Capítulo 9

Series de potencias. Desarrollos en serie de Taylor

En la representación (e incluso en la construcción) de funciones, desempeñan un papel especialmente destacado cierto tipo de series, denominadas *series de potencias*. Los aspectos profundos de su estudio corresponden a la teoría de funciones de variable compleja más que a la teoría de funciones de variable real, por lo que aquí damos simplemente algunas propiedades sencillas, suficientes para nuestros propósitos. Como referencia utilizamos [APOSTOL1].

9.1. Series de potencias

9.1.1. Convergencia de las series de potencias

Definición 9.1.1. Recibe el nombre de *serie de potencias* toda serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n.$$

El número real a_n se denomina **coeficiente n -ésimo** de la serie de potencias (obsérvese que el término n -ésimo es $a_n (x - c)^n$). Si los coeficientes a_0, a_1, a_{m-1} son nulos, la serie suele escribirse $\sum_{n=m}^{\infty} a_n (x - c)^n$.

En cierto modo, se trata de una especie de “polinomio con infinitos términos”. Veremos que, a la hora de operar con ellas, las funciones definidas como suma de una serie de potencias comparten muchas propiedades con los polinomios.

¿Para qué valores de x converge una tal serie? Obviamente, es segura la convergencia para $x = c$, con suma a_0 , y puede suceder que éste sea el único punto en el que la serie converge. Fuera de este caso extremo, la situación es bastante satisfactoria: veamos algunos ejemplos.

Ejemplos. (1) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

converge (absolutamente) si y solo si $x \in (-1, 1)$ (con suma $1/(1 - x)$, como sabemos).

(2) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

converge si y solo si $x \in [-1, 1)$. Si $x \in (-1, 1)$, converge absolutamente.

(3) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

converge (absolutamente) si y solo si $x \in [-1, 1]$.

(4) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$$

converge si y solo si $x \in [-1, 1]$. Si $x \in (-1, 1)$, converge absolutamente.

(5) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge (absolutamente) para todo $x \in \mathbb{R}$ (y la suma es e^x).

(6) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

converge solamente para $x = 0$.

Lema 9.1.2. Si para algún $r \in (0, +\infty)$ la sucesión $(a_n r^n)$ está acotada, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - c| < r$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ es absolutamente convergente.

Demostración. Sea M tal que para todo $n \geq 0$ se tenga

$$|a_n| r^n \leq M.$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - c|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \frac{|x - c|^n}{r^n}$$

está mayorada por la serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{|x - c|^n}{r^n}. \quad \square$$

Definición 9.1.3. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$, su **radio de convergencia** es el valor (finito o infinito) dado por

$$r = \sup\{|x - c| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \text{ converge}\}.$$

Si $r > 0$, el intervalo $(c - r, c + r)$ se denomina **intervalo de convergencia** de la serie de potencias.

Corolario 9.1.4. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$, con radio de convergencia r , se tiene:

- a) la serie converge absolutamente en cada punto x de su intervalo de convergencia; en otras palabras, si $|x - c| < r$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ es absolutamente convergente;
- b) la serie no converge en los puntos x tales que $|x - c| > r$.

Nota. Según los ejemplos previos, cuando r es finito, nada puede decirse sobre la convergencia en los puntos $c + r, c - r$. Tampoco hay un resultado general sobre convergencia uniforme en $(c - r, c + r)$.

Demostración. a) De la definición de r se deduce que si $|x - c| < r$, debe existir un punto x_1 tal que $|x - c| < |x_1 - c|$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_1 - c)^n$ converge. Aplicando el lema anterior, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ debe converger absolutamente.

b) Consecuencia directa de la definición de r . $\square$

Ejemplos. (1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ tiene radio de convergencia 1. Para $x = 1$ diverge a $+\infty$ y para $x = -1$ es oscilante.

(2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ tiene radio de convergencia 1. Para $x = 1$ diverge a $+\infty$ y para $x = -1$ es convergente (condicionalmente).

