# CAPÍTULO 6. TORQUE Y EQUILIBRIO DE CUERPO RÍGIDO.

En general un cuerpo puede tener tres tipos distintos de movimiento simultáneamente. De traslación a lo largo de una trayectoria, de rotación mientras se está trasladando, en este caso la rotación puede ser sobre un eje que pase por el cuerpo, y si a la vez este eje esta girando en torno a un eje vertical, a la rotación del eje del cuerpo rotante se le llama movimiento de precesión (por ejemplo un trompo), y de vibración de cada parte del cuerpo mientras se traslada y gira. Por lo tanto el estudio del movimiento puede ser en general muy complejo, por esta razón se estudia cada movimiento en forma independiente.

Cuando un cuerpo está en rotación, cada punto tiene un movimiento distinto de otro punto del mismo cuerpo, aunque como un todo se esté moviendo de manera similar, por lo que ya no se puede representar por una partícula. Pero se puede representar como un objeto extendido formado por un gran número de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración. Al tratar la rotación del cuerpo, el análisis se simplifica si se considera como un objeto rígido y se debe tener en cuenta las dimensiones del cuerpo.

***Cuerpo rígido.*** Se define como un cuerpo ideal cuyas partes (partículas que lo forman) tienen posiciones relativas fijas entre sí cuando se somete a fuerzas externas, es decir es no deformable. Con esta definición se elimina la posibilidad de que el objeto tenga movimiento de vibración. Este modelo de cuerpo rígido es muy útil en muchas situaciones en las cuales la deformación del objeto es despreciable.

El movimiento general de un cuerpo rígido es una combinación de movimiento de traslación y de rotación. Para hacer su descripción es conveniente estudiar en forma separada esos dos movimientos.

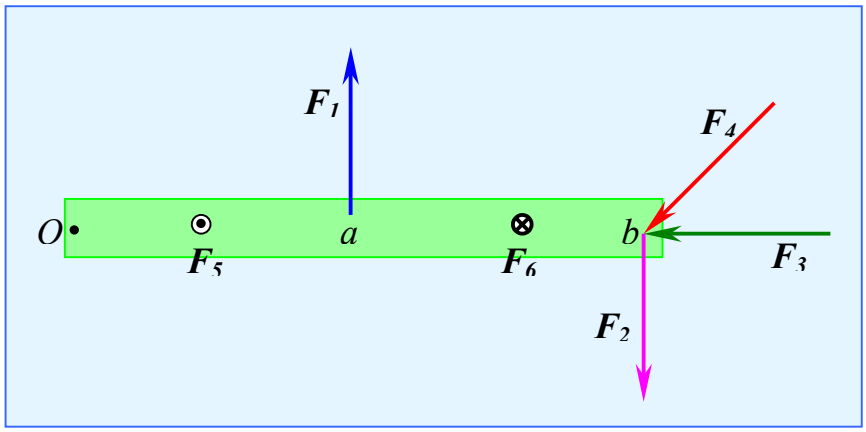
## *6.1 TORQUE DE UNA FUERZA.*

Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, el cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. La propiedad de la fuerza para hacer girar al cuerpo se mide con una magnitud física que llamamos ***torque o momento*** de la fuerza. Se prefiere usar la palabra torque y no momento, porque esta última se emplea para referirnos al momento lineal,

momento angular o momento de inercia, que son todas magnitudes físicas diferentes para las cuales se usa una misma palabra.

Analizaremos cualitativamente el efecto de rotación que una fuerza puede producir sobre un cuerpo rígido. Consideremos como cuerpo rígido a una regla fija en un punto $O$ ubicado en un extremo de la regla, sobre el cual pueda tener una rotación, y describamos el efecto que alguna fuerza de la misma magnitud actuando en distintos puntos, produce sobre la regla fija en $O$, como se muestra en la figura 6.1. Una fuerza $\boldsymbol{F_1}$ aplicada en el punto $a$ produce una rotación en sentido antihorario, $\mathbf{F_2}$ en $b$ produce rotación horaria y con mayor rapidez de rotación que en $a$, $\mathbf{F_3}$ en $b$ pero en dirección de la línea de acción que pasa por $O$ no produce rotación, $\mathbf{F_4}$ inclinada en $b$ produce rotación horaria con menor rapidez de rotación que $\mathbf{F_2}$; $\mathbf{F_5}$ y $\mathbf{F_6}$ aplicadas perpendiculares a la regla no producen rotación. Por lo tanto existe una cantidad que produce la rotación del cuerpo rígido relacionada con la fuerza, que definimos como el ***torque*** de la fuerza.

