Capítulo 1

Números reales

1.1. Sistemas numéricos

1.1.1. Números naturales: principio de inducción

Los números $1, 2, 3, \dots$, reciben el nombre de *números naturales*. Con ellos se realizan dos *operaciones*, la *suma de números naturales* y el *producto de números naturales*, que dan como resultado otro número natural perfectamente definido. Para dos números naturales cualesquiera m y n , su suma suele representarse por $m + n$ y su producto por $m \cdot n$ o mn (si no ha lugar a confusión). Si denotamos con $\mathbb{N}$ el conjunto de *todos* los números naturales, podemos pensar en la suma y el producto como aplicaciones del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, de modo que

$$+ : (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow m + n \in \mathbb{N}, \quad \cdot : (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow mn \in \mathbb{N}.$$

Las propiedades fundamentales de estas operaciones son las que a continuación transcribimos:

Dados números naturales cualesquiera m, n, p , se cumplen

N1. Propiedad asociativa de la suma: $(m + n) + p = m + (n + p)$.

N2. Propiedad conmutativa de la suma: $m + n = n + m$.

N3. Propiedad asociativa del producto: $(mn)p = m(np)$.

N4. Propiedad conmutativa del producto: $mn = nm$.

N5. Existencia de elemento neutro (identidad) para el producto: Hay un número natural, que denotamos por 1 , tal que $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.

N6. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $m(n + p) = mn + mp$.

Es posible asimismo “comparar el tamaño” de dos números naturales cualesquiera, estableciendo así una relación de orden en $\mathbb{N}$. Suele escribirse $m \leq n$ para indicar que m es menor o igual que n (o lo que es lo mismo, que n es mayor o igual que m , lo que también se escribe $n \geq m$), y pondremos $m < n$ (o $n > m$) para expresar que m es estrictamente menor que n (o sea, que m es menor y distinto que n). Esta relación cumple para $m, n, p \in \mathbb{N}$

N7. Propiedad reflexiva: $m \leq m$.

N8. Propiedad antisimétrica: si $m \leq n$ y $n \leq m$, entonces $m = n$.

N9. Propiedad transitiva: si $m \leq n$ y $n \leq p$, entonces $m \leq p$.

N10. Propiedad de orden total: siempre es $m \leq n$ o $n \leq m$.

N11. Principio de buena ordenación: Todo conjunto no vacío de números naturales posee un elemento mínimo, es decir, dado $S \subseteq \mathbb{N}$ no vacío, existe un elemento m en S tal que $m \leq n$ para todo $n \in S$.

Una de las propiedades de $\mathbb{N}$ más usadas durante el curso es el denominado *principio de inducción*, que pasamos a enunciar.

N12. Principio de inducción matemática: Un conjunto de números naturales que contenga a 1 y que con cada n contenga a $n + 1$, debe contener a todos los números naturales. Es decir, dado $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que $1 \in S$ y $n + 1 \in S$ siempre que $n \in S$, es $S = \mathbb{N}$.

En la práctica, el principio de inducción suele aplicarse en términos de “propiedades” más que en términos de conjuntos, como expresan los siguientes enunciados:

N12’. Principio de inducción: Si para cada número natural n se tiene una propiedad P_n que puede ser cierta o falsa, de tal manera que

(a) P_1 es cierta,

(b) para cada $n \in \mathbb{N}$, suponiendo que P_n es cierta se puede demostrar que P_{n+1} es cierta,

entonces P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

N12’’. Principio de inducción completa: Si para cada número natural n se tiene una propiedad P_n que puede ser cierta o falsa, de tal manera que

(a) P_1 es cierta,

(b) para cada $n \in \mathbb{N}$, suponiendo que $P_1, P_2, \dots, P_n$ son ciertas se puede demostrar que P_{n+1} es cierta,

entonces P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

La ordenación de $\mathbb{N}$ no es independiente de las operaciones anteriormente consideradas: como es bien sabido, para dos números naturales m, n se tiene $m > n$ si y solo si es $m = n + p$ para algún número natural p .

Es un hecho notable, señalado por el matemático italiano **G. Peano** en su obra *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Bocca, 1889) que todas las propiedades de los números naturales pueden deducirse de las siguientes, llamadas en su honor *axiomas de Peano para los números naturales*:

P1: Para todo número natural n existe otro número natural, n_s , que llamaremos siguiente o sucesor de n .

P2: Existe un número natural, que denotamos por 1, tal que $n_s \neq 1$ cualquiera que sea el número natural n .