(3) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ tiene radio de convergencia 1. Para $x = 1$ y para $x = -1$ es convergente (absolutamente).

Observación. Existe una fórmula que permite expresar el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ en función de sus coeficientes. Se trata de la **fórmula de Cauchy-Hadamard**

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Sin embargo, en los ejemplos que manejaremos en el curso, es más cómodo realizar directamente el estudio de la convergencia de las series para los distintos valores de x (generalmente con ayuda del criterio del cociente o del criterio de la raíz).

En la fórmula de Cauchy-Hadamard, a_n es **exactamente** el coeficiente de $(x - c)^n$, de modo que si se quiere utilizar por ejemplo para hallar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, hay que calcular $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ donde $a_n = 1$ si n es par y $a_n = 0$ si n es impar (¿sabrías hacerlo?); por suerte, en este y en casi todos los ejemplos usuales podemos evitar este cálculo si recurrimos a la definición de radio de convergencia y al estudio directo de la convergencia de las series.

Este ejemplo muestra también por qué hay que usar obligadamente límite superior en la fórmula: el límite no tiene por qué existir.

9.1.2. Propiedades de las funciones representadas por series de potencias

La suma de una serie de potencias de radio no nulo define en su intervalo de convergencia una función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n.$$

Se dice entonces que la serie *representa a la función* f en el intervalo de convergencia y que es *el desarrollo en serie de potencias* de la función f en el punto c .

Se plantean entonces de manera natural dos problemas (ver [APOSTOL1, págs. 528–529]):

(1) dada la serie, hallar propiedades de la función suma;

(2) dada una función, averiguar si puede ser o no representada por una serie de potencias (suele decirse entonces que la función es *desarrollable en serie de potencias*).

Teorema 9.1.5. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ una serie de potencias de radio $r > 0$ y sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n,$$

definida si $|x - c| < r$. Entonces:

a) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}$$

tiene también radio de convergencia r .

b) la función f es derivable y si $|x - c| < r$ se tiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}.$$

Demostración. a) Sea $|x - c| < r$. Entonces podemos elegir algún $y \in \mathbb{R}$ tal que $|x - c| < |y - c| < r$. Según la definición de radio de convergencia, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |y - c|^n$$

converge. Además,

$$\lim_n \frac{n |a_n| |x - c|^{n-1}}{|a_n| |y - c|^n} = \lim_n \frac{n}{|y - c|} \left| \frac{x - c}{y - c} \right|^{n-1} = 0,$$

luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}$$

converge. Si, por el contrario, $|x - c| > r$, entonces la sucesión $a_n(x - c)^n$ no está acotada, luego la sucesión $n a_n(x - c)^n$ tampoco lo está y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}$$

no converge.

b) Sea $|x - c| < s < r$ y sea $y \in (c - s, c + s)$, $y \neq x$. Por el teorema del valor medio, para cada n existe un t_n comprendido entre x e y , de manera que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(y - c)^n - (x - c)^n}{y - x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (t_n - c)^{n-1}.$$

Asimismo, para cada n existe un t'_n comprendido entre x y t_n , tal que

$$(t_n - c)^{n-1} - (x - c)^{n-1} = (n - 1)(t'_n - c)^{n-2}(t_n - x).$$

Como $x, y \in (c - s, c + s)$, resulta que $t'_n \in (c - s, c + s)$. Así que

$$|t'_n - c| < s.$$

Según el apartado anterior (aplicado dos veces), las series $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}$ y $\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) |a_n| s^{n-2}$

son convergentes. Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1} \right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| |(t_n - c)^{n-1} - (x - c)^{n-1}| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| (n - 1) |t'_n - c|^{n-2} |t_n - x| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) |a_n| s^{n-2} |y - x| \\ &= M(s) |y - x|, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}. \quad \square$$

La aplicación reiterada de este resultado permite afirmar:

Corolario 9.1.6. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ una serie de potencias de radio $r > 0$ y sea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

si $|x - c| < r$. Entonces f tiene derivadas de todos los órdenes en $(c - r, c + r)$, y se cumple

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x - c)^{n-k}.$$

En consecuencia

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

de manera que las sumas parciales de la serie son los correspondientes polinomios de Taylor de f en el punto c .