*Figura 6.1*




Se define el ***torque*** $\boldsymbol{\tau}$ de una fuerza $\boldsymbol{F}$ que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido, en una posición $\boldsymbol{r}$ respecto de cualquier origen $O$, por el que puede pasar un eje sobre el cual se produce la rotación del cuerpo rígido, al producto vectorial entre la posición $\boldsymbol{r}$ y la fuerza aplicada $\boldsymbol{F}$,

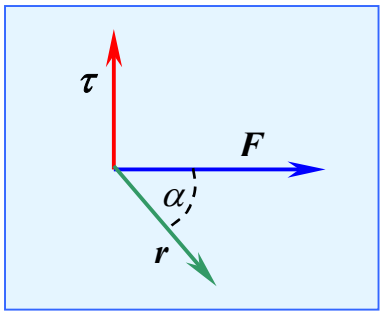
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad (6.1)$$

El *torque* es una magnitud vectorial, si $\alpha$ es el ángulo entre ***r*** y ***F*,** su valor numérico por definición del producto vectorial, es:

$$\tau = r(F sen\alpha) \qquad (6.2)$$

su dirección es siempre perpendicular al plano de los vectores ***r*** y ***F***, cuyo diagrama vectorial se muestra en la figura 6.2, su sentido esta dado por la regla del producto vectorial, la regla del sentido de avance del tornillo o la regla de la mano derecha. En la regla de la mano derecha los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de ***r*** y luego se giran hacia ***F*** a través del ángulo $\alpha$, la dirección del pulgar derecho estirado es la dirección del torque y en general de cualquier producto vectorial.

*Figura 6.2*



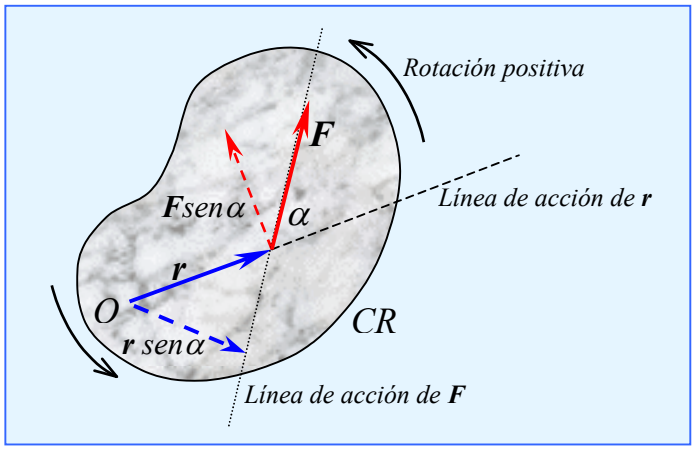

Por convención se considera el torque positivo (negativo) si la rotación que produciría la fuerza es en sentido antihorario (horario), esto se ilustra en la figura 6.3. La unidad de medida del torque en el SI es el *Nm* (igual que para trabajo, pero no se llama joule).

El torque de una fuerza depende de la magnitud y dirección de ***F*** y de su punto de aplicación respecto a un origen *O*. Si la fuerza ***F*** pasa por *O*, ***r*** = 0 y el torque es cero. Si $\alpha$ = 0 o 180º, es decir, ***F*** está sobre la línea de acción de ***r***, $F sen\alpha = 0$ y el torque es cero. $F\ sen\alpha$ es la componente de ***F*** perpendicular a

