

## Capítulo 8

# Series numéricas

### 8.1. Definición y primeras propiedades

Informalmente, una serie es “una suma de infinitos sumandos” (ver antecedentes históricos y comentarios en [APOSTOLI, cap. 10] y en [DURÁN, pág. 184 y siguientes]). Tales sumas se usan implícitamente, por ejemplo, al considerar desarrollos decimales “ilimitados” de los números reales: así, la igualdad  $\frac{7}{3} = 2,333\dots$  significa

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots,$$

suma con “infinitos sumandos” de la forma  $\frac{3}{10^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En general, consideraremos una sucesión cualquiera  $(a_n)$  y “su suma”  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . ¿Qué sentido habrá que darle a tal suma? La respuesta se impone de modo natural:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  “tiene que ser”  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n$ .

Analizando el proceso anterior, se trata, pues, de formar mediante la “sucesión de sumandos”  $(a_n)$  una nueva sucesión “de sumas”  $(s_m)$  dada por  $s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , y determinar el límite (si existe) de esta última sucesión. Esquemáticamente:

lugar	1	2	3	4	...	$n$	...	
término	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...	$a_n$	...	
suma	$a_1$	$a_1 + a_2$	$a_1 + a_2 + a_3$	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	...	$a_1 + \dots + a_n$	...	$\rightarrow ?$

Ahora bien: si, en definitiva, vamos a parar al estudio de la convergencia de una sucesión, ¿qué novedad vamos a encontrar respecto a lo que ya sabemos de sucesiones? El cambio radica en el punto de partida: tomando como “dato” la sucesión de sumandos  $(a_n)$ , nos planteamos determinar propiedades de la sucesión de sumas  $(s_n)$  basándonos en propiedades de los términos  $a_n$ . Pasemos a formalizar estas ideas.

#### 8.1.1. Series: términos y sumas parciales. Series convergentes, divergentes y oscilantes

**Definición 8.1.1.** Una *serie*  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es un par ordenado de sucesiones  $((a_n), (s_n))$  relacionadas por la condición de que para cada  $n \in \mathbb{N}$  es

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

El término  $n$ -ésimo de la primera sucesión,  $a_n$ , recibe el nombre de **término  $n$ -ésimo de la serie**; el término  $n$ -ésimo de la segunda sucesión,  $s_n$ , recibe el nombre de **suma parcial  $n$ -ésima de la serie**.

Diremos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es **convergente**, **divergente a  $+\infty$  o  $-\infty$** , **u oscilante** según sea convergente, divergente a  $+\infty$  o  $-\infty$ , u oscilante la sucesión de sus sumas parciales.

Si una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente, se llama **suma** de dicha serie al límite de la sucesión de sus sumas parciales; si la serie diverge a  $+\infty$  (resp.,  $-\infty$ ), se dice que su suma es  $+\infty$  (resp.,  $-\infty$ ). Con un abuso de notación que no suele conducir a error, se denota la suma con el mismo símbolo que la serie.

**Nota.** A veces es cómodo considerar series de la forma  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ , donde  $m$  es un número entero: las sumas parciales serán entonces  $s_1 = a_m$ ,  $s_2 = a_m + a_{m+1}, \dots$ ,  $s_n = a_m + \dots + a_{m+n-1}, \dots$

Se utiliza también la notación  $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n + \dots$  en vez de  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  y, cuando no da lugar a confusión, se abrevia en  $\sum a_n$ .

**Ejemplo (series geométricas).** Una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es una *serie geométrica* si existe un  $r \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  es  $a_{n+1} = r \cdot a_n$  (o  $a_{n+1}/a_n = r$  si  $a_1 \neq 0$ ); de otro modo, si es de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a r^n$ . Si  $s_n$  es su suma parcial  $n$ -ésima, se tendrá

$$s_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} = \begin{cases} a \frac{1-r^n}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \\ an & \text{si } r = 1 \end{cases}.$$

Excluyendo el caso trivial  $a = 0$ , se sigue:

- si  $|r| < 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$  es convergente y la suma es  $\frac{a}{1-r}$ ;
- si  $r > 1$ , la serie es divergente a  $+\infty$  (si  $a > 0$ ) o a  $-\infty$  (si  $a < 0$ );
- si  $r = -1$ , la serie es oscilante, aunque las sumas parciales están acotadas;
- si  $r < -1$ , la serie es oscilante y las sumas parciales tienden, en valor absoluto, a  $+\infty$ .