Demostración. La primera parte se prueba por inducción sobre k . Para la segunda, tomando en particular $x = c$, se sigue que $f^{(n)}(c) = n! a_n$. $\square$

Corolario 9.1.7. *Si dos series de potencias $\sum a_n (x - c)^n$ y $\sum b_n (x - c)^n$ tienen la misma función suma f en un cierto entorno del punto c , entonces las dos series tienen los mismos coeficientes: en realidad, para todo $n \geq 0$ se cumple*

$$a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

El teorema muestra que “la derivación de una serie de potencias se hace derivando cada uno de sus términos, como si fuese un polinomio”; esto permite sumar fácilmente determinadas series a partir de otras de sumas conocidas.

Ejemplo. Puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, para tales x se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ y, en general, $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} = k!(1-x)^{-k-1}$.

También es útil comprobar que se puede “integrar término a término”.

Corolario 9.1.8. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ una serie de potencias de radio $r > 0$ y sea*

$$f : x \in (c - r, c + r) \rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \in \mathbb{R}.$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - c)^{n+1}$$

tiene radio r , y si F es una primitiva de f en $(c - r, c + r)$, para cada $x \in (c - r, c + r)$ se verifica

$$F(x) = F(c) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - c)^{n+1}.$$

Demostración. Ya sabemos, por el teorema anterior, que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

tienen el mismo radio de convergencia. Sea

$$g : x \in (c-r, c+r) \rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1} \in \mathbb{R}.$$

El teorema anterior prueba que g tiene derivada en $(c-r, c+r)$ igual a f , es decir, que g es una primitiva de f en $(c-r, c+r)$, por lo que F y g difieren en una constante. Como $g(c) = 0$, se sigue que

$$F(x) - g(x) = F(c). \quad \square$$

Ejercicios. (1) Probar que si $|x| < 1$, se tiene

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

(2) Probar que si $|x| < 1$, se tiene

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Hemos visto que en los extremos del intervalo de convergencia la serie puede no converger; si lo hace, es interesante disponer de algún resultado que, bajo ciertas condiciones, garantice que la función definida por la serie sea cuando menos continua, como el teorema que pasamos a enunciar (su demostración puede verse en [Ross, Teor. 26.6, págs. 147–148]).

Teorema 9.1.9 (de Abel.). Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ una serie de potencias de radio de convergencia r positivo y finito, y supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ es convergente. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \lim_{x \rightarrow (c+r)^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n.$$

Ejemplo. Demostrar mediante el teorema de Abel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

9.2. Desarrollos en serie de Taylor

La fórmula de Taylor y el teorema de la sección anterior pueden inducir a pensar que si una función f tiene derivadas de todos los órdenes, es representable como suma de su *serie de Taylor*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

(como una especie de “fórmula de Taylor llevada al límite”) en la parte del dominio de f donde tal serie converja. La situación real no es tan satisfactoria: por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto de $\mathbb{R}$, y en 0 es $f^{(n)}(0) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$; por consiguiente, para ningún valor de r se cumple $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ siempre que $|x| < r$.

Es posible demostrar que para que una función f coincida con la suma de su serie de Taylor es necesario que sus derivadas sucesivas no tengan un tamaño “desmesurado”. En aplicaciones concretas es suficiente comprobar que las derivadas están ‘controladas’ por potencias sucesivas de una constante, como vamos a ver ahora.