P3: Para números naturales cualesquiera m y n , es $m_s = n_s$ si y solo si $m = n$.

P4. (Principio de inducción): Si un conjunto S de números naturales satisface las dos condiciones $1 \in S$ y $n \in S$ implica $n_s \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$.

Las operaciones de suma y producto y la relación de orden se definen entonces en términos de “siguientes”, véase por ejemplo [BIRKHOFF-MACLANE].

1.1.2. Números enteros y racionales

El conjunto de los números enteros $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, que amplía el de los naturales, se denota por $\mathbb{Z}$. En él hay definidas dos operaciones, suma y producto, y una relación de orden, cuyas propiedades fundamentales recogemos a continuación:

Dados $m, n, p \in \mathbb{Z}$, se cumple

Z1. Propiedad asociativa de la suma: $(m + n) + p = m + (n + p)$.

Z2. Propiedad conmutativa de la suma: $m + n = n + m$.

Z3. Existencia de elemento neutro (cero) para la suma: Hay un número entero, que denotamos por 0, tal que $0 + n = n + 0 = n$.

Z4. Existencia de elemento opuesto para la suma: Hay un número entero (y solo uno), que denotamos por $-n$, tal que $(-n) + n = n + (-n) = 0$.

Las propiedades Z1 a Z4 pueden resumirse diciendo que $\mathbb{Z}$ es un grupo conmutativo para la suma.

Z5. Propiedad asociativa del producto: $(mn)p = m(np)$.

Z6. Propiedad conmutativa del producto: $mn = nm$.

Z7. Existencia de elemento neutro (identidad) para el producto: Hay un número entero, que denotamos por 1, tal que $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.

Z8. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $m(n + p) = mn + mp$.

Las propiedades Z1 a Z8 pueden resumirse diciendo que $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo para la suma y el producto.

Z9. Propiedad reflexiva de la ordenación: $m \leq m$.

Z10. Propiedad antisimétrica de la ordenación: Si $m \leq n$ y $n \leq m$, entonces $m = n$.

Z11. Propiedad transitiva de la ordenación: Si $m \leq n$ y $n \leq p$, entonces $m \leq p$.

Z12. Propiedad de orden total: Siempre es $m \leq n$ o $n \leq m$.

Nótese que no va a ser válido un principio de buena ordenación igual que para los números naturales: por ejemplo, el propio conjunto $\mathbb{Z}$ no tiene elemento mínimo, pues para cada $n \in \mathbb{Z}$ es $n - 1 < n$. Sin embargo, vamos a tener una propiedad análoga para cierta clase de subconjuntos:

Z13. Principio de buena ordenación de los conjuntos minorados: *Todo conjunto no vacío de números enteros acotado inferiormente posee un elemento mínimo, es decir, dado $S \subseteq \mathbb{Z}$ no vacío tal que para algún $k \in \mathbb{Z}$ es $k \leq n$ para todo $n \in S$, existe un elemento m en S tal que $m \leq n$ para todo $n \in S$.*

En $\mathbb{Z}$ puede hablarse del “siguiente” a un número entero, en el sentido de que entre n y $n + 1$ no hay ningún otro número entero. No se cumple, sin embargo, el principio de inducción, sino una propiedad similar aunque más débil:

Z14: *Un conjunto de números enteros que contenga un número k y que con cada n contenga a $n + 1$, debe contener a todos los números enteros mayores o iguales que k . Es decir, dado $S \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $k \in S$ y $n + 1 \in S$ siempre que $n \in S$, se tiene $S \supseteq \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$.*

Como es sabido, la introducción de los números enteros hace posible la substracción, pero no la división. Esta operación es posible (¡dividiendo por elementos distintos de 0!) en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, cocientes de números enteros (con denominador no nulo). Las propiedades básicas de la suma, producto y orden de números racionales se suman a continuación.

Dados $a, b, c \in \mathbb{Q}$, se cumple

Q1. Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Q2. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a$.

Q3. Existencia de elemento neutro (cero) para la suma: Hay un número racional, que denotamos por 0, tal que $0 + a = a + 0 = a$.

Q4. Existencia de elemento opuesto para la suma: Hay un número racional (y solo uno), que denotamos por $-a$, tal que $(-a) + a = a + (-a) = 0$.

Las propiedades Q1 a Q4 expresan que $\mathbb{Q}$ es un grupo conmutativo para la suma.