***r***, sólo esta componente realiza torque, y se le puede llamar $F_\perp$. De la figura 6.3 también se ve que $r_\perp = r sen\alpha$ es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza, a $r_\perp$ se le llama *brazo de palanca* de ***F***. Entonces, la magnitud del torque se puede escribir como:

$$\tau = r(Fsen\alpha) = F(rsen\alpha) = rF_\perp = r_\perp F$$

*Figura 6.3*



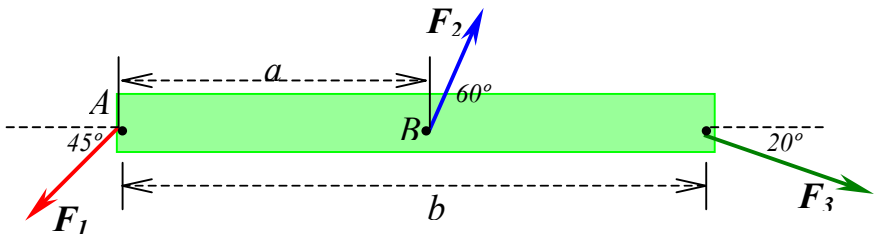

***Ejemplo 1***: *Calcular el torque producido por una fuerza* ***F*** *= (3i - 2j +4k) N que se aplica a un objeto en la posición* ***r*** *= (6i + 3j) m.*

*Solución: Por la definición de producto vectorial se tiene:*

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = 12\hat{i} - 24\hat{j} - 21\hat{k}\ Nm$$

***Ejemplo 2***: *calcular el torque neto por A y por B en el siguiente sistema, donde $F_1$ = 10 N, $F_2$ = 5 N, $F_3$ = 15 N, a = 50 cm, b = 1 m.*




*Solución: el torque neto es la suma de los torques realizados por cada fuerza.*

*Para rotación en torno al punto A, considerando el signo de la rotación:*

$\tau_A = F_1\, r_1\, sen45 + F_2\, r_2\, sen60 - F_3\, r_3\, sen20$

*los valores de las distancias son:* $r_1 = 0$, $r_2 = a = 0.5$ m, $r_3 = b = 1$ m.

$\tau_A = 10 \cdot 0 \cdot sen45 + 5 \cdot 0.5 \cdot sen60 - 15 \cdot 1 \cdot sen20 = -3$ Nm

*Para rotación en torno al punto B, considerando el signo de la rotación:*

$\tau_B = + F_1\, r_1\, sen45 + F_2\, r_2\, sen60 - F_3\, r_3\, sen20$

*ahora los valores de las distancias son:* $r_1 = a = 0.5$ m, $r_2 = 0$, $r_3 = b - a = 0.5$ m.

$\tau_B = 10 \cdot 0.5 \cdot sen45 + 5 \cdot 0 \cdot sen60 - 15 \cdot 0.5 \cdot sen20 = 1$ Nm

## *6.2 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO.*

Por definición una partícula puede tener solo movimiento de traslación. Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula está moviéndose con velocidad constante o está en reposo; en este último caso se dice que está en equilibrio estático. Pero el movimiento de un cuerpo rígido en general es de traslación y de rotación. En este caso, si la resultante tanto de las fuerzas como de los torques que actúan sobre el cuerpo rígido es cero, este

no tendrá aceleración lineal ni aceleración angular, y si está en reposo, estará en ***equilibrio estático***. La rama de la mecánica que estudia el equilibrio estático de los cuerpos se llama ***estática***.

Para que un cuerpo rígido este en equilibrio estático se deben cumplir dos requisitos simultáneamente, llamados ***condiciones de equilibrio***. La primera condición de equilibrio es la Primera Ley de Newton, que garantiza el equilibrio de traslación. La segunda condición de equilibrio, corresponde al equilibrio de rotación, se enuncia de la siguiente forma: "la suma vectorial de todos los torques externos que actúan sobre un cuerpo rígido alrededor de cualquier origen es cero". Esto se traduce en las siguientes dos ecuaciones, consideradas como las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

*1ª condición de equilibrio:* $$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0} \qquad (6.3)$$

*2ª condición de equilibrio:* $$\boxed{\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots + \vec{\tau}_n = 0} \qquad (6.4)$$

Como estas ecuaciones vectoriales son equivalentes a seis ecuaciones escalares, resulta un sistema final de ecuaciones con muchas incógnitas (seis), por lo que limitaremos el análisis a situaciones donde todas las fuerzas están en el plano *xy*. Con esta restricción se tiene que tratar sólo con tres ecuaciones escalares, dos de la primera condición de equilibrio y una de la segunda:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau = 0$$

Cuando se tratan problemas con cuerpos rígidos se debe considerar la fuerza de gravedad o el peso del cuerpo, e incluir en los cálculos el torque producido por su peso. Para calcular el torque debido al peso, se puede considerar como si todo el peso estuviera concentrado en un solo punto, llamado *centro de gravedad.* Se han preguntado alguna vez ¿por qué no se cae la Torre de Pisa?, o ¿por qué es imposible tocarte los dedos de los pies sin caerte cuando estas de

pie apoyado con los talones contra la pared? ¿Por qué cuando llevas una carga pesada extiendes y levantas el otro brazo? Para responder a esto debemos definir los conceptos de centro de masa y de centro de gravedad y su aplicación al equilibrio estático.

