Guía de trabajos prácticos número 4

MODELOS NO LINEALES, CAOS Y FRACTALES

1. Temas a tratar

- La ecuación logística.
- Los exponentes de Lyapunov.
- Oscilaciones forzadas y el espacio de Lyapunov.
- Los fractales en la fisiología humana.

2. Objetivos

- Ver en hechos como nace el caos a partir de sistemas determinísticos muy sencillos.
- Comprender la relación conceptual que une el caos con los fractales.
- Aplicar el método de los coeficientes de Lyapunov mediante una implementación computacional.
- Obtener una visión de la importancia de los sistemas no lineales caóticos en la fisiología y anatomía humana.
- Analizar algunos ejemplos interesantes de la aparición de estructuras fractales en la naturaleza.

3. Revisión teórica

En esta sección no se pretende realizar un análisis teórico minucioso del tema, sólo refrescar algunos conceptos básicos necesarios para la realización del trabajo práctico.

3.1 Caos

Generalmente el hombre tiende a tratar con situaciones estables, que no varían en el tiempo o si lo hacen, que estas variaciones estén en torno a las situaciones precedentes. Esta búsqueda de una cierta *estabilidad* hace que tomemos ciertas actitudes frente a fenómenos *no estables*: si los cambios duran muy poco tiempo en relación a los períodos estables los ignoramos, si los cambios duran un cierto tiempo tratamos de encontrar alguna regularidad en ellos y de no encontrar ningún patrón estable los encasillamos dentro de los *ruidos*. La teoría del caos retoma estos últimos casos para dejar de estudiar ciertos mal clasificados *ruidos* desde el punto de vista *estable*, es decir, dejar de analizar sólo algunos parámetros estables dentro del fenómeno como lo hacíamos mediante el análisis estadístico.

Ciertos sistemas no lineales muestran un comportamiento, bajo ciertas condiciones, impredecible a pesar de no tener ninguna influencia del azar y ser enteramente determinísticos. Llamativamente esto puede suceder en sistemas extremadamente simples.

En estos sistemas no lineales puede identificarse un parámetro del cual depende su comportamiento. Cuando este parámetro cambia podemos encontrarnos con un comportamiento *ordenado* (puntos fijos o ciclos límite en el espacio de fase) o desordenado o *turbulento* (atractores extraños en el espacio de fase).

3.2 Del orden al caos: Bifurcaciones

Cuando variamos continuamente este parámetro característico del sistema encontramos que existe un período en el que el sistema pasa de la estabilidad al caos. Los análisis de las formas en que se produce tal transición han llevado a la clasificación en *rutas al caos*. Una de las rutas más estudiadas es la de duplicación de período o bifurcaciones en horquilla.

Las bifurcaciones en horquilla consisten en una pérdida de la estabilidad de una solución atractiva dando lugar a otra de periodicidad doble.

3.3 Sistemas dinámicos y ecuaciones en recurrencia.

Computacionalmente hablando simularemos la evolución de un sistema dinámico mediante fórmulas de recurrencia obtenidas a partir de las ecuaciones diferenciales que lo describen. Estas fórmulas de recurrencia pueden obtenerse aplicando alguno de los métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales de paso simple o por medio del pasaje a ecuaciones en diferencia.

Podemos expresar en forma genérica la solución de una ecuación diferencial de primer orden y tiempo discreto mediante la siguiente fórmula:

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Si la función F depende de algún parámetro de importancia k aparte del valor de la variable independiente en la iteración anterior notamos:

