésimo

$$\frac{\sqrt{1+n}-1}{n}$$

converge a 0 (¿Por qué?).

e) La sucesión de término n-ésimo

$$\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$$

converge (¿a qué límite? ¿por qué?).

f) La sucesión de término n-ésimo

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

converge (¿a qué límite? ¿por qué?).

g) La sucesión (s_n) con

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

converge a 1 $\Big(\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Longrightarrow s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1\ \Big)$

3.1.4. Desigualdades y límites. Regla del sandwich

Proposición 3.1.16. *Dadas dos sucesiones* ***convergentes*** (s_n) *y* (t_n) *para las que existe un* m *tal que*

$$s_n \leq t_n \text{ siempre que } n > m,$$

se verifica

$$\lim_n s_n \leq \lim_n t_n.$$

Ahora podemos enunciar cómodamente una versión del *teorema de los intervalos encajados* de Cantor con una condición sencilla para que la intersección esté formada por un solo punto.

Teorema 3.1.17 (de Cantor de los intervalos encajados). *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, sea* $I_n = [a_n, b_n]$ *un intervalo cerrado (no vacío). Supongamos que para todo* n *se cumple* $I_{n+1} \subseteq I_n$*, es decir,*

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n,$$

y que ***además***

$$\lim_n (b_n - a_n) = 0.$$

Entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *se reduce a un punto; en concreto,*

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\},$$

donde

$$x = \lim_n a_n = \lim_n b_n.$$

Proposición 3.1.18 (regla del sandwich o de encajamiento). *Sean* (s_n)*,* (t_n) *y* (u_n) *sucesiones tales que existe un* $m \in \mathbb{N}$ *de manera que*

$$s_n \leq t_n \leq u_n$$

para todo $n > m$*. Si* (s_n) *y* (u_n) *son sucesiones convergentes con el mismo límite* a*,*

$$\lim_n s_n = \lim_n u_n = a,$$

entonces (t_n) *es también convergente con el mismo límite* a*,*

$$\lim_n t_n = a.$$

Ejemplos. a) Se verifica

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1,$$

pues podemos encajar la sucesión entre

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \text{y} \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

b) Encajando la sucesión de término n-ésimo

$$\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n}$$

entre

$$\frac{n+1}{n^2+n} + \frac{n+2}{n^2+n} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} = \frac{n\cdot n + (1+2+\cdots+n)}{n^2+n} = \frac{n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}$$

y

$$\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+1} = \frac{n\cdot n + (1+2+\cdots+n)}{n^2+1} = \frac{n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1},$$

podemos obtener que la sucesión dada converge a $\frac{3}{2}$.

3.1.5. Subsucesiones. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Eliminando términos de una sucesión podemos "extraer" de ella nuevas sucesiones, cuyos términos aparecen en la 'sucesión madre' en el mismo orden (¡tal vez no en el mismo lugar!) que en la nueva: es decir, vamos tomando infinitos términos, saltando algunos quizá, pero sin volver atrás. Por ejemplo, dada una sucesión

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, \ldots,$$

si nos quedamos con los términos que ocupan lugar impar (eliminando los que ocupan lugar par), obtenemos una nueva sucesión

$$s_1, s_3, s_5, s_7, s_9, \ldots,$$

cuyo término n-ésimo es s_{2n-1}; si nos quedamos con los términos que ocupan lugar par (eliminando los que ocupan lugar impar), obtenemos la nueva sucesión

$$s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}, \ldots,$$

cuyo término n-ésimo es s_{2n}. Podemos imaginar fácilmente otras muchas maneras de extraer sucesiones de la sucesión inicial con este procedimiento. Se obtienen así lo que denominaremos *subsucesiones* de la sucesión dada; como iremos viendo a lo largo del curso, el manejo de subsucesiones facilita habitualmente el estudio de la sucesión original, y permite demostrar varias propiedades esenciales de la teoría de funciones reales de variable real. Pasemos a formalizar este concepto.

Definición 3.1.19. *Dada una sucesión (s_n), diremos que una sucesión (t_n) es una* ***subsucesión*** *de (s_n) si existe una función $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente, es decir,*

$$\varphi(1) < \varphi(2) < \varphi(3) < \cdots < \varphi(n) < \varphi(n+1) < \cdots$$

de manera que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $t_n = s_{\varphi(n)}$.