### *6.2.1 Centro de gravedad.*

Debido a que un cuerpo es una distribución continua de masa, en cada una de sus partes actúa la fuerza de gravedad. El ***centro de gravedad*** es la posición donde se puede considerar actuando la fuerza de gravedad neta, es el punto ubicado en la posición promedio donde se concentra el peso total del cuerpo. Para un objeto simétrico homogéneo, el centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico, pero no para un objeto irregular.

### *6.2.2 Centro de masa.*

Es la posición geométrica de un cuerpo rígido donde se puede considerar concentrada toda su masa, corresponde a la posición promedio de todas las partículas de masa que forman el cuerpo rígido. El centro de masa de cualquier objeto simétrico homogéneo, se ubica sobre un eje se simetría.

Cuando se estudia el movimiento de un cuerpo rígido se puede considerar la fuerza neta aplicada en el centro de masa y analizar el movimiento del centro de masa como si fuera una partícula. Cuando la fuerza es el peso, entonces se considera aplicado en el centro de gravedad. Para casi todos los cuerpos cerca de la superficie terrestre, el centro de masa es equivalente al centro de gravedad, ya que aquí la gravedad es casi constante, esto es, si $\boldsymbol{g}$ es constante en toda la masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Existen métodos para calcular estas dos posiciones, pero aquí no las detallaremos.

Ahora se pueden responder las preguntas anteriores. Respecto a la Torre de Pisa, la respuesta a la pregunta de porque no se cae, es porque su centro de gravedad está dentro de su base. Si la torre continúa inclinándose hasta que su centro de gravedad caiga fuera de su base, entonces se derrumbará. Pero se le han puesto apoyos en su base para evitar que continué inclinándose. Las otras preguntas ahora las puedes responder tu.

Para aplicar las condiciones de equilibrio, es recomendable seguir las siguientes instrucciones, que corresponde a dibujar el DCL del cuerpo rígido:

a) Aislar al cuerpo rígido del sistema con un límite imaginario.

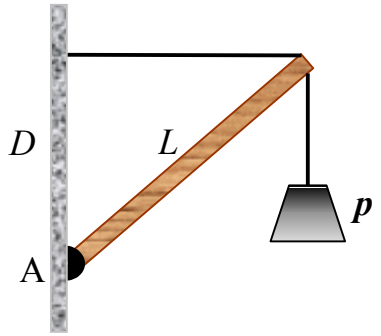
b) Dibujar los vectores que representen las fuerzas en el punto de aplicación donde las fuerzas efectivamente actúan.

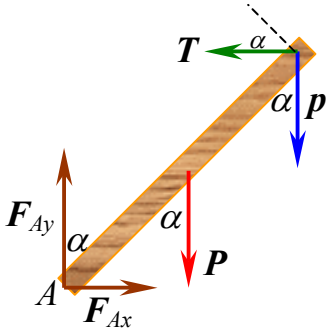
c) Elegir un sistema de coordenadas conveniente para descomponer las fuerzas, donde dibujar la componente perpendicular a la posición.

d) Elegir un eje de rotación *O* adecuado en el cuerpo rígido, donde se anulen los torques de (algunas) fuerzas desconocidas.