$$x_{n+1} = F_k(x_n)$$

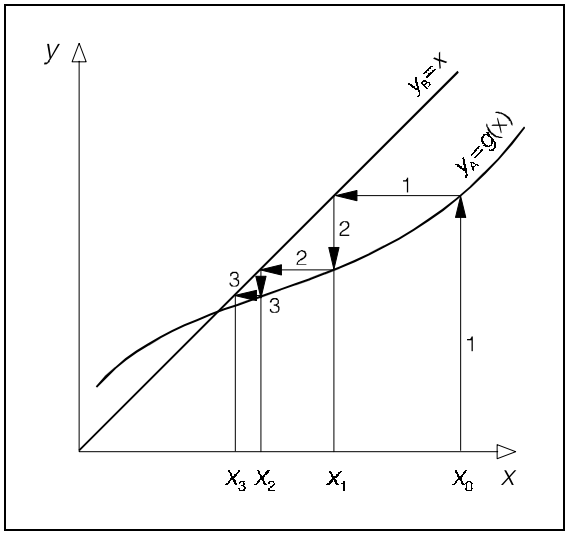
Un punto fijo en una ecuación en diferencias es aquel en el que $x_{n+1}= x_n$ para todo n que un N dado.

Estas aclaraciones serán suficientes para el desarrollo del práctico.

3.4 Los mapas iterados

Una forma de representar la evolución de un sistema dinámico discreto es a través de mapas iterados o diagramas de recurrencia.

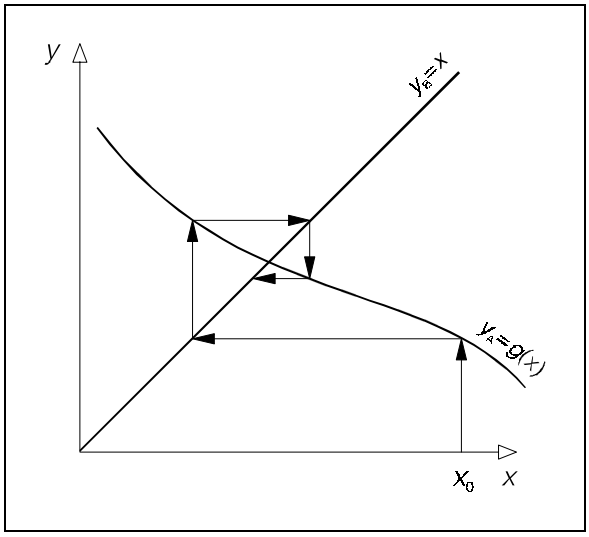
En el caso de la ecuación de recurrencia del apartado anterior podemos colocar en las abcisas de un par de ejes coordenados los valores de x_{n+1} (=y) y en las ordenadas los de x_n (=x). Luego dibujamos la función $y_A=g(x)=F(x_n)$ y la recta $y_B=x$ que representa $x_{n+1}= x_n$. Véase la figura siguiente.



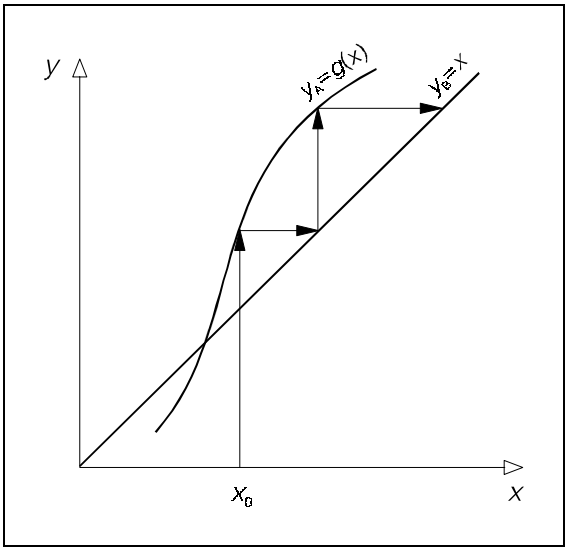
Partiendo de un x_0 dado, evaluamos gráficamente $g(x_0)$ para obtener x_1. Ahora hay que calcular x_2 que está dado por $g(x_1)$, para esto llevamos x_1 hacia las ordenadas mediante la recta $x_{n+1}= x_n$ y de este punto vamos hacia $g(x_1)$. Este proceso continúa y da como resultado el mapa iterado de $g(x)= F(x_n)$.