Ejemplos. ([Bartle-Sherbert, pág. 110], [Ross, págs. 48, 49–51])

a) Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Tomando $\varphi(n) = n + n_0$ en la definición anterior, se obtiene la subsucesión

$$s_{n_0+1}, s_{n_0+2}, s_{n_0+3}, s_{n_0+4}, s_{n_0+5}, s_{n_0+6}, s_{n_0+7}, \ldots,$$

que resulta de la original "suprimiendo los n_0 primeros términos". En [Bartle-Sherbert, pág. 110], se da el nombre de *colas* de la sucesión (s_n) a las subsucesiones así obtenidas.

b) La sucesión de término n-ésimo $t_n = 4n^2$ es una subsucesión de la sucesión de término n-ésimo $s_n = (-1)^n n^2$, como se ve tomando $\varphi(n) = 2n$.

c) La sucesión $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$ no es una subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Tienen los mismos términos, pero no en el mismo orden. La sucesión $\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \ldots, \frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}, \ldots\right)$ tampoco es una subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

d) Toda sucesión es una subsucesión de sí misma (reflexividad). También hay transitividad: si (u_n) es una subsucesión de (t_n) y (t_n) es una subsucesión de (s_n), a su vez (u_n) es una subsucesión de (s_n).

Ejercicio. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es (a^n) una subsucesión de $\left(\frac{1}{n}\right)$? ¿Y de $\left(\frac{1}{2^n}\right)$? ¿Y de $\left(\frac{1}{2n}\right)$? ¿Y de $\left(\frac{1}{2n-1}\right)$? ¿Por qué?

Proposición 3.1.20. *Toda subsucesión de una sucesión convergente con límite a es convergente con límite a.*

Aplicaciones. a) Ya vimos, con cierto esfuerzo, que $((-1)^n)$ no es una sucesión convergente. Ahora es inmediato: la subsucesión de sus términos de lugar par converge a 1, la subsucesión de sus términos de lugar impar converge a -1.

b) Para $x \in [0,1)$, la sucesión (x^n) converge a 0: puesto que es convergente, según probamos, y si $\lim_n x^n = a$, vemos que $\lim_n x^{n+1} = a \cdot x$. Pero $\left(x^{n+1}\right)$ es una subsucesión de (x^n) (la que corresponde a $\varphi(n) = n+1$ en la definición), luego también $\lim_n x^{n+1} = a$, de donde $a \cdot x = a$ y como $x \neq 1$, finalmente $a = 0$. (¿Por qué no podemos utilizar estos cálculos si $x > 1$?)

c) La 'enumeración diagonal' de todos los números racionales forma una sucesión que no es convergente: tiene subsucesiones convergentes a cualquier número real (ver [Ross, págs. 49–50]).

Proposición 3.1.21. *Una sucesión (s_n) es convergente si y solo si la subsucesión de términos de lugar par (s_{2n}) y la subsucesión de términos de lugar impar (s_{2n-1}) son ambas convergentes y tienen el mismo límite.*

Lema 3.1.22. *Toda sucesión posee una subsucesión monótona.*

Demostración. Véase [Spivak, pág. 622]. □

Con ayuda del lema anterior, o bien del teorema de Cantor de los intervalos encajados, puede demostrase el siguiente resultado:

Teorema 3.1.23 (de Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.*

3.1.6. Sucesiones de Cauchy

Definición 3.1.24. *Una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ se dice que es **de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ (que puede depender de ε) de modo que*

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Lema 3.1.25. *Toda sucesión de Cauchy está acotada.*

Proposición 3.1.26. *Una sucesión es convergente si y solo si es de Cauchy.*

3.2. Límites infinitos

3.2.1. Sucesiones divergentes. Propiedades. Operaciones con sucesiones divergentes

Definición 3.2.1. *Diremos que una sucesión (s_n)* diverge a $+\infty$*, y escribiremos $\lim_n s_n = +\infty$, si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe algún $N \in \mathbb{N}$ que cumpla: $n > N \Longrightarrow s_n > M$.*

Diremos que una sucesión (s_n) diverge a $-\infty$*, y escribiremos $\lim_n s_n = -\infty$, si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ que cumpla: $n > N \Longrightarrow s_n < M$.*

Una sucesión *divergente* es una sucesión que diverge a $+\infty$ o a $-\infty$. Las sucesiones que no son convergentes ni divergentes se denominan *sucesiones oscilantes*.