Q5. Propiedad asociativa del producto: $(ab)c = a(bc)$.

Q6. Propiedad conmutativa del producto: $ab = ba$.

Q7. Existencia de elemento neutro (identidad) para el producto: Hay un número racional, que denotamos por 1, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Q8. Existencia de inverso para el producto: Si $a \neq 0$, hay un número racional (y solo uno) que denotamos por a^{-1} o $1/a$, tal que $a^{-1}a = a a^{-1} = 1$.

Q9. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $a(b + c) = ab + ac$.

Las propiedades Q1 a Q9 expresan que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo para la suma y el producto.

Q10. Propiedad reflexiva de la ordenación: $a \leq a$.

Q11. Propiedad antisimétrica de la ordenación: Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Q12. Propiedad transitiva de la ordenación: Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Q13. Propiedad de orden total: Siempre es $a \leq b$ o $b \leq a$.

Q14. Compatibilidad del orden con la suma: Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.

Q15. Compatibilidad del orden con el producto por elementos no negativos: Si $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$.

Las propiedades Q1 a Q15 expresan que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado.

Señalaremos que en $\mathbb{Q}$ no hay ninguna propiedad similar al principio de inducción. Ni siquiera puede hablarse del “siguiente” a un número dado: concretamente, entre dos números racionales

distintos siempre hay otro número racional. Pues si $a < b$, se tiene $a < \frac{a+b}{2} < b$ (¿por qué?).

1.1.3. La recta numérica

La representación gráfica de los números como puntos de una recta permite visualizar, sobre todo, las relaciones de orden. La suma es aún una construcción lineal, pero para construir productos hay que pasar al plano.

Esta representación permite descubrir “huecos” en $\mathbb{Q}$: ningún número racional puede representar la longitud de la diagonal del cuadrado de lado unidad. Dicho de otra forma, no existe ningún número racional a tal que $a^2 = 2$ (porque si fuese $a = m/n$ con m y n enteros sin factores primos comunes ($n \neq 0$), se sigue que $m^2 = 2n^2$, con lo que m^2 –y por tanto m – debe admitir el factor 2; pero entonces $m = 2p$ para algún entero p , y sustituyendo en la igualdad que teníamos queda $4p^2 = 2n^2$, es decir, $2p^2 = n^2$, luego n^2 –y por tanto n – debe admitir el factor 2, que es así factor común a m y n , contra lo supuesto).

Para poder hablar de números que puedan representar estas cantidades es necesario proceder a una nueva ampliación de los sistemas numéricos. Así pasamos a considerar el conjunto $\mathbb{R}$ de los *números reales* o, más exactamente, las propiedades de $\mathbb{R}$ (sin entrar en su naturaleza: no diremos “qué es” un número real, sino “cómo funcionan” los números reales).

1.1.4. Números reales: operaciones algebraicas

En $\mathbb{R}$ hay dos operaciones, suma y producto, respecto de las cuales es un cuerpo conmutativo. Esto significa, como ya sabemos, que si a, b, c son números reales cualesquiera, se cumple:

R1. Propiedad asociativa de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

R2. Propiedad conmutativa de la suma: $a + b = b + a$.

R3. Existencia de elemento neutro (cero) para la suma: Hay un número real, que denotamos por 0 , tal que $0 + a = a + 0 = a$.

R4. Existencia de elemento opuesto para la suma: Hay un número real (y solo uno), que denotamos por $-a$, tal que $(-a) + a = a + (-a) = 0$.

R5. Propiedad asociativa del producto: $(ab)c = a(bc)$.

R6. Propiedad conmutativa del producto: $ab = ba$.

R7. Existencia de elemento neutro (identidad) para el producto: Hay un número real distinto de 0 , que denotamos por 1 , tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

R8. Existencia de inverso para el producto: Si $a \neq 0$, hay un número real (y solo uno) que denotamos por a^{-1} o $1/a$, tal que $a^{-1}a = a a^{-1} = 1$.

R9. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $a(b + c) = ab + ac$.

Las propiedades comúnmente usadas en los cálculos algebraicos se deducen de éstas. Por ejemplo, veamos en detalle cómo se probaría que para todo número real a es $a \cdot 0 = 0$:

$$a \cdot 0 \stackrel{R3}{=} a(0 + 0) \stackrel{R9}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$$

y de R4 se sigue

$$0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + [(a \cdot 0 + a \cdot 0)] \stackrel{R1}{=} [-(a \cdot 0) + a \cdot 0] + a \cdot 0 \stackrel{R4}{=} 0 + a \cdot 0 \stackrel{R3}{=} a \cdot 0.$$

1.2. Ordenación de los números reales

1.2.1. Desigualdades fundamentales en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{R}$ hay una relación de orden cuyas primeras propiedades son las mismas que las de la ordenación de los números racionales:

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$,

R10. (reflexiva): $a \leq a$.