***Ejemplo 3****: una barra uniforme de longitud L y peso P está articulada en una pared. Un alambre fijo en la pared a una distancia d sobre la articulación sujeta a la barra por el otro extremo. El alambre permanece horizontal cuando se cuelga un cuerpo de peso p en el extremo libre de la barra. Calcular la tensión del alambre y la fuerza de reacción en la articulación de la barra.*

***Solución:*** *se elige como eje de rotación la articulación de la barra en la pared, en el punto A, se identifican las fuerzas que actúan sobre la barra, se dibuja el DCL de la barra y se aplican las condiciones de equilibrio.*




*1ª condición de equilibrio:*

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \;\; y \;\; \sum F_y = 0$$

*eje x:* $F_{Ax} - T = 0$ *(1)*

*eje y:* $F_{Ay} - P - p = 0$ *(2)*

*2ª condición de equilibrio:*
$\sum \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_p + \tau_P = 0$

$+T\cos\alpha\, L - p\,sen\alpha\, L - P\, sen\alpha\, (L/2) = 0$ *(3)*

De la geometría de la figura se obtienen $sen\alpha$ y $cos\alpha$ en términos de $D$ y $L$:

$$cos\,\alpha = \frac{D}{L}, \quad sen\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{L}$$

que se reemplazan en (3), luego se despeja $T$:

$$T = \frac{(p + P/2)\sqrt{L^2 - D^2}}{d}$$

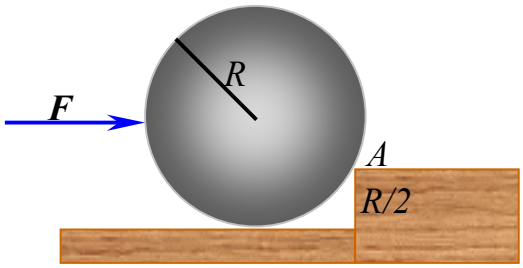
Ahora se calculan $F_{Ax}$ y $F_{Ay}$ de las ecuaciones (1) y (2).

De (1): $F_{Ax} = T = \dfrac{(p + P/2)\sqrt{L^2 - D^2}}{d}$

De (2): $F_{Ay} = P + p$

*Ejercicio:* calcular el vector fuerza en *A,* su magnitud y dirección.

***Ejemplo 4****. En el siguiente sistema, una fuerza horizontal* ***F,*** *cuya línea de acción pasa por el centro de un tambor de radio R y peso P, se aplica sobre el tambor, para hacerlo subir por un escalón de alto R/2. Hacer las suposiciones necesarias para calcular el valor de la: a) fuerza* ***F,*** *b) fuerza del vinculo en A, c) dirección de la fuerza del vinculo en A.*




Solución: Se conocen sólo el peso $P$ y el radio del cilindro $R$. Hay que calcular la fuerza aplicada $\boldsymbol{F}$ y la fuerza del vinculo en A, $\boldsymbol{F_A}$.

Las condiciones de equilibrio son:

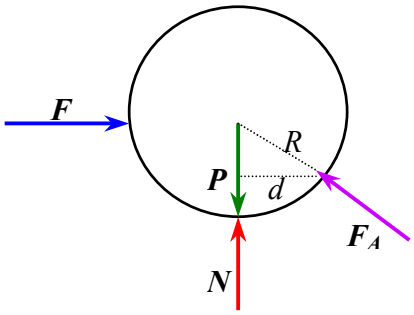
$$1^a \text{ condición } \sum \vec{F} = 0 \text{ y } 2^a \text{ condición } \sum \tau_A = 0$$

Se hace el DCL, se elige como eje de rotación el punto $A$, y al aplicar las condiciones de equilibrio se obtiene:

eje $x$: $F - F_{Ax} = 0$ (1)

eje $y$: $N - P + F_{Ay} = 0$ (2)

$\sum \tau_A : Pd - Nd - FR/2 = 0$ (3)




donde $d$ es la distancia perpendicular o brazo de palanca desde $A$ hasta las fuerzas peso $P$ y normal $N$, y el brazo de palanca de $\boldsymbol{F}$ es $R/2$. De la geometría de la figura, se calcula $d$:

$$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow 2d = \sqrt{3R}$$

De (3) se obtiene el valor de la fuerza aplicada:

$$(P-N)d = \frac{FR}{2} \Rightarrow (P-N)\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{FR}{2} \Rightarrow$$

$$F = \sqrt{3}(P-N)$$

De (1) : $F_{Ax} = \sqrt{3}(P-N)$

De (2): $F_{Ay} = P - N$

El vector fuerza es:

$$\vec{F}_A = F_{Ax}\hat{i} + F_{Ay}\hat{j} = \sqrt{3}(P-N)\hat{i} + (P-N)\hat{j}$$

Su magnitud: $\left|\vec{F}_A\right| = \sqrt{3(P-N)^2 + (P-N)^2} \Rightarrow \left|\vec{F}_A\right| = 2(P-N)$

Dirección de $\boldsymbol{F_A}$: $tan\,\alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{(P-N)}{\sqrt{3}(P-N)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^o$

Notar que no se conoce ***N***, se supone que ***N*** = 0 cuando ***F*** es la fuerza mínima para hacer subir al tambor.