Nota. Se sigue directamente de la definición que una sucesión (s_n) diverge a $+\infty$ si y solo si su opuesta $(-s_n)$ diverge a $-\infty$.

Proposición 3.2.2. *a) Una sucesión (s_n) diverge a $+\infty$ si y solo si para todo $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n > N$ sea $s_n > M$.*

b) Una sucesión (s_n) diverge a $-\infty$ si y solo si para todo $M < 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n > N$ sea $s_n < M$.

Notas. 1) En lo sucesivo, diremos que una sucesión *tiene límite* si es convergente o divergente, es decir, si no es oscilante. Obsérvese que el límite (en este sentido ampliado) sigue siendo único: si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y $\lim_n s_n = a$, $\lim_n s_n = b$, es $a = b$.

A veces nos referiremos a las sucesiones convergentes como 'sucesiones con límite finito' y a las divergentes como 'sucesiones con límite infinito'.

2) Si una sucesión diverge, no está acotada. Pero hay sucesiones no acotadas que oscilan, no son divergentes.

Proposición 3.2.3. *a) Sea (s_n) una sucesión monótona no decreciente. Si no está acotada superiormente, (s_n) diverge a $+\infty$,*

$$\lim_n s_n = +\infty.$$

b) Sea (s_n) una sucesión monótona no creciente. Si no está acotada inferiormente, (s_n) diverge a $-\infty$,

$$\lim_n s_n = -\infty.$$

Corolario 3.2.4. *Toda sucesión monótona tiene límite (finito si está acotada, infinito en caso contrario).*

Ejemplo. La sucesión de término n-ésimo

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

es monótona estrictamente creciente y no está acotada superiormente (véase [Bartle-Sherbert, pág. 105]), luego diverge a $+\infty$.

Proposición 3.2.5. *a) Toda subsucesión de una sucesión divergente a $+\infty$ es divergente a $+\infty$.*

b) Toda subsucesión de una sucesión divergente a $-\infty$ es divergente a $-\infty$.

Proposición 3.2.6. *a) Una sucesión posee una subsucesión divergente a $+\infty$ si y solo si no está acotada superiormente.*

b) Una sucesión posee una subsucesión divergente a $-\infty$ si y solo si no está acotada inferiormente.

c) Una sucesión posee una subsucesión divergente si y solo si no está acotada.

Proposición 3.2.7. *a) Si (s_n) es una sucesión divergente a $+\infty$ y (t_n) es una sucesión acotada inferiormente, la sucesión $(s_n + t_n)$ diverge a $+\infty$.*

b)) Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión acotada superiormente, la sucesión $(s_n + t_n)$ diverge a $-\infty$.

Corolario 3.2.8. *a) Si (s_n) es una sucesión divergente a $+\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente o divergente a $+\infty$, la sucesión $(s_n + t_n)$ diverge a $+\infty$: abreviadamente,*

$$\lim_n s_n = +\infty,\ \lim_n t_n = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Longrightarrow \lim_n (s_n + t_n) = +\infty.$$

b) Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente o divergente a $-\infty$, la sucesión $(s_n + t_n)$ diverge a $-\infty$: abreviadamente,

$$\lim_n s_n = -\infty,\ \lim_n t_n = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Longrightarrow \lim_n (s_n + t_n) = -\infty.$$

Nota. La suma de una sucesión divergente a $+\infty$ con una sucesión divergente a $-\infty$ puede resultar convergente, puede resultar divergente a $+\infty$, puede resultar divergente a $-\infty$ y puede resultar oscilante. (¿Ejemplos?)

Proposición 3.2.9. *a) Si (s_n) es una sucesión divergente a $+\infty$ y (t_n) es una sucesión para la que existen $r > 0$ y m tales que*

$$t_n > r \qquad \text{siempre que } n > m,$$

la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $+\infty$.

b) Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión para la que existen $r > 0$ y m tales que

$$t_n > r \qquad \text{siempre que } n > m,$$

la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$.

c) Si (s_n) es una sucesión divergente a $+\infty$ y (t_n) es una sucesión para la que existen $r > 0$ y m tales que

$$t_n < -r \qquad \text{siempre que } n > m,$$

la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$.

d) Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión para la que existen $r > 0$ y m tales que

$$t_n < -r \qquad \text{siempre que } n > m,$$

la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$.

