

Capítulo 10

Sucesiones y series de funciones

Exponemos este tema siguiendo el capítulo 11 de [APOSTOL1], completado con algunas partes del capítulo 7 de [BARTLE-SHERBERT]. En cada caso iremos dando la referencia adecuada.

10.1. Sucesiones y series de funciones: convergencia puntual

Definición 10.1.1. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} . Supongamos que para cada número natural n está dada una función $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$; la aplicación $n \mapsto f_n$ recibe el nombre de **sucesión de funciones** (definidas en A , si es necesaria la precisión). La función f_n asociada al número natural n recibe el nombre de **término n -ésimo** de la sucesión.

Informalmente, tenemos, pues, una “lista sin fin”

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

de funciones definidas en el conjunto A . Como hicimos con las sucesiones de números reales, denotaremos la sucesión de funciones cuyo término n -ésimo es f_n con $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o, simplificando si no ha lugar a confusión, con (f_n) .

Para cada punto $x \in A$ podemos considerar la sucesión de números reales que tiene por término n -ésimo el número real $f_n(x)$, valor en x de la función f_n . Esta sucesión podrá ser o no convergente: el conjunto C de todos los puntos $x \in A$ para los que $(f_n(x))$ converge suele denominarse el **campo de convergencia** de la sucesión de funciones (f_n) ; supuesto $C \neq \emptyset$, podemos definir una nueva función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ haciendo corresponder a cada $x \in C$ el número real $f(x) := \lim_n f_n(x)$.

Hablaremos entonces de **convergencia puntual** o punto a punto de la sucesión a la función f , concepto que pasamos a definir en general.

Definición 10.1.2. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A , S un subconjunto de A , f una función definida en S . Diremos que la sucesión (f_n) **converge puntualmente o punto a punto** a f en S si para cada $x \in S$ la sucesión $(f_n(x))$ converge a $f(x)$. En este caso a f se le llama el **límite puntual** de la sucesión (f_n) en S .

Cuando existe tal función f , diremos que la sucesión (f_n) es **convergente punto a punto** en S , o que la sucesión (f_n) **converge puntualmente** en S .

Ejemplos. (1) La sucesión (x^n) converge puntualmente en el intervalo cerrado $[0, 1]$ a la función f definida en dicho intervalo por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(2) La sucesión $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)$ converge puntualmente en $[0, +\infty)$ a la función f definida en tal intervalo por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1. \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(3) La sucesión $(\sin n\pi x)$ converge puntualmente a 0 en \mathbb{Z} . (Menos trivial resulta comprobar que su campo de convergencia es justamente \mathbb{Z} .¹)

—Pueden verse más ejemplos con sus gráficas en [BARTLE-SHERBERT, págs. 312–315].

Observación. La convergencia puntual puede expresarse en términos similares a los de la convergencia de sucesiones numéricas. Concretamente:

- Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A , S un subconjunto de A , f una función definida en S . La sucesión (f_n) converge puntualmente a f en S si y solo si para cada $x \in S$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon, x)$ tal que siempre que $n > N(\varepsilon, x)$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

En consecuencia, tendremos la siguiente *condición de Cauchy* para la convergencia puntual:

- Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A , S un subconjunto de A . La sucesión (f_n) converge puntualmente en S (a una cierta función) si y solo si para cada $x \in S$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon, x)$ tal que siempre que $m, n > N(\varepsilon, x)$ se verifica $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Las definiciones de serie de funciones y convergencia puntual de una serie de funciones son fácilmente adivinables.

Definición 10.1.3. Una *serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es un par ordenado de sucesiones de funciones $((u_n), (s_n))$ relacionadas por la condición de que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el término n -ésimo de la primera sucesión, u_n , recibe el nombre de **término n -ésimo de la serie**; el término n -ésimo de la segunda sucesión, s_n , recibe el nombre de **suma parcial n -ésima de la serie**.

Decimos que una serie de funciones **converge puntualmente** a una función f en un conjunto S si lo hace la sucesión de sus sumas parciales. En tal caso, la función f es **la suma** de la serie en el conjunto S .

Ejemplo. La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ converge puntualmente en $(-1, 1)$ con función suma $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ($-1 < x < 1$).