**Ejemplo (serie armónica).** Se denomina así la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Se comprueba que, para cada  $n$ , su suma parcial  $n$ -ésima, denotada habitualmente por  $H_n$ , cumple

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1),$$

luego la serie armónica diverge a  $+\infty$  a pesar de que  $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ .

El “carácter” de una serie no cambia si se prescinde de un número finito de sumandos (aunque esto pueda afectar al valor de la suma). Dicho de forma más precisa,

**Proposición 8.1.2.** Dada una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y un entero  $m > 1$ , se tiene:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si y solo si converge  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ . Si convergen, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n.$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge a  $+\infty$  si y solo si  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  diverge a  $+\infty$ .
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge a  $-\infty$  si y solo si  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  diverge a  $-\infty$ .

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es oscilante si y solo si  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  es oscilante.

*Demostración.* Basta observar que para todo  $p > m$  es

$$\sum_{n=1}^p a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^p a_n,$$

donde  $\sum_{n=1}^{m-1} a_n$  es fijo (independiente de  $p$ ), y aplicar las definiciones previas y los resultados conocidos para sucesiones.  $\square$

### 8.1.2. Linealidad de la convergencia de series

**Proposición 8.1.3.** Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  series convergentes. Para cualesquiera  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  es convergente y se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Demostración.* Basta tener en cuenta que

$$\sum_{n=1}^N (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^N a_n + \beta \sum_{n=1}^N b_n. \quad \square$$

**Corolario 8.1.4.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  no es convergente, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  no es convergente.

*Demostración.* Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  convergiera, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + b_n) + (-1)a_n)$$

también convergiera, según la proposición anterior.  $\square$

**Ejemplos.** La serie  $\sum (1/n + 1/2^n)$  no converge, pues  $\sum 1/n$  no es convergente y  $\sum 1/2^n$  sí.

Sin embargo, al sumar *dos series no convergentes*, la suma puede ser tanto convergente como no convergente: examínense los casos  $a_n = b_n = 1$  y  $a_n = 1, b_n = -1$ .

### 8.1.3. Series telescópicas

**Proposición 8.1.5.** Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dos sucesiones de números reales tales que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

Entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (denominada serie telescópica) es convergente si y solo si la sucesión  $(b_n)$  tiene límite real, en cuyo caso tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_n b_n.$$

*Demostración.* Basta tener en cuenta que las sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  son

$$\sum_{n=1}^N a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{N-1} - b_N) + (b_N - b_{N+1}) = b_1 - b_{N+1}. \quad \square$$

**Ejemplo.** Si  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , entonces la suma parcial  $N$ -ésima es simplemente

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1},$$

con lo que  $\lim_N S_N = 1$ . Es decir, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge y su suma es 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

**Ejemplo.** Sea ahora  $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . La suma parcial de orden  $N$  es

$$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^N (\log(n+1) - \log n) = \log(N+1) - \log 1 = \log(N+1)$$

y tiende a  $+\infty$ . Es decir, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  diverge a  $+\infty$ .

**Nota.** Toda serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se puede ver trivialmente como una serie telescópica: basta poner

$$b_1 = 0, \quad b_{n+1} = -(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

lo que no añade nada interesante al estudio de la serie. Como es obvio, el resultado que hemos obtenido sólo es útil cuando la sucesión  $(b_n)$  es una sucesión conocida, cuyo comportamiento sabemos de antemano.

**Ejercicio.** Escribiéndolas como series telescópicas, estudiar las siguientes series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n+2}{n(n+1)}$  (descomponer  $\frac{n+2}{n(n+1)}$  en fracciones simples).

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3 \frac{a}{3^n}$  (obsérvese que  $\sin \alpha = 3 \sin \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3}$ ).

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2^n} \operatorname{tg} \frac{a}{2^{n-1}}$  (utilizar que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$ ).

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n}$  (tener en cuenta que  $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$ ).

#### 8.1.4. Condición necesaria para la convergencia de una serie. Condición general de convergencia de Cauchy

**Proposición 8.1.6 (condición necesaria para la convergencia de una serie).** Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, necesariamente

$$\lim_n a_n = 0.$$

*Demostración.* Si  $(s_N)$  es la sucesión de las sumas parciales, es decir,

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n,$$

entonces

$$\exists \lim_N s_N \in \mathbb{R}.$$

Como  $a_N = s_N - s_{N-1}$ , se deduce que

$$\lim_N a_N = \lim_N s_N - \lim_N s_{N-1} = 0. \quad \square$$

Esta condición no es suficiente para la convergencia de una serie: veremos numerosos ejemplos de series no convergentes cuya sucesión de términos tiende a 0; el más sencillo es quizá la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

ya estudiada.