Corolario 3.2.10. *a) Si (s_n) es una sucesión divergente a $+\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente con límite positivo o divergente a $+\infty$, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $+\infty$: abreviadamente,*

$$\lim_n s_n = +\infty,\ \lim_n t_n = a \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\} \Longrightarrow \lim_n (s_n \cdot t_n) = +\infty.$$

b) Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente con límite positivo o divergente a $+\infty$, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$: abreviadamente,

$$\lim_n s_n = -\infty,\ \lim_n t_n = a \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\} \Longrightarrow \lim_n (s_n \cdot t_n) = -\infty.$$

c) Si (s_n) es una sucesión divergente a $+\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente con límite negativo o divergente a $-\infty$, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$: abreviadamente,

$$\lim_n s_n = +\infty,\ \lim_n t_n = a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \Longrightarrow \lim_n (s_n \cdot t_n) = -\infty.$$

d) Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente con límite negativo o divergente a $-\infty$, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $+\infty$: abreviadamente,

$$\lim_n s_n = -\infty,\ \lim_n t_n = a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \Longrightarrow \lim_n (s_n \cdot t_n) = +\infty.$$

Nota. El producto de una sucesión divergente a $+\infty$ o a $-\infty$ por una sucesión convergente a 0 puede resultar convergente, divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$ u oscilante.

Proposición 3.2.11 (inversas de sucesiones divergentes). *a) Una sucesión (s_n) diverge a $+\infty$ si y solo si tiene como mucho un número finito de términos no positivos y su inversa converge a 0: abreviadamente,*

$$\lim_n s_n = +\infty \iff \begin{cases} \exists m; s_n > 0 & \text{siempre que } n > m \\ \lim_n \frac{1}{s_n} = 0 \end{cases}$$

b) Una sucesión (s_n) diverge a $-\infty$ si y solo si tiene como mucho un número finito de términos no negativos y su inversa converge a 0: abreviadamente,

$$\lim_n s_n = -\infty \iff \begin{cases} \exists m; s_n < 0 & \text{siempre que } n > m \\ \lim_n \frac{1}{s_n} = 0 \end{cases}$$

c) La sucesión de valores absolutos de una sucesión (s_n) diverge a $+\infty$ si y solo si tiene como mucho un número finito de términos no nulos y su inversa converge a 0: abreviadamente,

$$\lim_n |s_n| = +\infty \iff \begin{cases} \exists m; s_n \neq 0 & \text{siempre que } n > m \\ \lim_n \frac{1}{s_n} = 0 \end{cases}$$

Es fácil comprobar que una sucesión (s_n) converge a 0 si y solo si la sucesión $(|s_n|)$ de sus valores absolutos converge a 0. En efecto, ambas propiedades equivalen a que para todo $\varepsilon > 0$ exista un N tal que $|s_n| < \varepsilon$ para $n > N$. En general, sin embargo, solo puede afirmarse que si (s_n) es convergente con límite a, entonces $(|s_n|)$ es convergente con límite $|a|$; el recíproco no siempre es cierto si $a \neq 0$. De esto se deduce:

Corolario 3.2.12. *Una sucesión (s_n) sin términos nulos converge a 0 si y solo si la sucesión $(1/|s_n|)$ de los valores absolutos de los inversos diverge a $+\infty$: en símbolos, si $s_n \neq 0$ para todo n,*

$$\lim_n s_n = 0 \iff \lim_n \frac{1}{|s_n|} = +\infty.$$

Observación. Como $\frac{s_n}{t_n} = s_n \cdot \frac{1}{t_n}$, el estudio de cocientes se reduce fácilmente a los casos anteriores. Una muestra:

Corolario 3.2.13. *Si (s_n) es una sucesión divergente a $+\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente con límite positivo o una sucesión convergente a 0 que tiene a lo más un número finito de términos no positivos, entonces $\left(\frac{s_n}{t_n}\right)$ es una sucesión divergente a $+\infty$.*

Nota. Supuesto que la sucesión cociente $\left(\frac{s_n}{t_n}\right)$ esté definida, tal sucesión puede resultar convergente, puede resultar divergente a $+\infty$, puede resultar divergente a $-\infty$ y puede resultar oscilante si estamos en alguno de los siguientes casos:

a) (s_n) y (t_n) convergen a 0;

b) $\lim |s_n| = \lim |t_n| = +\infty$.

Si (s_n) tiene límite no nulo (finito o infinito) y (t_n) converge a 0, su cociente es divergente salvo en el caso de que tenga infinitos términos positivos e infinitos términos negativos.