R11. (antisimétrica): $a \leq b$ y $b \leq a \implies a = b$.

R12. (transitiva): $a \leq b$ y $b \leq c \implies a \leq c$.

R13. (orden total): $a \leq b$ ó $b \leq a$.

R14. (relación con la suma): $a \leq b \implies a + c \leq b + c$.

R15. (relación con el producto): Si $c \geq 0$, $a \leq b \implies ac \leq bc$.

En particular, $a \geq 0$ y $b \geq 0 \implies ab \geq 0$.

De estas pueden deducirse sucesivamente (es un ejercicio recomendable) las siguientes desigualdades, que utilizaremos de aquí en adelante sin más comentario según las necesitemos.

Para $x, y \in \mathbb{R}$, pondremos $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$. Así, dados $a, b, c, d, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

1. $a \leq b$ y $b < c \implies a < c$.
2. $a < b$ y $b \leq c \implies a < c$.
3. $a < b \implies a + c < b + c$.
4. *suma de desigualdades:* $a \leq b$ y $c \leq d \implies a + c \leq b + d$, siendo entonces $a + c = b + d$ si y solo si $a = b$ y $c = d$.
5. $a_1, \dots, a_n \geq 0 \implies a_1 + \dots + a_n \geq 0$; además, $a_1 + \dots + a_n > 0$ excepto si $a_1 = \dots = a_n = 0$.
6. $a \leq b \iff -a \geq -b$.
7. $a < b \iff -a > -b$.
8. $a > 0 \iff -a < 0$.
9. $a > 0$ y $b > 0 \implies ab > 0$.
10. $a > 0$ y $b < 0 \implies ab < 0$.
11. $a < 0$ y $b > 0 \implies ab < 0$.
12. $a < 0$ y $b < 0 \implies ab > 0$.
13. $a \neq 0 \implies a^2 > 0$, y así $a^2 \geq 0$ siempre.
14. $2ab \leq a^2 + b^2$.
15. $1 > 0$, $-1 < 0$.
16. $a < b$ y $c \geq 0 \implies ac \leq bc$, siendo entonces $ac < bc$ si y solo si $c \neq 0$.
17. $a \leq b$ y $c < 0 \implies ac \geq bc$, siendo entonces $ac > bc$ si y solo si $a < b$.
18. *producto de desigualdades:* si $b \geq 0$ y $c \geq 0$, $a \leq b$ y $c \leq d \implies ac \leq bd$.
19. si $b \geq 0$ y $c \geq 0$, $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $ac < bd$ excepto si $d = 0$ o bien $a = b = 0$ o bien $b = c = 0$ o bien $a = b$ y $c = d$.
20. $0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2$.
21. $0 \leq a < b \implies a^2 < b^2$.
22. $a^2 \leq b^2$ y $b \geq 0 \implies a \leq b$.
23. $a^2 < b^2$ y $b > 0 \implies a < b$.

$$24. \quad a > 0 \iff \frac{1}{a} > 0.$$

$$25. \quad 0 < a \leq b \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

$$26. \quad a \leq b < 0 \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

1.2.2. Valor absoluto de un número real. Desigualdades básicas

El *valor absoluto* de un número real a es el número real no negativo

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0; \\ -a, & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

Gráficamente corresponde a la distancia de a al origen.

Definición 1.2.1 (distancia entre números reales). Dadas $a, b \in \mathbb{R}$, llamaremos *distancia entre a y b* al número real no negativo $|a - b|$.

Gráficamente, $|a - b|$ mide la ‘distancia geométrica’ entre a y b .