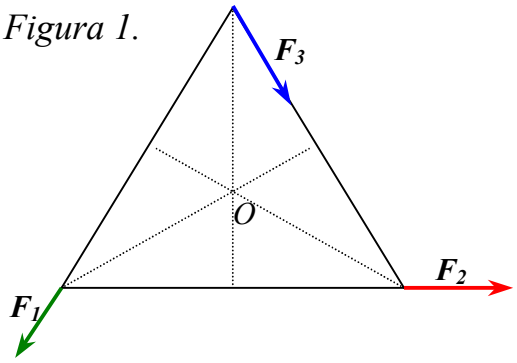
## *PROBLEMAS SELECTOS.*

1. a) Estimar las longitudes y masas de los punteros del reloj del Campanil. b) Calcular el torque en torno al eje de rotación de los punteros debido a su peso, cuando la hora marca las: 14:00, 16:45, 18:00, otra a su gusto.

2. Hacer todas las suposiciones necesarias para estimar el torque que deben ejercer las raíces de un pino radiata *D. Don*, para evitar que el pino se vuelque, cuando en un temporal de invierno se inclina por efecto de la fuerza ejercida por el viento. ¿Y si la planta es un rosal?

3. Dos fuerzas $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$ actúan a lo largo de los lados de un triángulo equilátero de lado $a$, como se muestra en la figura 1. Encuentre una tercera fuerza $\boldsymbol{F_3}$ que aplicada en el vértice a lo largo del lado produzca un torque neto en torno a $O$ igual a cero. R: $F_3 = F_1 + F_2$ (magnitudes).

*Figura 1.*




4. Una escalera homogénea de masa $M$ descansa contra una pared vertical sin fricción, en un ángulo de $\alpha$=60º con la vertical. El extremo inferior se apoya sobre un piso horizontal con un coeficiente de fricción $\mu$. Un pintor de brocha gorda de masa $2M$ intenta subir la escalera. ¿Qué fracción de la longitud $L$ de la escalera subirá el pintor antes de que la escalera empiece a resbalar? R: 0.79.

5. Un tablón uniforme de *5 m* de largo y *150 kg* está articulado en A. En B esta sostenido por una cuerda que forma un ángulo de 90º con el tablón, como se ve en la figura 2. Calcular la tensión de la cuerda y la fuerza de la articulación en A. R: 643 N, -514î + 1114ĵ N.

6. El tablón uniforme de la figura 3, de *5 m* de largo y peso *P* está articulado en A e inclinado α grados con la horizontal. En el extremo opuesto está sostenido por una cuerda que forma un ángulo de 90º con el tablón, sosteniendo un peso *P/2*. Calcular: a) la tensión de la cuerda, b) la fuerza en A. R: a) 0.6 P, b) *(0.47î + 1.14ĵ)P*.

*Figura 2.*

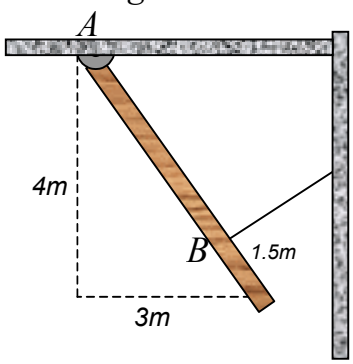
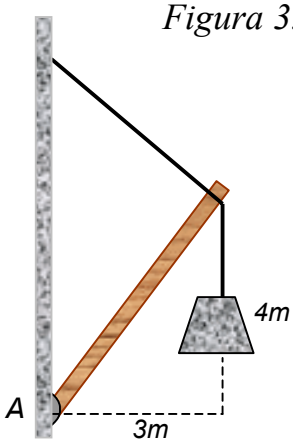
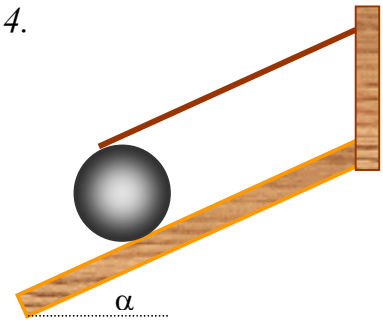