10.2. Convergencia uniforme

El estudio de las sucesiones de funciones abre al menos dos interesantes opciones: de un lado, podemos construir nuevas funciones como límites de funciones conocidas; de otro, podemos pensar en ‘sustituir’, en ciertos problemas, una función dada por funciones ‘que la aproximan’ y que pueden tener un comportamiento mejor controlado respecto a la situación que nos interese. En cualquiera

¹ En efecto: supongamos que $\sin n\pi x \rightarrow \ell$; entonces $\sin 2n\pi x = 2 \sin n\pi x \cos n\pi x \rightarrow \ell$, de modo que si $\ell \neq 0$ resulta $\cos n\pi x \rightarrow \frac{1}{2}$ mientras que $\cos 2n\pi x = 2 \cos^2 n\pi x - 1 \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$; así pues, $\sin n\pi x \rightarrow 0$, con lo que $|\cos n\pi x| \rightarrow 1$; como $\sin(n+1)\pi x = \sin n\pi x \cos \pi x + \cos n\pi x \sin \pi x \rightarrow 0$, se sigue $\sin \pi x \cos n\pi x \rightarrow 0$ y necesariamente $\sin \pi x = 0$, o sea, $x \in \mathbb{Z}$.

de los dos casos, la primera tarea es examinar qué propiedades de las funciones que forman la sucesión ‘se traspasan’ a la función límite. El resultado de un primer análisis no puede ser más descorazonador, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplos. • *Sucesión de funciones continuas con función límite discontinua.* Sirve la sucesión del ejemplo anterior: $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1]$. (Ver las gráficas de las funciones en [APOSTOL1, pág. 518].)

- *Sucesión de funciones cuyas integrales no convergen a la integral de la función límite.* La sucesión (f_n) definida por

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

converge puntualmente a 0 en $[0, 1]$. Sin embargo,

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_n f_n(x) dx.$$

(Ver [APOSTOL1, pág. 518].)

- Peor aún es lo que ocurre con la derivación, como veremos posteriormente.

10.2.1. Definición de convergencia uniforme

A la vista de los ejemplos anteriores, es clara la necesidad de introducir una noción más fuerte de convergencia (ver comentarios en [APOSTOL1, págs. 518–519]).

Definición 10.2.1. *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A , S un subconjunto de A , f una función definida en S . La sucesión (f_n) **converge uniformemente** a f en S si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal que siempre que $n > N(\varepsilon)$, para todo $x \in S$ se verifica $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Ver comentarios e interpretación gráfica en [APOSTOL1, págs. 519–520].

Comparando esta definición con la reformulación que dimos anteriormente para la convergencia puntual, es obvio que

- *toda sucesión (f_n) que converge uniformemente a una función f en S , también converge puntualmente a f en S .*

Una expresión útil de la convergencia uniforme, que permite además enunciar una ‘condición de Cauchy’ para esta convergencia muy similar a la que conocemos para sucesiones numéricas, se logra mediante el empleo de lo que suele llamarse la ‘norma del supremo’, ‘norma infinito’ o *norma uniforme* de una función acotada.

Definición 10.2.2. *Dada una función φ acotada en un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, se llama **norma uniforme de φ en S** al número real*

$$\|\varphi\|_S = \sup\{|\varphi(x)| : x \in S\}.$$

La condición $\|\varphi\|_S \leq \alpha$ es así equivalente a que sea $|\varphi(x)| \leq \alpha$ para todo $x \in S$ (¡pero $|\varphi(x)| < \alpha$ para todo $x \in S$ **no** es equivalente a que $\|\varphi\|_S < \alpha$!).

Nota. Se comprueba sin dificultad que esta norma tiene las propiedades básicas de las normas euclídeas (aunque no es una norma euclídea), a saber:

- $\|\varphi\|_S \geq 0$; $\|\varphi\|_S = 0 \iff \varphi = 0$ en S ;

- $\|a \cdot \varphi\|_S = |a| \cdot \|\varphi\|_S$ para todo $a \in \mathbb{R}$;
- $\|\varphi + \psi\|_S \leq \|\varphi\|_S + \|\psi\|_S$.

Proposición 10.2.3. *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A , S un subconjunto de A , f una función definida en S . La sucesión (f_n) converge uniformemente a f en S si y solo si*

$$\lim_n \|f_n - f\|_S = 0.$$

Demostración. Ver [BARTLE-SHERBERT, Lema 7.1.8, pág. 316]. □

Aplicación. La sucesión $\left(\frac{\text{sen } nx}{n}\right)$ converge uniformemente a 0 en \mathbb{R} , pues

$$\left\|\frac{\text{sen } nx}{n}\right\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Sin embargo, la sucesión (f_n) con $f_n(x) = x^n$ no converge uniformemente en $J = [0, 1]$, pues en caso afirmativo tendría que hacerlo a la función f a la que converge puntualmente, y para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\|f_n - f\|_J = \sup\{|x^n - 0| : x \in [0, 1)\} \cup \{|1 - 1|\} = 1 \not\rightarrow 0.$$

(Ver este y otros ejemplos en [BARTLE-SHERBERT, págs. 316–317].)