Recogemos las propiedades del valor absoluto que son de mayor interés para el resto del curso. Si a, b, c, d , denotan números reales cualesquiera, se verifica:

1. $|1| = 1; |-1| = 1.$
2. $|-a| = |a|.$
3. $-|a| \leq a \leq |a|.$
4. $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b.$
5. $|a| < b \iff -b < a < b.$
6. $|a| > b \iff a > b \text{ ó } a < -b$ (supuesto $b \geq 0$).
7. $|a| \geq 0; |a| = 0 \iff a = 0.$
8. $|ab| = |a||b|.$
9. *desigualdad triangular* $|a + b| \leq |a| + |b|.$
10. *desigualdad triangular “inversa”*: $||a| - |b|| \leq |a - b|.$
11. $|a^{-1}| = |a|^{-1}$ siempre que $a \neq 0.$
12. $a^2 \leq b^2 \iff |a| \leq |b|$ y $a^2 = b^2 \iff |a| = |b|.$
13. $|a| \leq b \iff a^2 \leq b^2$ y $b \geq 0.$

Ejercicio. Demostrar que

$$|x| \leq \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0 \implies x = 0.$$

¿Para qué números x se cumple que $x \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$?

1.2.3. Conjuntos acotados en $\mathbb{R}$: cotas, supremo, ínfimo, máximo, mínimo de un conjunto

Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}$, si para algún número real a es $a \leq s$ para todo $s \in S$, diremos que a es una **cota inferior** de S y que S está **acotado inferiormente** (por a).

Si para algún número real b fuese $b \geq s$ para todo $s \in S$, diremos que b es una **cota superior** de S y que S está **acotado superiormente** (por b).

Cuando S está acotado a la vez superior e inferiormente, se dice que S está **acotado**.

Un número real m es **mínimo** de un conjunto S si pertenece al conjunto y es una cota inferior del mismo. Es decir, si $m \in S$ y $m \leq s$ para todo $s \in S$. Pondremos entonces $m = \min S$.

Un número real M es **máximo** de un conjunto S si pertenece al conjunto y es una cota superior del mismo. Es decir, si $M \in S$ y $M \geq s$ para todo $s \in S$. Pondremos entonces $M = \max S$.

Un número real a es **ínfimo** de un conjunto S si es la mayor cota inferior del S . Es decir, si $a \leq s$ para todo $s \in S$ y cada $a' > a$ no es cota inferior de S , de modo que se tendrá $a' > s'$ para algún $s' \in S$. Pondremos entonces $a = \inf S$.

(Dicho de otra forma, el ínfimo de un conjunto es el máximo del conjunto de cotas inferiores del primero.)

Nótese que si $a = \inf S$, será $a = \min S$ si y solo si $a \in S$.

Un número real b es **supremo** de un conjunto S si es la menor cota superior del S . Es decir, si $b \geq s$ para todo $s \in S$ y cada $b' < b$ no es cota superior de S , de modo que se tendrá $b' < s'$ para algún $s' \in S$. Pondremos entonces $b = \sup S$.

(Dicho de otra forma, el supremo de un conjunto es el mínimo del conjunto de cotas superiores del primero.)

Nótese que si $b = \sup S$, será $b = \max S$ si y solo si $a \in S$.

Ejemplos. Ver [APOSTOL1, pág. 29].

1.2.4. Axioma del supremo (axioma de completitud de $\mathbb{R}$ para el orden)

R16. Completitud de $\mathbb{R}$: *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.*

La propiedad simétrica (*todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo*) es consecuencia de lo anterior.

1.2.5. Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$: consecuencias

Teorema 1.2.2 (propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$). *Dados dos números reales a, b , con $a > 0$, existe algún número natural n tal que $na > b$.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Si la tesis no fuese cierta, es decir, si hubiese números reales a, b , con $a > 0$, tales que $na \leq b$ para todo número natural n , veamos que se llega a una contradicción. En tal caso, el conjunto $S = \{na; n \in \mathbb{N}\}$ estaría acotado superiormente (por b) siendo no vacío, luego por la propiedad de completitud tendría supremo. Sea s este supremo, es decir, $s = \sup S = \sup\{na; n \in \mathbb{N}\}$. Puesto que $a > 0$, $s - a < s$; según la definición de supremo, $s - a$ ya no puede ser cota superior del conjunto S , de modo que existirá algún elemento en S estrictamente mayor que $s - a$. Dicho elemento será de la forma n_0a con $n_0 \in \mathbb{N}$, y así $s - a < n_0a$. Pero esto implica que $s < n_0a + a = (n_0 + 1)a$ y obviamente $(n_0 + 1)a \in S$, con lo cual s no podría ser cota superior de S , contradicción. $\square$

Aplicada al caso particular $a = 1$, la propiedad arquimediana muestra que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no está acotado superiormente por ningún número real.

Como consecuencia de la propiedad arquimediana se puede probar que todo número real está “encajado” entre dos enteros consecutivos.