Proposición 3.2.14 (encajamiento de sucesiones divergentes). *Dadas dos sucesiones (s_n) y (t_n) para las que existe un m tal que*

$$s_n \leq t_n \qquad \text{siempre que } n > m,$$

se verifica:
(a) si (s_n) *diverge a* $+\infty$*, también* (t_n) *diverge a* $+\infty$*:*

$$\lim_n s_n = +\infty \Longrightarrow \lim_n t_n = +\infty.$$

(b) si (t_n) *diverge a* $-\infty$*, también* (s_n) *diverge a* $-\infty$*:*

$$\lim_n t_n = -\infty \Longrightarrow \lim_n s_n = -\infty.$$

3.2.2. La recta ampliada

Los resultados anteriores sugieren ampliar al conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la estructura de orden de $\mathbb{R}$, y (parcialmente) sus operaciones algebraicas. Concretamente, haremos

1) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$,
$$-\infty \leq x \leq +\infty;$$

2) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ***distinto de*** $-\infty$,
$$(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty;$$

3) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ***distinto de*** $+\infty$,
$$(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty,$$
quedando sin definir $(+\infty) + (-\infty)$ y $(-\infty) + (+\infty)$;

4) $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$;

5) Para x, $y \in \overline{\mathbb{R}}$,
$$x - y = x + (-y)$$
siempre que la suma tenga sentido; ***quedan sin definir*** $(+\infty) - (+\infty)$ y $(-\infty) - (-\infty)$;

6) Para todo $x \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$,
$$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty;$$

7) Para todo $x \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)$,
$$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = -\infty;$$

8) Para todo $x \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$,
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty,$$

9) Para todo $x \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0)$,
$$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = +\infty,$$
quedando sin definir $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$ y $0 \cdot (-\infty)$;

10) $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$;

11) Para x, $y \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

siempre que el producto tenga sentido; ***quedan sin definir*** $\frac{1}{0}$ y por tanto $\frac{x}{0}$ cualquiera que sea $x \in \overline{\mathbb{R}}$, así como $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, y $\frac{-\infty}{-\infty}$;

12) $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Con la estructura resultante, $\overline{\mathbb{R}}$ suele denominarse ***la recta ampliada***.

Observación. Todo subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ tiene siempre extremo superior (= cota superior mínima) y extremo inferior (= cota inferior máxima) ***en*** $\overline{\mathbb{R}}$.

Notas. a) Dados dos elementos cualesquiera x, $y \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $x < y$, se puede encontrar siempre un número real z que cumple $x < z < y$; en otras palabras, todo intervalo $(x, y) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ contiene números reales.

b) Dados x, y, $z \in \overline{\mathbb{R}}$, se tiene

$$x \geq y \Longrightarrow x + z \geq y + z$$

siempre que las sumas estén definidas.

c) Para todo x de $\overline{\mathbb{R}}$ se tiene $(-1) \cdot x = -x$.

d) Se siguen verificando en $\overline{\mathbb{R}}$ las propiedades del valor absoluto en todos los casos en que tengan sentido.

Ejercicio. Hallar el extremo superior y el extremo inferior de los siguientes conjuntos: $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\emptyset$ y un intervalo de extremos a y b ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$).

Teorema 3.2.15. *Dada una sucesión (s_n) con límite a (finito o infinito) y una sucesión (t_n) con límite b (finito o infinito), se tiene:*

a) si $a + b$ está definido (en $\overline{\mathbb{R}}$), $(s_n + t_n)$ tiene límite $a + b$.

b) si $a - b$ está definido (en $\overline{\mathbb{R}}$), $(s_n - t_n)$ tiene límite $a - b$.

c) si $a \cdot b$ está definido (en $\overline{\mathbb{R}}$), $(s_n \cdot t_n)$ tiene límite $a \cdot b$.

d) si a/b está definido (en $\overline{\mathbb{R}}$), (s_n/t_n) tiene límite a/b.