Proposición 10.2.4 (condición de Cauchy para la convergencia uniforme). *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A , S un subconjunto de A . Entonces (f_n) converge uniformemente en S a alguna función si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N(\varepsilon)$ tal que para todos números naturales $m, n \geq N(\varepsilon)$ se cumple*

$$\|f_m - f_n\|_S < \varepsilon.$$

Demostración. No la desarrollamos, pero la comprobación de que es condición suficiente resulta muy ilustrativa. Puede verse en detalle en [BARTLE-SHERBERT, págs. 317–318]. □

10.2.2. Convergencia uniforme y continuidad

Al contrario que la convergencia puntual, la convergencia uniforme conserva la continuidad, como pasamos a comprobar.

Teorema 10.2.5. *Sea (f_n) una sucesión de funciones que converge uniformemente en un conjunto S a una función f con dominio S , y sea p un punto de S . Si cada función f_n es continua en p , f también es continua en p .*

Demostración. Ver [APOSTOL1, Teorema 11.1, pág. 520]. □

Corolario 10.2.6. *Si una serie de funciones $\sum u_k$ converge uniformemente hacia la función suma f en su dominio S y si cada término u_k es una función continua en un punto p de S , también f es continua en p .*

Demostración. Ver los comentarios de [APOSTOL1, Teorema 11.2, pág. 521]. □

10.2.3. Convergencia uniforme e integración

La convergencia puntual no conserva la integrabilidad: hay ejemplos —un tanto “confeccionados a medida”— de sucesiones de funciones integrables-Riemann que convergen puntualmente a funciones no integrables-Riemann (por ejemplo, en [BARTLE-SHERBERT, ejercicio 13, pág. 325]). Una vez más, la situación es distinta con convergencia uniforme.

Teorema 10.2.7. *Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables en un intervalo compacto $[a, b]$ que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función f . Entonces f es integrable en $[a, b]$ y se cumple*

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n.$$

Demostración. No la haremos. Puede verse en [BARTLE-SHERBERT, Teorema 7.2.4, págs. 323–324]. \square

Este es un primer resultado dentro de una larga lista de “teoremas de paso al límite bajo el signo integral”. La necesidad de ‘aligerar’ sus hipótesis es una de las razones que impulsaron la generalización de Lebesgue del concepto de integral.

Para las necesidades del presente curso es más ‘cómodo’ el resultado que sigue.

Proposición 10.2.8. *Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en un intervalo compacto $[a, b]$ que converge uniformemente en $[a, b]$ a una función f . Definamos una nueva sucesión de funciones (g_n) mediante*

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

y pongamos

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces (g_n) converge uniformemente a g en $[a, b]$. Abreviadamente,

$$\lim_n \int_a^x f_n = \int_a^x \lim_n f_n \text{ [unif. } a \leq x \leq b].$$

Demostración. Ver [APOSTOL1, Teorema 11.3, págs. 521–522]. \square

Corolario 10.2.9. *Sea $\sum u_k$ una serie de funciones continuas que converge uniformemente hacia la función suma f en un intervalo compacto $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, definimos*

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(t) dt, \quad g(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Entonces (g_n) converge uniformemente a g en $[a, b]$. Abreviadamente,

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(t) dt = \int_a^x \lim_n \sum_{k=1}^n u_k(t) dt \text{ [unif. } a \leq x \leq b],$$

o

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t) dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) dt \text{ [unif. } a \leq x \leq b],$$

Demostración. [APOSTOL1, Teor. 11.4, pág. 522]. \square

10.2.4. Convergencia uniforme y derivación

Sobre derivación no cabe esperar resultados tan ‘limpios’ como los obtenidos para la continuidad y la integrabilidad ni siquiera cuando hay convergencia uniforme, según ponen de manifiesto los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Una sucesión de funciones derivables que converge uniformemente a una función no derivable:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \rightarrow f(x) = |x| \text{ [unif. } -1 \leq x \leq 1].$$

Ejemplo. Una sucesión de funciones derivables que converge uniformemente a una función derivable, mientras que la sucesión de sus derivadas no converge en ningún punto:

$$f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{\sqrt{n}} \rightarrow f(x) = 0 \text{ [unif. } \mathbb{R}].$$

(Ver [GELBAUM-OLMSTED, págs. 76–77].)