Proposición 9.2.1. *Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo $(c - r, c + r)$. Supongamos que existan números reales no negativos A y B tales que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq B \cdot A^n \quad \text{siempre que } |x - c| < r .$$

Entonces, para todo $x \in (c - r, c + r)$ se verifica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n .$$

Demostración. Sea $|x - c| < r$. Si $x \neq c$, dado $m \in \mathbb{N}$, aplicando la fórmula de Taylor podremos escribir, para algún t_m comprendido entre x y c

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \right| = \frac{|f^{(m+1)}(t_m)|}{(m+1)!} |x - c|^{m+1} \leq B \frac{A^{m+1}}{(m+1)!} |x - c|^{m+1} .$$

Entonces la diferencia anterior tiende a 0 cuando $m \rightarrow \infty$. En consecuencia, la serie es convergente con suma $f(x)$. $\square$

Ejercicios. Obtener los desarrollos siguientes (ver [APOSTOL1, págs. 533–535]):

$$\text{a) } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

$$\text{b) } \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

$$\text{c) } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R} .$$

Nota. Si reflexionamos un momento, tenemos ante nosotros una manera rigurosa de *construir* las funciones seno, coseno, exponencial, sin más que leer las fórmulas anteriores al revés. Las series que hemos escrito son obviamente series de potencias de radio $+\infty$, que *definen* sendas funciones en $\mathbb{R}$: otra cuestión es que resulte fácil o complicado demostrar que estas funciones gozan de las propiedades que venimos utilizando en relación con el seno, el coseno, la exponencial. Dedicaremos a su estudio el último capítulo, para que sirva a su vez de muestra de la enorme potencia de los conocimientos que hemos ido adquiriendo a lo largo del curso.

Para comprobar la validez de ciertos desarrollos es a veces más conveniente usar otros recursos, en vez de la fórmula de Taylor.

Ejemplo (serie binómica). Veamos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ es

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \text{siempre que } |x| < 1 .$$

Para $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la fórmula anterior se reduce a la del binomio y es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponemos, pues, $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Entonces, el criterio del cociente nos da que el radio de convergencia de la serie es 1, luego podemos definir una función

$$f : x \in (-1, 1) \rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \in \mathbb{R},$$

que, en principio, no tiene por qué coincidir con $(1+x)^\alpha$ en dicho intervalo. Pero como

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1},$$

de

$$\begin{aligned} n \binom{\alpha}{n} + (n+1) \binom{\alpha}{n+1} &= n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + (n+1) \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \\ &= n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!} \\ &= [n + (\alpha-n)] \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \\ &= \alpha \binom{\alpha}{n}, \end{aligned}$$

se deduce que $f'(x)(1+x) = \alpha f(x)$, por lo que $f(x)/(1+x)^\alpha$ tiene derivada nula y por tanto se mantiene constante en todo el intervalo $(-1, 1)$. Tomando $x = 0$ se sigue que el valor de tal constante es 1, es decir, que $f(x) = (1+x)^\alpha$ para todo $x \in (-1, 1)$. $\square$

De especial interés resulta el caso particular $\alpha = -1/2$. Entonces, operando,

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdots (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n (n!)} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Del criterio de Leibniz y del teorema de Abel se sigue que la fórmula anterior también es válida para $x = 1$.

A veces se escribe abreviadamente

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = (2n-1)!!, \quad 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = (2n)!!.$$

Aplicación. A partir del desarrollo de su derivada se obtiene

$$\arcsen x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1,$$

válido también para $|x| = 1$ por el teorema de Abel.

Ponemos final a este capítulo con una tabla de los desarrollos en serie de Taylor-Maclaurin de las funciones que más frecuentemente aparecen en los ejercicios.

<i>FUNCIÓN</i>	<i>DESARROLLO EN SERIE</i>	<i>CONVERGE</i>
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$	$-1 < x < 1$
$\log(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots$	$-1 < x \leq 1$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\text{sen } x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\text{cos } x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\text{arc sen } x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\text{arc tg } x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$

Bibliografía

- [APOSTOL1] **Apostol, T. M.:** *Calculus, vol. I* (segunda edición). Reverté, Barcelona, 1989. Citado en la(s) página(s) 157, 159, 163
- [ROSS] **Ross, K. A.:** *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*. Springer, Berlín, 1980. Citado en la(s) página(s) 162