Teorema 1.2.3 (parte entera de un número real). *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un número entero (y uno solo), que suele denotarse con $[x]$, tal que*

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Denominaremos a $[x]$ la **parte entera** de x .

Demostración. La desigualdad del enunciado equivale a decir que $[x]$ es el mayor número entero menor o igual que x . Para probar que existe, podemos utilizar uno cualquiera de los siguientes caminos:

Primer camino. Comenzamos por observar que todo conjunto no vacío de números enteros acotado superiormente tiene un elemento máximo, como se deduce del principio de buena ordenación de los conjuntos minorados (**Z13**) sin más que tomar opuestos. Pero el conjunto S de enteros menores o iguales que x es no vacío, pues por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-x \leq n$ y así $-n \geq x$, luego $-n \in S$; además, S está acotado superiormente (por x o por cualquier número natural superior a x , si no queremos salirnos de $\mathbb{Z}$). Por lo tanto, S tiene un elemento máximo, llamémosle m , que por estar en S será menor o igual que x y por ser máximo excluye que $m + 1$ (entero estrictamente mayor que m) pueda figurar en S , lo que implica que $m + 1 > x$.

Segundo camino. Utilizaremos que todos los números naturales son mayores o iguales que 1 (¡demostrarlo por inducción!) y que los números naturales son justamente los enteros positivos. Llamando nuevamente S al conjunto de enteros menores o iguales que x , S es no vacío por el argumento anterior y está acotado superiormente por x ; aplicando el axioma de completitud, S tiene un supremo, al que vamos a llamar s . Como $s - 1$ ya no es cota superior de S , por ser estrictamente menor que s , existirá $m \in S$ tal que $s - 1 < m \leq s$. Pero m también es cota superior de S , dado que si algún $n \in S$ verificase $n > m$ obtendríamos $m < n \leq s < m + 1$, de donde $0 < n - m < 1$, y $n - m$ sería un entero positivo menor que 1, imposible. Por tanto vemos que hay un elemento de S que es cota superior de S , es decir, que es el máximo de S , y como antes deberá cumplir $m \leq x < m + 1$. $\square$

La propiedad arquimediana permite también deducir cómo están “repartidos” en $\mathbb{R}$ los números racionales.

Teorema 1.2.4 (densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *Dados dos números reales a, b , con $a < b$, existe algún número racional r tal que $a < r < b$.*

Comentario. Si existe tal r , podrá escribirse en la forma $r = m/n$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, de modo que hemos de encontrar $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $a < m/n < b$ o, lo que es lo mismo, $na < m < nb$. Es intuitivamente claro, pensando en la representación gráfica de $\mathbb{R}$, que entre dos números a “distancia” mayor que 1 siempre se puede incluir un número entero (suponiendo los dos números positivos, por ejemplo, superponiendo el segmento unidad consigo mismo hacia la derecha, la primera vez que sobrepasemos el número más cercano al origen, no habremos sobrepasado el otro número). Esta es la idea que vamos a tratar de utilizar.

Demostración. La propiedad arquimediana aplicada a $b - a > 0$ y a 1 nos asegura la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(b - a) > 1$, con lo cual $nb > na + 1$.

Sea ahora $S = \{p \in \mathbb{Z} : p > na\}$. Este es un conjunto no vacío (¿por qué?) de números enteros acotado inferiormente en $\mathbb{Z}$ (¿por qué?); según la propiedad Z13, posee un elemento mínimo. Llamando $m = \text{mín } S$, puesto que $m \in S$ es $m > na$; y como es el mínimo de S , $m - 1$ no puede estar en S , lo que significa que $m - 1 \leq na$. Pero entonces $m \leq na + 1 < nb$; así pues, $na < m < nb$ y finalmente $a < m/n < b$. $\square$

Teorema 1.2.5 (densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *Dados dos números reales a, b , con $a < b$, existe algún número irracional x tal que $a < x < b$.*

Demostración. Es suficiente encontrar un número irracional y . En efecto, si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para cada $r \in \mathbb{Q}$ se tiene $r + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (pues si fuese $r + y \in \mathbb{Q}$, como la diferencia de dos números racionales es asimismo un número racional, también $y = (r + y) - r \in \mathbb{Q}$). Puesto que $a - y < b - y$, según acabamos de probar existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a - y < r < b - y$, de donde $a < r + y < b$ y $r + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Veamos, pues, que existe $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para ello, como ya sabemos que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2, vamos a *demostrar* que existe un número real positivo de cuadrado 2 (número que representamos por $\sqrt{2}$). Consideremos el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$. Este es un conjunto *no vacío* de números reales (por ejemplo, $1 \in S$), acotado superiormente (por ejemplo, por 2: ya que si $x > 2$, $x^2 > 4 > 2$), luego tiene supremo.