*Figura 3.*




7. Un cilindro de masa *M* y radio *r* descansa sobre un plano inclinado sujetado por una cuerda tangente al cilindro y paralela a la superficie del plano. El plano esta inclinado en un ángulo α con la horizontal, como se muestra en la figura 4. Encuentre: a) el valor mínimo del coeficiente de fricción estático, en términos de α, para que el cilindro no resbale hacia abajo del plano inclinado, y b) la tensión en la cuerda en términos de *M, g* y α. R: a) *0.5tanα*, b) *0.5Mg senα*.

*Figura 4.*

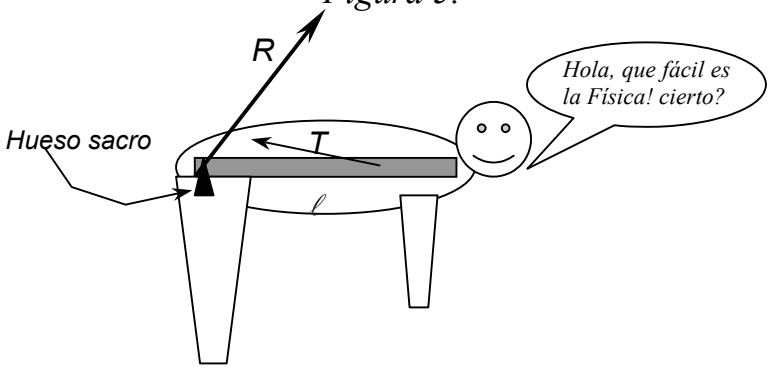



8. Una persona sostiene sobre su mano una masa *M*, con su antebrazo en posición horizontal. Así existe una fuerza en la articulación del codo y otra producida por el bíceps. a) Idear un modelo que le permita considerar al

antebrazo en equilibrio de cuerpo rígido; indicar sus suposiciones. b) Calcular la fuerza del bíceps y en la articulación del codo. R: b) *(p+P)/d*.

9. Cuando una persona está agachada, el músculo de la espalda unido a un punto a dos tercios del sacro (eje) en un ángulo de 12º, mantiene la espina dorsal, de largo $\ell$, en posición horizontal (figura 5). Si la parte superior del cuerpo pesa 450 N, a) calcular la tensión ***T*** del músculo de la espalda y la fuerza ***R*** de la espina en el sacro. b) Comparar para el caso en que la persona levanta con los brazos un peso de 200 N. ¿Qué se puede concluir? R: a) 1623.3 N, 1592 N, b) 3066 N.

*Figura 5.*




## *PROBLEMAS VARIOS.*

10. Una fuerza ***F*** = *(2i + 3j) N* se aplica a un objeto que está articulado alrededor de un eje fijo alineado con el eje *z*. Si la fuerza se aplica en la posición ***r*** = *(4i + 5j) m*, calcular: a) el vector torque neto en torno a *z*, b) la magnitud del torque neto y c) su dirección.

11. La figura 6 muestra las fuerzas $F_1$*=40 N,* $F_2$*=30 N,* $F_3$*=50 N,* $F_4$*=60 N* aplicadas a un cuerpo rígido que puede girar en torno de un eje que pasa por *O*. Calcular el torque resultante. R: -10.8 Nm.

12. Calcular el torque neto sobre la rueda producido por las fuerzas $F_1$*=8 N,* $F_2$*=10 N,* $F_3$*=15 N,* que se indican en la figura 7, alrededor de un eje que pase por su centro, si *a = 10 cm, b = 20 cm* y $\alpha$ = 30º.