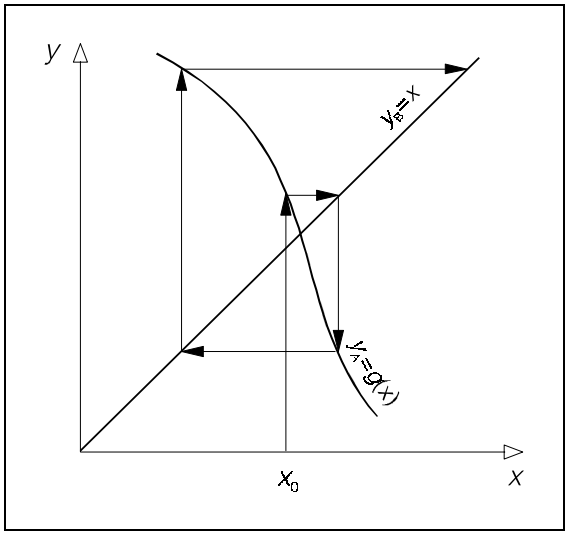
En este caso la salida de sistema, x_n, converge a un valor determinado, es decir hacia un punto en particular del mapa de recurrencia en el que se cumplirá $x_{n+1}= F(x_n)=x_n$ (la salida temporal del sistema es una constante).

Observe el siguiente mapa iterado en el que se encuentra nuevamente un punto fijo atractor para la salida del sistema. En este caso también se cumple que cuando $t \rightarrow \infty$ la salida del sistema se aproxima a la intersección de la recta $y_B=x$ con la función $y_A=g(x)$. Estamos en este caso, en presencia de un *punto fijo* del mapa de recurrencia. Este punto fijo se corresponde con un punto crítico estable en el plano de fase del sistema dinámico.



A continuación se muestran dos nuevos mapas iterados en los que la salida no se aproxima sucesivamente al punto fijo del mapa. En estos casos el punto fijo es inestable.





¿Podrá deducir usted a partir de estas gráficas cual es la condición para que un punto fijo en el mapa iterado sea estable?

Si, como usted habrá observado la condición de estabilidad de un punto fijo x_n^* es:

$$\left|F'(x_n^*)\right| < 1$$

ec.1

Este resultado admite, por supuesto, una demostración formal pero ésta escapa a los fines de esta revisión teórica.

La derivada *F'* puede calcularse derivando a *F* o, de no conocer a *F*, por medio de la definición de la derivada discreta:

$$F'(x_n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_n + \varepsilon) - F(x_n)}{\varepsilon}$$

3.5 Una medida del caos: exponentes de Lyapunov

Cuando estudiamos las dinámicas caóticas encontramos que existe una gran dependencia de las condiciones iniciales. Más aún, una característica de las órbitas caóticas vecinas es que su separación está dada en promedio por una función exponencial (no necesariamente una función exponencial exacta). Es por esto que en la práctica se hace imposible predecir el comportamiento futuro de una solución caótica. Esto se encuentra en contraste con el comportamiento de una órbita cercana a un punto fijo o a una solución periódica.

Estas ideas pueden ser cuantificadas mediante la utilización de los llamados *exponentes de Lyapunov*.

Considere la ecuación de recurrencia $F_k(x_n)$. La iteración de ésta a partir de los valores iniciales x_0 y $x_0 + \varepsilon$ da como resultado $F_k^{\,n}(x_0)$ y $F_k^{\,n}(x_0 + \varepsilon)$. Supongamos que existe un λ tal que:

$$\left|F_k^{\,n}(x_0 + \varepsilon) - F_k^{\,n}(x_0)\right| \approx \varepsilon . e^{n.\lambda}$$

a medida que $\varepsilon \to 0$ y $n \to \infty$ siempre que $\varepsilon . e^{n.\lambda} \to 0$ también, tendremos:

$$\left|\frac{dF_k^{\,n}(x_0)}{dx_n}\right| \approx e^{n.\lambda} \qquad \text{con} \qquad n \to \infty$$