**Teorema 8.1.7 (condición de Cauchy para la convergencia de una serie).** *Una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente si y solo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $N = N(\varepsilon)$  tal que para cualesquiera  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m \geq n > N$  se cumple*

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

*Demostración.* La serie es convergente si y solo si lo es la sucesión  $(s_n)$  de sus sumas parciales, lo que equivale a que  $(s_n)$  sea de Cauchy, y esto a su vez es equivalente a que para cada  $\varepsilon > 0$  exista un  $N = N(\varepsilon)$  tal que para cualesquiera  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m \geq n > N$  sea  $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$ ; pero

$$s_m - s_{n-1} = \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^m a_k. \quad \square$$

## 8.2. Series de términos no negativos

### 8.2.1. Convergencia de una serie de términos no negativos. Criterios de comparación

El estudio del carácter de una serie se simplifica cuando ésta es de términos no negativos.

**Proposición 8.2.1.** *Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie tal que  $a_n \geq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si y solo si la sucesión  $(s_n)$  de sus sumas parciales está acotada superiormente. En caso contrario, la serie diverge a  $+\infty$ .*

*Demostración.* Puesto que para cada  $n \in \mathbb{N}$  es

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0,$$

la sucesión  $(s_n)$  es monótona no decreciente. Luego o bien está acotada superiormente y converge, o bien no está acotada superiormente y diverge a  $+\infty$ .  $\square$

Este resultado permite deducir en algunos casos la convergencia (o divergencia) de una serie a partir del carácter de otra serie conocida.

**Teorema 8.2.2 (criterio de comparación).** Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  dos series y  $n_0 \in \mathbb{N}$  de modo que para  $n \geq n_0$  es  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, también converge  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . En consecuencia, si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es asimismo divergente.

*Demostración.* Sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  tiene el mismo carácter que  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ , y que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  tiene el mismo carácter que  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ . Denotando por  $(s_n)$  la sucesión de sumas parciales de  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  y por  $(t_n)$  la de  $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ , se sigue que para cada  $n \in \mathbb{N}$  es  $s_n \leq t_n$ , luego si  $(t_n)$  está acotada superiormente,  $(s_n)$  estará acotada superiormente. Y si  $(s_n)$  no está acotada superiormente,  $(t_n)$  tampoco puede estar acotada superiormente. Basta aplicar ahora el teorema anterior.  $\square$

En los libros clásicos, el criterio anterior recibe el nombre de *criterio de la mayorante y de la minorante*, expresándose la relación descrita entre las series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diciendo que la primera *está mayorada* por la segunda y que ésta *está minorada* por la primera. El criterio se enuncia entonces en la forma siguiente: *si la serie mayorante es convergente, la minorante es convergente; si la minorante es divergente, la mayorante es divergente.*

La comparación entre dos series suele hacerse en la práctica estudiando el cociente de sus términos:

**Corolario 8.2.3 (criterio de comparación por paso al límite).** Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  series de términos no negativos. Supongamos que existe

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0, +\infty].$$

- a) Si  $\ell < +\infty$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  también converge.
- b) Si  $0 < \ell$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  también diverge.
- c) Si  $0 < \ell < +\infty$ , entonces las dos series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  tienen el mismo carácter.

*Demostración.* a) Sea  $C \in (\ell, +\infty)$  (por ejemplo  $C = \ell + 1$ ). Entonces existe algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n/b_n \leq C$  para todo  $n \geq n_0$ , es decir,  $0 \leq a_n \leq Cb_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, entonces también la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n$  converge y, por el criterio anterior, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

b) Sea  $C \in (0, \ell)$ . Existe algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n/b_n \geq C$  para todo  $n \geq n_0$ , es decir,  $a_n \geq Cb_n \geq 0$  para todo  $n \geq n_0$ . Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge, entonces también la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} Cb_n$  diverge y, por el criterio anterior, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

c) Basta aplicar a) y b).  $\square$

**Corolario 8.2.4 (series de términos equivalentes).** Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  dos series de términos no negativos. Supongamos que  $(a_n) \sim (b_n)$ . Entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  tienen el mismo carácter.

Por supuesto, en el resultado anterior las dos series pueden tener distinta suma.

La comparación con las series geométricas proporciona dos de los criterios más utilizados en la práctica, el criterio de la raíz y el criterio del cociente. Posteriormente veremos versiones más generales de los mismos para series de términos cualesquiera.