Sea $y = \sup S$ (como $1 \in S$, $y \geq 1 > 0$). Comprobemos, por exclusión, que $y^2 = 2$. No puede ser $y^2 > 2$, porque entonces tomando por ejemplo $h = \min\{y, (y^2 - 2)/2y\} > 0$ se tendría

$$(y - h)^2 = y^2 - 2yh + h^2 > y^2 - 2yh \geq y^2 - (y^2 - 2) = 2,$$

de modo que si $x \in S$, $(y - h)^2 > 2 \geq x^2$, de donde $y - h > x$, es decir, $y - h$ sería una cota superior de S ¡estrictamente menor que su supremo!

Pero tampoco puede ser $y^2 < 2$, porque entonces tomando por ejemplo $h = \min\{y, (2 - y^2)/3y\} > 0$, se tendría $(y + h)^2 = y^2 + 2yh + h^2 \leq y^2 + 2yh + yh = y^2 + 3yh \leq y^2 + (2 - y^2) = 2$, o sea, $y + h \in S$, con lo cual el supremo de S no sería cota superior de S , absurdo. Queda así como única posibilidad $y^2 = 2$. $\square$

1.2.6. Intervalos en $\mathbb{R}$

Reciben el nombre de *intervalos* los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos del siguiente modo (a, b son números reales cualesquiera):

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto acotado de extremos } a, b) \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{(intervalo semiabierto—por la derecha— de extremos } a, b) \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{(intervalo semiabierto—por la izquierda— de extremos } a, b) \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{(intervalo cerrado acotado de extremos } a, b) \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} && \text{(intervalo abierto no acotado de origen } a) \\ [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{(intervalo cerrado no acotado de origen } a) \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} && \text{(intervalo abierto no acotado de extremo } b) \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} && \text{(intervalo cerrado no acotado de extremo } b) \\ (-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nótese que si $a > b$, $(a, b) = \emptyset$, de modo que el conjunto vacío es un intervalo.

Los intervalos de $\mathbb{R}$ pueden ser caracterizados mediante la *propiedad de los valores intermedios*:

Proposición 1.2.6 (caracterización de los intervalos reales). *Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un intervalo si y solo si dados $x, y \in I$, cada $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq z \leq y$ también pertenece a I . (Dicho de otro modo: con cada dos valores están también todos los intermedios.)*

Demostración. Para probar la implicación directa basta un examen de todos los casos. Por ejemplo, si $I = (a, b)$, $x, y \in I$, y $z \in \mathbb{R}$ es tal que $x \leq z \leq y$, se tiene $a < x \leq z \leq y < b$, luego $a < z < b$ y por definición $z \in I$.

La implicación inversa es trivial en el caso de que $I = \emptyset$. Suponemos, pues, $I \neq \emptyset$. Pueden presentarse las siguientes situaciones: (1) I es acotado. (2) I es acotado superiormente pero no inferiormente. (3) I es acotado inferiormente pero no superiormente. (4) I no es acotado superior ni inferiormente. Veamos cada una de ellas.

(1) I es acotado. Sea $a = \inf I$, $b = \sup I$. Obviamente entonces $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$, pues $c \in (a, b) \iff a < c < b$, y por definición de supremo e ínfimo existirán un $x \in I$ con $x < c$ y un $y \in I$ con $c < y$, luego $c \in I$; por otra parte, también por definición de supremo e ínfimo, de $x \in I$ se sigue $a \leq x \leq b$, o sea, $x \in [a, b]$. Ahora,

si $a, b \in I$, $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\} \subseteq I \subseteq [a, b]$, luego $I = [a, b]$,
 si $a \in I$, $b \notin I$, $[a, b) = (a, b) \cup \{a\} \subseteq I \subseteq [a, b] \setminus \{b\} = [a, b)$, luego $I = [a, b)$,
 si $a \notin I$, $b \in I$, $(a, b] = (a, b) \cup \{b\} \subseteq I \subseteq [a, b] \setminus \{a\} = (a, b]$, luego $I = (a, b]$,
 si $a \notin I$, $b \notin I$, $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b] \setminus \{a, b\} = (a, b)$, luego $I = (a, b)$.