3.2.3. Límite superior y límite inferior de una sucesión. Límites de oscilación

Definición 3.2.16. *Sea (s_n) una sucesión acotada superiormente. La sucesión (x_n) de números reales definida por*

$$x_n = \sup\{s_k : k \geq n\}$$

es monótona no creciente, por lo que tiene límite (que puede ser finito o $-\infty$). Dicho límite recibe el nombre de ***límite superior*** *de la sucesión (s_n). Se denota por $\limsup_n s_n$, de modo que*

$$\limsup_n s_n = \lim_n \left(\sup_{k \geq n} s_k\right) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} s_k\right).$$

Si (s_n) no está acotada superiormente, se define

$$\limsup_n s_n = +\infty.$$

Definición 3.2.17. *Sea (s_n) una sucesión acotada inferiormente. La sucesión (y_n) de números reales definida por*

$$y_n = \inf\{s_k : k \geq n\}$$

es monótona no decreciente, por lo que tiene límite (que puede ser finito o $+\infty$). Dicho límite recibe el nombre de ***límite inferior*** *de la sucesión (s_n). Se denota por $\liminf_n s_n$, de modo que*

$$\liminf_n s_n = \lim_n \left(\inf_{k \geq n} s_k \right) = \sup_n \left(\inf_{k \geq n} s_k \right).$$

Si (s_n) no está acotada inferiormente, se define

$$\liminf_n s_n = -\infty.$$

Nota. Una consecuencia inmediata de la definición es que siempre

$$\liminf_n s_n \leq \limsup_n s_n.$$

Ejemplos. Pueden examinarse las siguientes sucesiones (no es sencillo *demostrar* en todos casos cuál es el límite superior e inferior):

a) $\liminf_n (-1)^n = -1$, $\limsup_n (-1)^n = 1$.

b) $\liminf_n (-1)^n n = -\infty$, $\limsup_n (-1)^n n = +\infty$.

c) $\liminf_n \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$, $\limsup_n \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

d) $\liminf_n \operatorname{sen} n = -1$, $\limsup_n \operatorname{sen} n = 1$.

e) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$; el límite inferior es 0 y el límite superior es 1.

f) $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$; el límite inferior es 0 y el límite superior es $+\infty$.

g) $(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots)$; el límite inferior es 0 y el límite superior es 0, también.

h) $(a, b, c, a, b, c, \ldots)$; el límite inferior es $\min\{a, b, c\}$ y el límite superior es $\max\{a, b, c\}$.

Proposición 3.2.18. *Dada una sucesión (s_n), se tiene:*

a) (s_n) es convergente con límite a si y solo si

$$\liminf_n s_n = \limsup_n s_n = a.$$

b) (s_n) es divergente a $+\infty$ si y solo si

$$\liminf_n s_n = +\infty,$$

y en tal caso también $\limsup_n s_n = +\infty$.

c) (s_n) es divergente a $-\infty$ si y solo si

$$\limsup_n s_n = -\infty,$$

y en tal caso también $\liminf_n s_n = -\infty$.

Demostración. a) Pongamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \sup\{s_k : k \geq n\}, \quad y_n = \inf\{s_k : k \geq n\}.$$

Es claro que $y_n \leq s_n \leq x_n$. Como $\liminf_n s_n = \lim_n y_n$ y $\limsup_n s_n = \lim_n x_n$, si $\liminf_n s_n = \limsup_n s_n = a \in \mathbb{R}$, basta aplicar la regla del sandwich para obtener que (s_n) es convergente con límite a.

Recíprocamente, si (s_n) es convergente con límite a, dado $\varepsilon > 0$ hay un N tal que para todo $n > N$ es

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < s_n < a + \frac{\varepsilon}{2},$$

con lo que para todo $n > N$ el conjunto $\{s_k : k \geq n\}$ está acotado superiormente por $a + \frac{\varepsilon}{2}$ e inferiormente por $a - \frac{\varepsilon}{2}$, y así para todo $n > N$ es

$$a - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2} \leq y_n \leq x_n \leq a + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon,$$

y en definitiva,

$$\liminf_n s_n = \lim_n y_n = a = \lim_n x_n = \limsup_n s_n.$$

b) Para que $\liminf_n s_n = +\infty$, la sucesión (s_n) debe estar acotada inferiormente y, usando la notación anterior, debe ser $\lim_n y_n = +\infty$. Como $y_n \leq s_n$, esto obliga a que (s_n) sea también divergente a $+\infty$.