que expresa la separación exponencial promedio entre la órbita partiendo de x_0 y la órbita partiendo de $x_0 + \varepsilon$. Luego podemos escribir:

$$\lambda_k = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\ln\left|\frac{dF_k{}^n(x_0)}{dx_0}\right|\right\} = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\ln\left|F_k{}'(x_{N-1}).F_k{}'(x_{N-2})...F_k{}'(x_0)\right|\right\}$$

$$\lambda_k = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ln\left|F_k{}'(x_n)\right|\right\}$$

ec.2

Así λ_k es una medida de la separación exponencial promedio de las órbitas vecinas a todos los puntos de una órbita alrededor de un atractor. Definimos así el exponente de Lyapunov λ_k para un conjunto invariante F_k asociado al parámetro k por medio de la ecuación 2, si es que dicho límite existe.

Podemos ver que para ciclos estables $\lambda_k<0$ y las órbitas convergen. Sin embargo para atractores extraños encontramos que $\lambda_k>0$ y las órbitas no convergen. Siendo $\left|F_k{}'(x_N)\right|=1$ cuando ocurre una bifurcación tenemos entonces $\lambda_k=0$. Finalmente se llaman ciclos *superestables* cuando $\lambda_k\to -\infty$ ya que en estos casos $\left|F_k{}'(x_N)\right|=0$ y la velocidad de convergencia a la estabilidad es máxima.

Resta agregar que un análisis teórico más amplio permite la definición de los exponentes de Lyapunov para mapas de recurrencia de dimensiones mayores. No tocaremos el tema en esta ocasión ya que no hace a los fines prácticos de esta guía.

3.6 El origen de la ecuación logística

Una de las más sencillas ecuaciones conocidas que describen sistemas dinámicos con comportamiento caótico es la ecuación logística. Ésta ecuación está inspirada en un modelo poblacional propuesto por Lotka en 1925:

$$\frac{dN}{dt} = c\,N$$

ec.3

en donde N es el número de individuos, t el tiempo y la constante real c es la taza de crecimiento de la especie. Esta ecuación diferencial lineal de primer orden da como solución un crecimiento exponencial de la población:

$$N = e^{c.t}$$

cuando $c<0$ tendremos una población que no progresa en este medio: la taza de mortandad es mayor que la taza de natalidad. Sin embargo, con $c>0$ para períodos largos de tiempo en un hábitat con recursos finitos la población no tendería a infinito en el caso real.

Podríamos pensar ahora que lo que sucede es que cuando el número de individuos aumenta la taza de crecimiento decrece por falta de alimentos. Esta idea fue introducida por Verhulst en 1937 mediante la siguiente modificación de la constante:

$$c = r.\left(1-\frac{N}{N_\infty}\right)$$

en donde N_∞ es la máxima población admitida por el medio y r una constante de proporcionalidad. Para valores pequeños de N obtenemos $c=r$ y nos encontramos en la situación anterior (*ec.3*). Sin embargo a medida que N se acerca al límite de individuos N_∞ la taza de crecimiento decrece hasta ser cero cuando $N = N_\infty$. Reemplazando en la *ec.3* la expresión para la taza de crecimiento obtenemos la denominada *ecuación logística*:

$$\frac{dN}{dt} = r\,N\left(1-\frac{N}{N_\infty}\right)$$

ec.4

Usted podrá reconocer esta ecuación ya que fue estudiada con mayor detalle en la unidad III: Modelos Compartimentales.

4. Además usted debería repasar los siguientes tópicos

- Sistemas no lineales.
- Resolución numérica de ecuaciones diferenciales.
- Modelos compartimentales.

5. Caso de estudio

Ahora nos proponemos resolver la ecuación logística (*ec.4*). Para ello apelamos nuevamente a la computadora y los métodos numéricos. También es oportuna una simulación electrónica analógica, si usted lo prefiere puede encontrar mayores detalles en los artículos entregados con esta guía de trabajos prácticos.