(2) I es acotado superiormente pero no inferiormente. Sea $a = \sup I$, con lo que $(-\infty, a) \subseteq I \subseteq (-\infty, a]$, pues para cada $z \in I$ es $z \leq a$ y dado $z < a$, existe $y \in I$ con $z < y$ (por definición de supremo) y existe $x \in I$ con $x < z$ (I no está acotado inferiormente), que con la hipótesis del enunciado da $z \in I$. En consecuencia,

si $a \in I$, $(-\infty, a] = (-\infty, a) \cup \{a\} \subseteq I \subseteq (-\infty, a]$, luego $I = (-\infty, a]$,

si $a \notin I$, $(-\infty, a) \subseteq I \subseteq (-\infty, a] \setminus \{a\} = (-\infty, a)$, luego $I = (-\infty, a)$.

Los restantes casos se analizan de forma análoga: en (3) se obtiene $I = (a, +\infty)$ o $I = [a, +\infty)$, donde $a = \inf I$, y en (4) queda $I = \mathbb{R}$. $\square$

1.3. APÉNDICE. Expresión decimal de un número real

En esta exposición, seguiremos esencialmente la que puede verse en [APOSTOL2, págs. 13–15].

Los números reales de la forma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde a_0 es un número entero no negativo y $a_1, \dots, a_n$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_j \leq 9$, se expresan normalmente de la forma $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$. Esta expresión se llama representación decimal finita. Estos números son racionales, pero no todo número racional tiene una representación decimal finita (véase [APOSTOL2, págs. 13–14]).

Proposición 1.3.1 (aproximaciones decimales finitas de los números reales). *Dado un número real $x \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un decimal finito $r_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ tal que*

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

En consecuencia,

$$x = \sup\{r_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Para construir los r_n basta tomar $a_0 = [x]$, $a_k = [10^k x] - 10[10^{k-1} x]$, $1 \leq k \leq n$ (ver detalles en [APOSTOL2, págs. 14–15]).

Por otra parte, x es cota superior de $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ por construcción, y es la menor de las cotas superiores porque si $y < x$ es posible encontrar un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $10^n > \frac{1}{x - x'}$ (¿por qué?) y para este n es $r_n > x'$ (¿por qué?). $\square$

Que x es el supremo del conjunto $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ suele expresarse poniendo

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

y se dice entonces que $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ es una *representación decimal infinita* de x . En ciertos casos, es posible obtener el mismo supremo para dos representaciones decimales infinitas distintas, ver [APOSTOL2, pág. 15].

Para $x = 0$, suele tomarse como representación decimal $0,00 \dots 0 \dots$; y para $x < 0$, se parte de una representación decimal de $-x$ y se coloca un signo $-$ delante.

(Hay una presentación más geométrica y ‘computacional’ en [LAX, §1.3].)

Si en vez de usar potencias de 10 se utilizan potencias de 2, se obtiene la **representación binaria** de los números reales; la representación *hexadecimal* resulta al tomar potencias de 16. Ambas han adquirido gran importancia (especialmente la primera) en relación con los ordenadores. (Ver detalles en [ABELLANAS-GALINDO, capítulo 3] y [BARTLE-SHERBERT, págs. 73 y siguientes].)

Bibliografía

- [ABELLANAS-GALINDO] **Abellanas, L. - Galindo, A.:** *Métodos de cálculo*. Serie Schaum, Mc Graw-Hill/Interamericana de España, Madrid, 1989. Citado en la(s) página(s) 10
- [APOSTOL1] **Apostol, T. M.:** *Calculus, vol. I* (segunda edición). Reverté, Barcelona, 1989. Citado en la(s) página(s) 7
- [APOSTOL2] **Apostol, T. M.:** *Análisis Matemático* (segunda edición). Reverté, Barcelona, 1991. Citado en la(s) página(s) 10
- [BARTLE-SHERBERT] **Bartle, R. G. - Sherbert, D. R.:** *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*. Limusa, México, 1990. Citado en la(s) página(s) 10
- [BIRKHOFF-MACLANE] **Birkhoff, G. - MacLane, S.:** *Algebra moderna*. Teide, Barcelona, 1960. Citado en la(s) página(s) 2
- [LAX] **Lax, P. - Burstein, S. - Lax, A.:** *Calculus with Applications and Computing*. Springer, Berlín, 1976. Citado en la(s) página(s) 10