Recíprocamente: si (s_n) diverge a $+\infty$, no está acotada superiormente y por definición es $\limsup_n s_n = +\infty$. También es $\liminf_n s_n = +\infty$, puesto que dado $M \in \mathbb{R}$ existe un N tal que para todo $n > N$ se verifica $s_n > M + 1$, con lo que $y_n \geq y_N \geq M + 1 > M$, es decir, $\lim_n y_n = +\infty$.
c) Razonamiento análogo al anterior. □

Corolario 3.2.19. *Una sucesión (s_n) tiene límite (en $\overline{\mathbb{R}}$) si y solo si*

$$\liminf_n s_n = \limsup_n s_n.$$

Y en este caso, el límite es igual al límite superior y al límite inferior.

La sucesión (s_n) es oscilante si y solo si

$$\liminf_n s_n < \limsup_n s_n.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de lo anterior. □

Una descripción interesante de los límites superior e inferior se expresa mediante el siguiente concepto.

Definición 3.2.20. *Diremos que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ es un **límite de oscilación** de una sucesión (s_n) si a es límite de alguna subsucesión de (s_n).*

Corolario 3.2.21. *Toda sucesión tiene al menos un límite de oscilación.*

Demostración. Toda sucesión tiene una subsucesión monótona, y ésta tiene límite (finito o infinito). □

Proposición 3.2.22. *El límite superior de una sucesión es el máximo (en $\overline{\mathbb{R}}$) de sus límites de oscilación. El límite inferior de una sucesión es el mínimo (en $\overline{\mathbb{R}}$) de sus límites de oscilación.*

Demostración. Hay que probar que el límite superior y el límite inferior son límites de oscilación (lo que no es inmediato) y que cualquier otro límite de oscilación queda comprendido entre ambos (lo que resulta más sencillo de comprobar). Para los detalles, puede verse [Ross, Cor. 11.4, págs. 52–53, y teorema 11.7 (ii), pág. 54]. □

Otras propiedades de los límites superior e inferior se recogen en el siguiente enunciado.

Proposición 3.2.23. *Sean (x_n), (y_n) sucesiones de números reales y $c \in \mathbb{R}$.*

a) si $\limsup_n x_n < c$, existe un n_0 tal que $x_n < c$ para todo $n \geq n_0$ (es decir, solo hay un número finito de términos de la sucesión mayores o iguales que c)

b) si $\limsup_n x_n > c$, existen infinitos n para los que $x_n > c$

c) si $\liminf_n x_n > c$, existe un n_0 tal que $x_n > c$ para todo $n \geq n_0$ (es decir, solo hay un número finito de términos de la sucesión menores o iguales que c)

d) si $\liminf_n x_n < c$, existen infinitos n para los que $x_n < c$

e) si para algún m es $x_n \leq y_n$ siempre que $n > m$, entonces

$$\liminf_n x_n \leq \liminf_n y_n; \qquad \limsup_n x_n \leq \limsup_n y_n.$$

f)

$$\begin{aligned}\liminf_n x_n + \liminf_n y_n &\leq \liminf_n (x_n + y_n) \leq \liminf_n x_n + \limsup_n y_n \\ &\leq \limsup_n (x_n + y_n) \leq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n.\end{aligned}$$

g) si $c \geq 0$,

$$\liminf_n (c\, x_n) = c \liminf_n x_n; \qquad \limsup_n (c\, x_n) = c \limsup_n x_n.$$

h) si $c < 0$,

$$\liminf_n (c\, x_n) = c \limsup_n x_n; \qquad \limsup_n (c\, x_n) = c \liminf_n x_n.$$

i) si $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\liminf_n x_n \cdot \liminf_n y_n \quad &\leq \liminf_n (x_n\, y_n) \leq \liminf_n x_n \cdot \limsup_n y_n \\ &\leq \limsup_n (x_n\, y_n) \leq \limsup_n x_n \cdot \limsup_n y_n.\end{aligned}$$

j) si $x_n > 0$ para todo n,

$$\liminf_n \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Bibliografía

[Bartle-Sherbert] **Bartle, R. G. - Sherbert, D. R.:** *Introducción al Análisis Matemático de una Variable.* Limusa, México, 1990. Citado en la(s) página(s) 31, 32, 33, 34, 36, 39, 41

[Ross] **Ross, K.A.:** *Elementary Analysis: The Theory of Calculus.* Springer, Berlín, 1980. Citado en la(s) página(s) 31, 39, 40, 48

[Spivak] **Spivak, M.:** *Calculus. Cálculo Infinitesimal* (segunda edición). Reverté, Barcelona, 1990. Citado en la(s) página(s) 33, 40

Área de Análisis Matemático
Universidad de Zaragoza
analisis@unizar.es