**Proposición 8.2.5 (criterio de Cauchy o de la raíz).** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie de términos no negativos tal que existe  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ .

- a) Si  $R < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente.
- b) Si  $R > 1$ , entonces  $a_n \not\rightarrow 0$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es divergente.

**Proposición 8.2.6 (criterio de D'Alembert o del cociente).** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie de términos no negativos tal que existe  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

- a) Si  $R < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente.  
 b) Si  $R > 1$ , entonces  $a_n \not\rightarrow 0$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es divergente.

Un complemento interesante del criterio del cociente es el criterio de Raabe.

**Proposición 8.2.7 (criterio de Raabe).** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie de términos no negativos tal que exista  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ . Entonces:

- a) Si  $R > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente.  
 b) Si  $R < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge a  $+\infty$ .

*Demostración.* Ver [GARAY-CUADRA-ALFARO, teorema 5.28, págs. 101–102]. □

### 8.2.2. Otros criterios. Convergencia de algunas series de términos no negativos

**Proposición 8.2.8 (criterio integral).** Dada  $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  no creciente, la integral impropia  $\int_1^{+\infty} f$  es convergente si y solo si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  converge. Además, existe siempre

$$C = \lim_n \left( \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f \right) \in [0, +\infty)$$

y es

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f + C + \varepsilon_n$$

con

$$0 \leq \varepsilon_n \leq f(n) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , pongamos

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k), \quad t_n = \int_1^n f, \quad d_n = s_n - t_n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \left( f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right) \\ &= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)] dx \geq 0. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= s_n - t_n - s_{n+1} + t_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n+1) \\ &= \int_n^{n+1} [f(x) - f(n+1)] dx \geq 0, \end{aligned}$$

se sigue que  $(d_n)$  es monótona no creciente y acotada inferiormente por 0, con lo que existe  $C = \lim_n d_n \in [0, +\infty)$  y, en consecuencia,  $(s_n)$  y  $(t_n)$  serán simultáneamente convergentes o divergentes. Puesto que  $f \geq 0$ , la convergencia de  $(t_n)$  equivale asimismo a la de la integral  $\int_1^{+\infty} f$ , luego esta integral converge si y solo si converge la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ .

Por último, para obtener la relación entre  $s_n$  y  $t_n$ , observemos que

$$0 \leq d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(n) dx - f(n+1) = f(n) - f(n+1).$$

Reiterando, para cualquier número natural  $p$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_n - d_{n+1} \leq f(n) - f(n+1), \\ 0 &\leq d_{n+1} - d_{n+2} \leq f(n+1) - f(n+2), \\ &\dots \\ 0 &\leq d_{n+p} - d_{n+p+1} \leq f(n+p) - f(n+p+1). \end{aligned}$$

Al sumar las desigualdades resulta que

$$0 \leq d_n - d_{n+p+1} \leq f(n) - f(n+p+1).$$

Pasando al límite en  $p$ , y teniendo en cuenta que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  existe por ser  $f$  monótona no creciente, obtenemos

$$0 \leq d_n - C \leq f(n) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Si hacemos  $\varepsilon_n = d_n - C = s_n - t_n - C = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f - C$ , hemos probado que

$$0 \leq \varepsilon_n \leq f(n) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

lo que completa la demostración. □

**Aplicaciones.** 1.- **La constante  $\gamma$  de Euler.** Aplicando los resultados que acabamos de obtener a la función  $f$  dada por  $f(x) = 1/x$  y teniendo en cuenta que

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n,$$

podemos escribir la suma parcial  $n$ -ésima de la serie armónica como

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \varepsilon_n,$$

donde  $0 \leq \varepsilon_n \leq 1/n$  y

$$\gamma = \lim_n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 0,5772156649\dots$$

es un número introducido por Euler en 1734 en el estudio de la función  $\Gamma$ , definida también por él. Euler obtuvo sus dieciséis primeras cifras decimales en 1781; en 1963, Sweeney calculó 3.566 cifras. No se sabe todavía si es un número racional o irracional (ver [LE LIONNAIS, pág. 28]).

2.- **La función  $\zeta$  de Riemann.** El criterio integral permite comprobar fácilmente que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge si y solo si  $s > 1$  (ver [APOSTOL1, ejemplo 1, pág. 485]). La función

$$\zeta : s \in (1, +\infty) \rightarrow \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \in \mathbb{R},$$

denominada **función zeta de Riemann**, tiene importantes aplicaciones (especialmente en teoría de números). Hay expresiones más o menos sencillas para  $\zeta(2n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pero no para otros valores. Se sabe por ejemplo que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ . Hasta fechas recientes (R. Apéry, 1978) no se había podido probar siquiera que  $\zeta(3)$  es irracional: ver [LE LIONNAIS, pág. 36].