Ejemplo. Una sucesión de funciones derivables que converge uniformemente a una función derivable, mientras que la sucesión de sus derivadas converge a una función que no es límite de las derivadas:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} \rightarrow f(x) = 0 \text{ [unif. } 0 \leq x \leq 1].$$

Ejemplo. Una sucesión de funciones derivables que no converge en ningún punto, mientras que la sucesión de sus derivadas converge uniformemente:

$$f_n(x) = (-1)^n; f'_n(x) = 0 \rightarrow 0 \text{ [unif. } \mathbb{R}].$$

Vista la situación, es menos sorprendente que vayamos a parar a un enunciado como el que sigue.

Proposición 10.2.10. *Sea J un intervalo finito y sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en J . Supongamos que*

- (1) *existe un $x_0 \in J$ tal que $(f_n(x_0))$ converge;*
- (2) *existe en J la sucesión de derivadas (f'_n)*
- (3) *esta sucesión de derivadas (f'_n) converge uniformemente en J a una función g .*

Entonces la sucesión (f_n) converge uniformemente en J a una función f derivable en J para la que $f' = g$.

Demostración. Con estas hipótesis la demostración es un tanto elaborada: se comprueba que (f_n) cumple la condición de Cauchy para convergencia uniforme mediante una aplicación adecuada del teorema del valor medio, y después se comprueba que la función f , límite uniforme de (f_n) , tiene derivada $g(x)$ en cada punto $x \in J$ aproximándola por una f_n conveniente (ver los detalles en [BARTLE-SHERBERT, Teorema 7.2.3, págs. 322–323]).

La demostración se simplifica notablemente cuando se añade una hipótesis de continuidad de las derivadas, no siendo necesario entonces que J sea finito. En efecto, sustituyendo la condición (2) del enunciado por

- (2⁺) *existe en J la sucesión de derivadas (f'_n) y cada f'_n es continua,*

podemos proceder como sigue:

Definamos $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ poniendo, para cada $x \in J$,

$$h(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

La sucesión de funciones (h_n) definida en J por

$$h_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt$$

converge uniformemente en J a h , y la regla de Barrow permite escribir

$$h_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(x_0).$$

Construyendo $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = \lim_n f_n(x_0) + h(x)$$

es inmediato que f es derivable con derivada $f'(x) = h'(x) = g(x)$ para cada $x \in J$. Para probar que $\lim_n f_n = f$ [unif. J] basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - \lim_n f_n(x_0) + \lim_n f_n(x_0) - f(x)| \\ &= |h_n(x) + f_n(x_0) - \lim_n f_n(x_0) - h(x)| \leq |h_n(x) - h(x)| + |f_n(x_0) - \lim_n f_n(x_0)| \end{aligned}$$

y por tanto

$$\|f_n - f\|_J \leq \|h_n - h\|_J + |f_n(x_0) - \lim_n f_n(x_0)| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. □

El lector puede enunciar y demostrar la traducción de este resultado a series de funciones.

10.3. Una condición suficiente para la convergencia uniforme de series

Teorema 10.3.1 (criterio M de Weierstrass). *Sea $\sum u_k$ una serie de funciones definidas en un conjunto para la que se puede encontrar una serie numérica convergente $\sum M_n$ de términos no negativos de manera que se cumple, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}^2$, $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in S$.*

Entonces la serie $\sum u_k$ converge uniformemente en S y absolutamente en cada punto de S .

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

la suma parcial n -ésima de la serie. Hemos de probar que la sucesión de funciones (s_n) converge uniformemente en S , para lo que es suficiente demostrar que cumple la condición de Cauchy. Pero suponiendo $m > n$, para cualquier $x \in S$ es

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k,$$

de donde $\|s_m - s_n\|_S \leq \sum_{k=n+1}^m M_k$, que puede hacerse menor que un ε prefijado sin más que tomar $m > n > N(\varepsilon)$ para un cierto $N(\varepsilon)$, en virtud de la condición de Cauchy aplicada a la serie convergente $\sum M_n$. □

² (o, al menos, desde un n en adelante. Nótese que esta condición implica la convergencia absoluta en cada punto de S .)

Ejemplo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ es uniformemente convergente en $[-1, 1]$.

Bibliografía

- [APOSTOL1] **Apostol, T. M.:** *Calculus, vol. I* (segunda edición). Reverté, Barcelona, 1989. Citado en la(s) página(s) 169, 171, 172, 173
- [BARTLE-SHERBERT] **Bartle, R. G. - Sherbert, D. R.:** *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*. Limusa, México, 1990. Citado en la(s) página(s) 169, 170, 172, 173, 174
- [GELBAUM-OLMSTED] **Gelbaum, B. R. - Olmsted, J. M. H.:** *Counterexamples in Analysis*. Holden-Day, San Francisco, 1964. Citado en la(s) página(s) 174