Si aplicamos el método de Euler de primer orden con una longitud de paso h podemos obtener una buena solución para la dinámica de esta ecuación. Para simplificar el desarrollo usted puede efectuar el siguiente reemplazo:

$$N_\infty = \frac{h\,r}{1+h\,r}$$

para obtener

$$N_{n+1} = (1+h\,r)\,N_n\,(1-N_n).$$

Finalmente hagamos:

$$k = 1+h.r$$

ec.5

y trabajemos con:

$$N_{n+1} = k\,N_n\,(1-N_n)$$

ec.6

Ésta ecuación de recurrencia se denomina *ecuación logística* y nos servirá de base para desarrollar el caso de estudio. Para trabajar más cómodos normalizaremos las poblaciones con $0<N<1$ y podremos hablar por ejemplo de 0.25 millones de individuos.

Ahora podemos referirnos a la revisión teórica de la sección 3 donde encontramos que la ecuación de recurrencia tiene la forma:

$$F_k(N_t) = k.N_t(1-N_t)$$

En este caso tendremos que los puntos fijos de la recurrencia (puntos críticos del sistema dinámico) cuando:

$$F_k(N_{t+1}) = N_t \qquad \Rightarrow \qquad (1-k)N_t + kN_t^{\,2} = 0$$

Si consideramos un $k<1$ -la taza de mortandad mayor que la taza de natalidad- la ecuación anterior posee en el intervalo de nuestro interés $[L=(0,1)]$ la única solución $N_n^{(1)}=0$.

Sin embargo cuando tenemos un $k>1$ encontramos las soluciones:

$$N_t^{(1)} = 0 \quad \text{y} \quad N_t^{(2)} = \frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}}$$

ec.7

Sabemos que se partimos de una población inicial N_0 para que consigamos llegar a uno de estos punto fijos en la recurrencia debe cumplirse que:

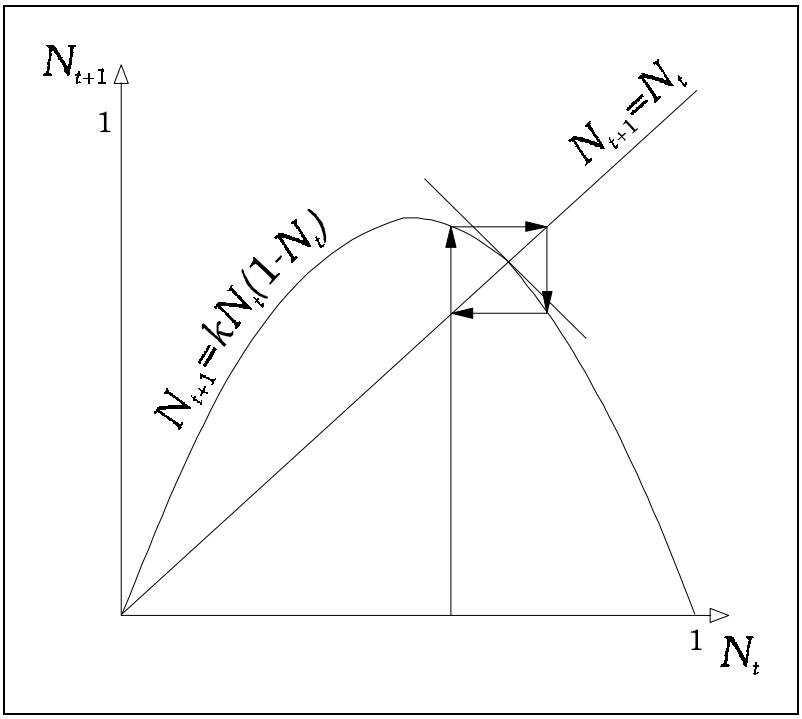
$$\left|F_k'(N_t^*)\right| = \left|k(1-2.N_t^*)\right| < 1$$

ec.8

donde N_n^* es el punto fijo en cuestión. Reemplazando las *ec.7* en la *ec.8* encontramos:

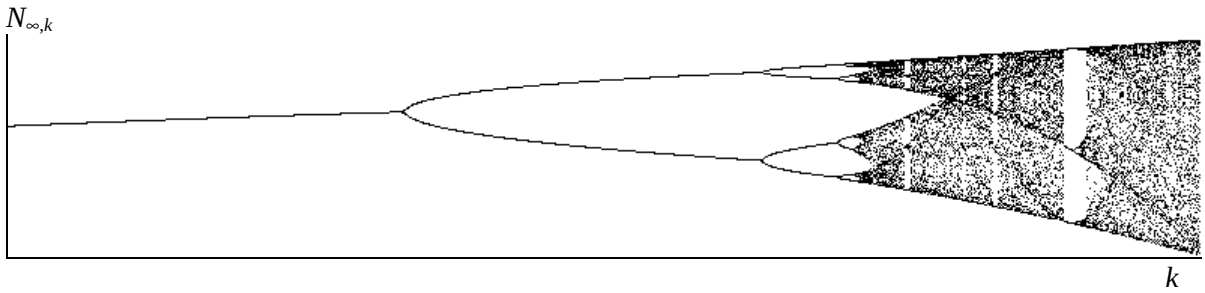
$$-1 < F_k'(N_t^{(1)}) = k < 1 \qquad \text{y} \qquad -1 < F_k'(N_t^{(2)}) = 2-k < 1$$

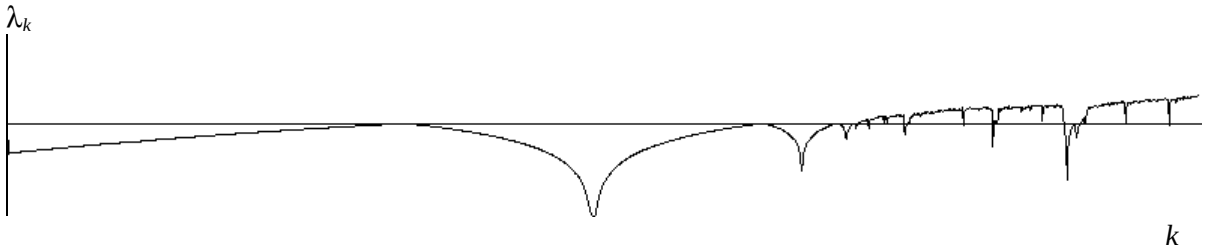
que para k>3 ambos puntos fijos son inestables pero hay que destacar que: la desestabilización de $N_n^{(1)}$ cuando k=1 se produce porque F_1'(0)=1 y para $N_n^{(2)}$ en k=3 tenemos F_1'(0)= -1. Así en k=3 se produce la bifurcación o duplicación de período. Como ejemplo de este caso vea la siguiente figura donde k>3:



Podemos continuar el análisis para encontrar los nuevos puntos de bifurcación de la ecuación logística pero este análisis teórico escapa a los objetivos de este práctico.

El siguiente diagrama muestra los valores a los que tiende el número de individuos cuando $t \to \infty$ y k va desde 2.5 hasta 4. Éste se denomina diagrama de bifurcaciones y se puede apreciar en él una sibisemejanza típica de las estructuras fractales.





el diagrama de abajo muestra el valor del exponente Lyapunov también en función del parámetro *k*.

Para obtener el segundo diagrama se utiliza la *ec.2*. Observe las ventanas de estabilidad en medio del caos, el exponente de Lyapunov predice éstas haciéndose repentinamente negativo. También observe como las bifurcaciones se corresponden con los λ_k=0.

También es interesante observar la respuesta temporal y frecuencial del sistema y correlacionarlas con estos gráficos. El programa provisto por la cátedra LOGISTIC.EXE muestra estas y otras gráficas muy interesantes relacionadas con este sistema. Puede encontrarlo en la red del laboratorios de computación en el directorio V:\BIO1\CAOS\.

6. Trabajos a presentar

6.1 Implementar el caso de estudio

En este punto se le pide que realice una implementación completa del caso de estudio.