3.- **Series logarítmicas.** También mediante el criterio integral se prueba que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$$

converge si y solo si  $s > 1$  (ver [APOSTOL1, pág. 486]).

Por comparación con las series anteriores se deducen inmediatamente los siguientes criterios de convergencia.

**Proposición 8.2.9 (criterio de Pringsheim).** *Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie de términos no negativos tal que para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$  existe el límite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = \ell \in [0, +\infty].$$

Entonces:

a) Si  $\alpha > 1$  y  $\ell < +\infty$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

b) Si  $\alpha \leq 1$  y  $\ell > 0$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge a  $+\infty$ .

**Proposición 8.2.10 (criterios logarítmicos).** *Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie de términos no negativos tal que existe alguno de los dos límites  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log a_n}{\log n}$ ,  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log(n a_n)}{\log(\log n)}$ . Entonces:*

a) Si  $A > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente; si  $A < 1$ , diverge a  $+\infty$ .

b) Si  $B > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente; si  $B < 1$ , diverge a  $+\infty$ .

## 8.3. Series de términos cualesquiera

### 8.3.1. Series alternadas: criterio de Leibniz

**Proposición 8.3.1 (criterio de Leibniz).** *Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  una serie alternada, es decir, una serie tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  es  $x_n = (-1)^{n+1} a_n$  con  $a_n \geq 0$ . Si  $(a_n)$  es una sucesión no creciente con límite 0, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  es convergente. Además, denotando con  $s_n$  la suma parcial  $n$ -ésima de la serie y con  $s$  su suma, se verifican para todo  $n \in \mathbb{N}$  las desigualdades*

$$0 \leq (-1)^n (s_{n+2} - s_n) \leq a_{n+1}, \quad (8.1)$$

$$0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq a_{n+1}. \quad (8.2)$$

**Nota.** De (8.1) se sigue que las sumas de orden par forman una sucesión no decreciente y las sumas de orden impar una sucesión no creciente. Las desigualdades (8.2) pueden interpretarse del siguiente modo: si tomamos  $s_n$  como valor aproximado de  $s$ , el error que cometemos es menor o igual que  $|a_{n+1}|$ , de modo que si  $(a_n)$  converge “rápidamente” a 0, obtenemos una buena aproximación de la suma mediante una suma parcial de “pocos” términos.

*Demostración.* Obsérvese que dado  $k \in \mathbb{N}$ , la diferencia

$$-(s_{2k+1} - s_{2k-1}) = a_{2k} - a_{2k+1}$$

es mayor o igual que 0 por ser  $(a_n)$  decreciente, y menor o igual que  $a_{2k}$  por ser  $a_{2k+1} \geq 0$ , lo que da (8.1) en el caso  $n = 2k - 1$ . Para  $n = 2k$  es

$$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k+2},$$

que análogamente es mayor o igual que 0 y menor o igual que  $a_{2k+1}$ , lo que completa la prueba de (8.1) para todos los casos. Además, hemos obtenido que  $(s_{2k})$  es una sucesión no decreciente. Como

$$s_{2k} = a_1 - [(a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2k-2} - a_{2k-1}) + a_{2k}] \leq a_1,$$

$(s_{2k})$  está acotada superiormente, luego es convergente. Sea  $s$  su límite. Puesto que

$$s_{2k-1} = s_{2k} + a_{2k}$$

y  $a_{2k} \rightarrow 0$ , resulta que

$$\lim_k s_{2k-1} = \lim_k (s_{2k} + a_{2k}) = \lim_k s_{2k} + \lim_k a_{2k} = s + 0 = s.$$

Es decir: tanto la subsucesión de términos pares como la de términos impares de  $(s_n)$  son convergentes con límite  $s$ . Esto permite afirmar que  $(s_n)$  es convergente con límite  $s$ , es decir, que  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$ .

Finalmente, puesto que para cada  $n \in \mathbb{N}$  es

$$s = x_1 + \cdots + x_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} (-1)^n (s - s_n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{n+k+1} a_k \\ &= a_{n+1} - a_{n+2} + \lim_m [(a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2m+1} - a_{n+2m+2})] \\ &\geq a_{n+1} - a_{n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} (-1)^n (s - s_n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{n+k+1} a_k \\ &= a_{n+1} - \lim_m [(a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots + (a_{n+2m} - a_{n+2m+1})] \\ &\leq a_{n+1}, \end{aligned}$$

lo que prueba (8.2). □

**Ejemplo.** La serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

es convergente. Además, su suma se calcula fácilmente utilizando la constante de Euler. En efecto: para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sumando y restando términos, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= H_{2n} - H_n = \log 2n + \gamma + \varepsilon_{2n} - \log n - \gamma - \varepsilon_n = \log 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Como sabemos ya que la serie armónica alternada es convergente, podemos escribir:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_m \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_n \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2.$$

**Ejemplo.** La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$$

es convergente. En efecto, es fácil comprobar que la función  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  es decreciente en  $[3, +\infty)$  (por ejemplo, calculando  $f'$ ). Además,  $\frac{\log n}{n} \geq 0$  y  $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ . De aquí se deduce que la serie  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$  converge.

### 8.3.2. Series absolutamente convergentes

**Definición 8.3.2.** Una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se dice **absolutamente convergente** si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  es convergente.

El ejemplo más sencillo de serie convergente que no converge absolutamente es la serie armónica alternada.

**Observación.** Una serie obtenida mediante combinación lineal de series absolutamente convergentes es absolutamente convergente (ver [APOSTOL1, pág. 496]).

**Definición 8.3.3.** Para un número real cualquiera  $x$ , escribamos

$$x^+ = \max\{x, 0\}, \quad x^- = \max\{-x, 0\}.$$

Es fácil comprobar que  $|x| = x^+ + x^-$ ,  $x = x^+ - x^-$ ,  $x^+ \geq 0$ ,  $x^- \geq 0$ .

**Proposición 8.3.4.** Toda serie absolutamente convergente es convergente: dicho de otro modo, si  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  también converge. Y en ese caso,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

*Demostración.* Con la notación anterior,

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|, \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|,$$

luego las dos series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  convergen. Como  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  también converge. Además, para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

por la desigualdad triangular. Pasando al límite (una vez que ya sabemos que las dos series convergen),

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \quad \square$$

**Proposición 8.3.5.** (a) Si una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge pero la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverge a  $+\infty$ , entonces las dos series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  divergen a  $+\infty$ .

(b) Una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es absolutamente convergente si y solo si son convergentes las series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ ; y entonces se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

*Demostración.* a) Para cada  $n$  se tiene  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$  y  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ , luego

$$|a_n| = 2a_n^+ - a_n, \quad |a_n| = 2a_n^- + a_n.$$

Como la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, de estas dos últimas igualdades se deduce que si alguna de las dos series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  converge, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge también.

b) Para cada  $n$ ,  $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$  y  $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$ . Luego si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, las dos series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  convergen también. Recíprocamente, si estas dos series convergen, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  también converge, porque  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ . Y en ese caso, como  $a_n = a_n^+ - a_n^-$  se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \quad \square$$

### 8.3.3. Criterios generales de Cauchy (de la raíz) y de D'Alembert (del cociente)

Los criterios ya vistos sobre convergencia de series de términos no negativos se traducen de manera obvia en criterios de convergencia absoluta para series de términos cualesquiera. Así:

**Proposición 8.3.6 (criterio de la raíz o de Cauchy).** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie tal que existe  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Entonces:

- a) Si  $R < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.  
 b) Si  $R > 1$ , entonces  $a_n \not\rightarrow 0$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no es convergente.

*Demostración.* a) Supongamos que  $R < 1$ . Sea  $R < c < 1$ . Entonces existirá algún  $n_0$  tal que  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c$  para todo  $n \geq n_0$ . Por lo tanto,

$$0 \leq |a_n| \leq c^n, \quad n \geq n_0.$$

Como  $0 < c < 1$ , la serie geométrica  $\sum_{n=n_0}^{\infty} c^n$  converge y por lo tanto la serie  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$  converge, y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  también converge.

b) Supongamos que  $R > 1$ . Entonces existirá algún  $n_0$  tal que  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  para todo  $n \geq n_0$ . Por lo tanto,

$$|a_n| \geq 1, \quad n \geq n_0.$$

Entonces,  $a_n \not\rightarrow 0$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no es convergente. □

**Proposición 8.3.7 (criterio del cociente o de D'Alembert).** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie tal que existe  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ . Entonces:

- a) Si  $R < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente.  
 b) Si  $R > 1$ , entonces  $a_n \not\rightarrow 0$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no es convergente.