Obtenga:

- Respuesta temporal y frecuencial del sistema
- Mapa iterado
- Diagrama de bifurcaciones
- Exponentes de Lyapunov

6.2 Trabajo creativo

Para este punto se adjunta a la guía de trabajos prácticos artículos relacionados con el tema pero es de nuestra preferencia que del grupo de trabajo provenga la propuesta.

La idea que deseen implementar deberá exponerse previamente a uno de los docentes a cargo de los trabajos prácticos para discutir la pertinencia y los alcances del trabajo.

6.3 Análisis y discusión

Se entregan con esta guía cinco artículos introductorios a los fractales y el espacio de Lyapunov. Seleccione dos de ellos y realice un análisis de éstos.

Los artículos son:

- “Caos y fractales en la fisiología humana”
- “Regularidad en la casa del caos”
- “El lenguaje de los fractales”
- “Salto al espacio de Lyapunov”
- “Los diagramas de Lyapunov”

7. Acerca de la implementación

- Haga un correcto uso de las escalas gráficas
- Utilice precisión real en los cálculos
- Tenga cuidado al evaluar la función logaritmo natural

- Considere apropiado un paso de 10^{-3} entre cada valor de *k*.
- Utilice un *N*=1000 (como mínimo) para el cálculo de los exponentes de Lyapunov.
- Para encontrar la respuesta frecuencial del sistema puede utilizar la unidad FFT87b2.PAS provista por la cátedra.
- Grafique sólo unos 50 puntos para cada valor de *k* en el diagrama de bifurcaciones.

8. Condiciones de aprobación

- Implementar correctamente el Caso de Estudio (grupal)
- Superar sin errores un test escrito sobre el Caso de Estudio con preguntas o problemas conceptuales y de implementación (individual)
- Cumplir en tiempo y forma con la presentación del desarrollo del Trabajo Creativo según haya sido solicitado por la cátedra. (grupal)
- Superar una evaluación coloquial acerca de los fundamentos teóricos y aspectos metodológicos del Trabajo Creativo. (grupal)
- Los trabajos se realizan en grupos de hasta 4 personas. No se aceptan trabajos individuales.
- Se aceptan implementaciones conputacionales en: C, C++, Pascal, Object Pascal, Delphi, Basic, Visual Basic, Mathematica, MathCad, MatLab, Simulink. En esta guía en particular se acepta también una implemetación analógica electrónica (consultar con la cátedra).
- Cada integrante del grupo deberá estar en condiciones de fundamentar toda la implementación y los resultados obtenidos.
- Un informe escrito de este práctico (y de todos los demás) deberá presentarse la última semana de cursado. Sin embargo se recomienda que éste se presente junto a la defensa del trabajo. La implementación computacional se deberá adjuntar en un disquete, tanto el código fuente como una versión ejecutable.

9. Un agregado especial

Un médico, un ingeniero civil y una informática estaban discutiendo acerca de cuál era la profesión más antigua del mundo. El médico señaló: “Bueno, en la Biblia dice que Dios creó a Eva de una costilla que le quitó a Adán. Evidentemente, esto requirió cirugía, y por eso bien puedo afirmar que la mía es la profesión más antigua de mundo.” El ingeniero civil interrumpió y dijo: “Pero incluso antes, en el Génesis, se dice que Dios creó el *orden* de los cielos y la tierra a partir de *caos*. Esta fue la primera y desde luego la más espectacular aplicación de la ingeniería civil. Por lo tanto, querido doctor, está usted equivocado: la mía es la más antigua de las profesiones.” La informática se reclinó en su silla, sonrió, y dijo tranquilamente: “Pero bueno, ¿quién piensan que creó el *caos*?”

G. Booch, Complejidad.

10. Bibliografía

- Drazin P.G., Nonlinear systems, Cambridge University Press
- Atkinson L. V., Harley P. J., Introducción a los métodos numéricos con Pascal, Addison-Wesley
- Burghes D.N., Borrie M.S., Modelling with differential equations, Ellis Horwood Limited
- Nakamura S., Applied Numerical Methods with Software, Prentice-Hall