*Demostración.* a) Supongamos que  $R < 1$ . Sea  $R < c < 1$ . Entonces existirá algún  $n_0$  tal que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c$  para todo  $n \geq n_0$ . Por lo tanto,

$$|a_{n+1}| \leq c|a_n|, \quad n \geq n_0.$$

De aquí es fácil deducir por inducción que

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{|a_{n_0}|}{c^{n-n_0}} c^n, \quad n \geq n_0.$$

Como  $0 < c < 1$ , la serie geométrica  $\sum_{n=n_0}^{\infty} c^n$  converge y por lo tanto la serie  $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$  converge, y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  también converge.

b) Supongamos que  $R > 1$ . Entonces existirá algún  $n_0$  tal que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$  para todo  $n \geq n_0$ . Por lo tanto,

$$|a_{n+1}| \geq |a_n|, \quad n \geq n_0.$$

Entonces, la sucesión  $|a_n|$  no tiende a 0 (es no decreciente), luego  $a_n \not\rightarrow 0$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  no es convergente.  $\square$

### 8.3.4. Criterios de convergencia de Abel y Dirichlet

El criterio de Leibniz nos ha permitido encontrar series que convergen pero no absolutamente. Para ampliar la lista de criterios que no se refieren a la convergencia absoluta añadimos los más conocidos, de Abel y Dirichlet, que se obtienen de una interesante “fórmula de sumación por partes”.

**Lema 8.3.8 (fórmula de sumación parcial de Abel).** Sean  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  dos sucesiones arbitrarias, y llamemos, para cada  $n$ ,

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

(suma parcial  $n$ -ésima de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ) Entonces

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1})$$

cualquiera que sea  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Ver [APOSTOL1, pág. 497].  $\square$

**Proposición 8.3.9 (criterio de Abel).** Si  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión monótona y acotada, y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es una serie convergente, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  es convergente.

*Demostración.* Ver [APOSTOL1, pág. 498].  $\square$

**Proposición 8.3.10 (criterio de Dirichlet).** Si  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión monótona que converge a 0, y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es una serie cuya sucesión de sumas parciales está acotada, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  es convergente.

*Demostración.* Ver [APOSTOL1, págs. 497–498].  $\square$

## 8.4. Propiedad conmutativa para series

¿Qué sucede cuando en una serie “se cambia el orden de los sumandos”? Veremos que las únicas series “inalterables” por tales cambios son las absolutamente convergentes; en general, pues, las series no mantienen la propiedad conmutativa de las sumas finitas. Precisemos estos conceptos.

**Definición 8.4.1.** Dada una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , se dice que otra serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es una **reordenación** suya si existe una aplicación biyectiva  $r: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n = a_{r(n)}.$$

Nótese que, recíprocamente,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es una reordenación de  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , pues la inversa  $r^{-1}$  es igualmente una biyección.

Informalmente, una serie es una reordenación de otra si tiene exactamente los mismos términos, pero en otro orden. Que una serie tenga la propiedad conmutativa significará, así, que tenga suma y que cualquier reordenación suya tenga la misma suma. Vamos a dar un nombre especial a las series convergentes con la propiedad conmutativa.

**Definición 8.4.2.** Una serie se denomina **incondicionalmente convergente** si es convergente y si toda reordenación suya es asimismo convergente, y con la misma suma.

Diremos que una serie es **condicionalmente convergente** si es convergente pero no incondicionalmente convergente, de modo que alguna reordenación suya o bien no es convergente o converge a una suma distinta.

**Lema 8.4.3.** Dada una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  de términos no negativos y una reordenación suya  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , se tiene:

- a) si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente con suma  $s$ , también  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es convergente con suma  $s$ .
- b) si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es divergente a  $+\infty$ , también  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es divergente a  $+\infty$ .

*Demostración.* a) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definamos

$$m(n) = \max\{r(1), r(2), \dots, r(n)\}.$$

Denotando con  $t_n$  la suma parcial  $n$ -ésima de  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  será entonces

$$t_n = a_{r(1)} + a_{r(2)} + \dots + a_{r(n)} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{m(n)} \leq s,$$

lo que prueba que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  es convergente con suma menor o igual que  $s$ . Como a su vez  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es una reordenación de  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , por el mismo motivo su suma será menor o igual que la suma de  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , lo que implica la igualdad entre ambas sumas.

b) En caso contrario,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sería convergente y entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , reordenación suya, también convergería.  $\square$

**Proposición 8.4.4.** Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente.

*Demostración.* Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, aplicamos el lema anterior a las series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  (que también convergen) y por último recordamos que  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ .  $\square$

El recíproco también es cierto: más aún, una serie convergente que no converja absolutamente posee reordenaciones “que van a parar donde se desee”: convergentes con suma arbitrariamente prefijada, divergentes a  $+\infty$ , divergentes a  $-\infty$ , oscilantes a capricho. Este es el contenido de un célebre teorema de Riemann.

**Teorema 8.4.5 (de Riemann).** *Si una serie es convergente pero no absolutamente convergente, para cada  $\ell \in [-\infty, +\infty]$  existe una reordenación cuya suma es  $\ell$ ; en general, dados  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ , existe una reordenación cuya sucesión de sumas parciales contiene subsucesiones que convergen a  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ .*

*Demostración.* [GARAY-CUADRA-ALFARO, teorema 5.33, pág. 105], [ORTEGA, teorema 9.20, pág. 303].  $\square$

**Corolario 8.4.6 (teorema de Dirichlet).** *Una serie es incondicionalmente convergente si y solo si es absolutamente convergente.*

## 8.5. Apéndice: sumación de series

Resumimos las ideas fundamentales sobre el cálculo de las sumas de algunos tipos particulares de series.

### Series telescópicas

Si para cada  $n$  puede ponerse  $a_n = b_n - b_{n+1}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si y solo si es convergente la sucesión  $(b_n)$ , y si este es el caso,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_n b_n$ .

### Series geométricas

Si  $a \neq 0$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$  converge si y solo si  $|r| < 1$ ; si converge,  $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ .

### Series aritmético-geométricas

Si  $P$  es un polinomio no constante, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) r^n$  converge si y solo si  $|r| < 1$ . Llamando  $S$  a su suma,  $(1-r)S = P(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [P(n) - P(n-1)]r^n = P(0) + \sum_{n=1}^{\infty} Q(n)r^n$ , donde  $Q$  es un polinomio de grado menor que  $P$ ; reiterando, se llega a una serie geométrica.

### Series hipergeométricas

Son de la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  con  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ ,  $\alpha > 0$ . La serie converge si y solo si  $\gamma > \alpha + \beta$ , con suma  $\frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}$ .

### Series ‘racionales’ o ‘de cocientes de polinomios’

Series del tipo  $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ , donde  $P$  y  $Q$  son polinomios (el nombre no es estándar). Cuando convergen, puede hallarse a veces su suma descomponiendo  $P/Q$  en fracciones simples y calculando la suma parcial  $n$ -ésima, relacionándola con sumas de series conocidas. Pueden ser de ayuda las siguientes:

- Serie armónica

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \varepsilon_n, \text{ donde } \gamma \text{ es la constante de Euler y } \lim_n \varepsilon_n = 0$$

- Función  $\zeta$  de Riemann

$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ,  $s > 1$  (*función zeta* de Riemann). En particular

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

### Reordenadas de la serie armónica alternada

En algunos casos pueden hallarse expresiones simplificadas de ciertas sumas parciales en términos de  $H_n$ , y deducir así el comportamiento de la serie.

### Series que se reducen a la exponencial

Partiendo de que para todo  $x \in \mathbb{R}$  es  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ , se pueden sumar series de la forma  $\sum \frac{P(n)}{n!} x^n$ , donde  $P$  es un polinomio de grado  $m$ , sin más que reescribir

$$P(n) = a_0 n(n-1) \cdots (n-m+1) + a_1 n(n-1) \cdots (n-m+2) + \cdots + a_{m-1} n + a_m$$

para coeficientes  $a_0, \dots, a_m$  adecuados, y observar que

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k)}{n!} = \frac{1}{(n-k-1)!},$$

si  $n > k$ .

# Bibliografía

- [APOSTOL1] **Apostol, T. M.:** *Calculus, vol. I* (segunda edición). Reverté, Barcelona, 1989. Citado en la(s) página(s) 139, 146, 147, 149, 151
- [DURÁN] **Durán, A. J.:** *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Alianza, Madrid, 1996. Citado en la(s) página(s) 139
- [GARAY-CUADRA-ALFARO] **Garay, J. - Cuadra, J. L. - Alfaro, M.:** *Una introducción al cálculo infinitesimal*. Edición de los autores, Zaragoza, 1974. Citado en la(s) página(s) 145, 153
- [LE LIONNAIS] **Le Lionnais, F.:** *Les nombres remarquables*. Hermann, Paris, 1983. Citado en la(s) página(s) 146, 147
- [ORTEGA] **Ortega, J. M.:** *Introducción al Análisis Matemático*. Labor, Barcelona, 1995. Citado en la(s) página(s) 153