*Figura 6.*

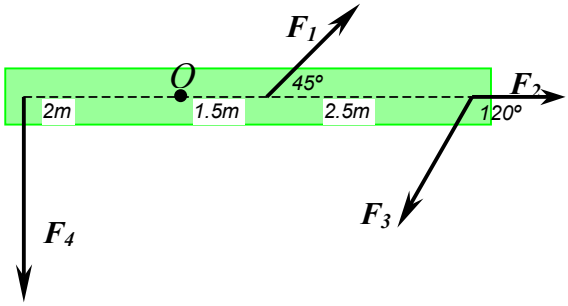
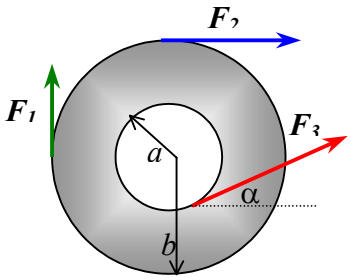



*Figura 7.*




13. Un tablón uniforme de *6m* de longitud y *30kg* de masa, descansa horizontalmente sobre un andamio. Si 1.*5m* del tablón sobresale por un extremo del andamio. ¿Cuánto puede caminar un pintor de brocha gorda de 70*kg* por la parte sobresaliente antes de que el tablón se vuelque? R: 0.64 m.

14. Una viga uniforme de peso $P$ y longitud $L$ soporta dos pesos $P_1$ sobre $O$ y $P_2$ a la derecha, como se muestra en la figura 8. La viga se apoya en dos puntos. Calcular el valor de $x$ para el cual la viga quedará equilibrada en el punto de apoyo derecho de tal manera que la fuerza en $O$ sea cero. R: $[(P_1 + P)D + P_1L/2]/P_2$.

15. Para el sistema de la figura 8, encuentre $x$ tal que la fuerza normal en $O$ sea la mitad de la fuerza normal en $P$. a) Desprecie el peso de la viga. b) Considere el peso de la viga.

*Figura 8.*

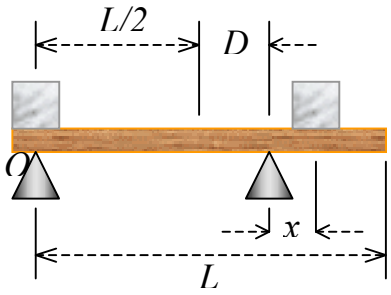
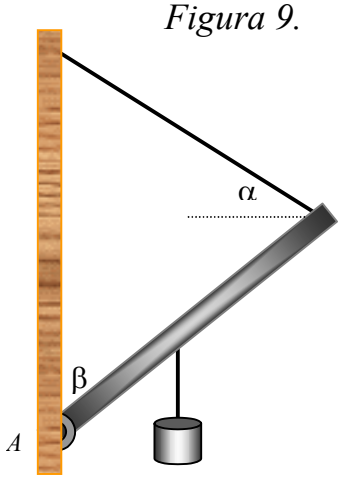



*Figura 9.*

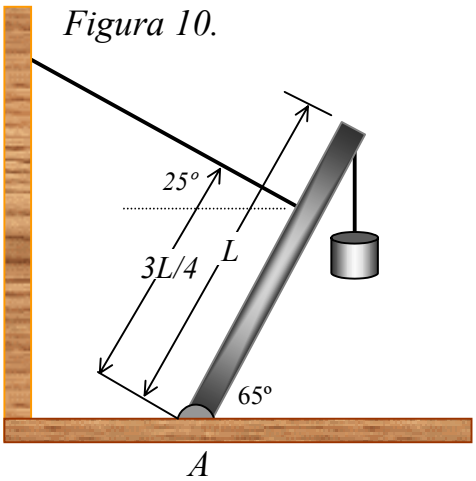


16. Un tablón uniforme de 5*m* de longitud y 50*N* de peso, apernado en *A* es sostenido por una cuerda en su extremo superior, como se muestra en la figura 9. Una carga de 100 *N* cuelga del tablón en un punto a una distancia *x* de *A*. Si la resistencia de ruptura de la cuerda es 50 *N,* encuentre el máximo valor de *x*. Considere $\alpha = 30º$ y $\beta = 60º$. R: 1.76 m.

17. Un poste uniforme de 1200 *N* se sostiene por un cable, como en la figura 10. El poste se sujeta con un perno en *A* la parte inferior y en la parte superior se cuelga un cuerpo de 2000 *N.* Encuentre la tensión en el cable de soporte y las componentes de la fuerza de reacción en el perno en *A*. R: 1465 N, (1328î + 2581ĵ) N.

18. Una fuerza ***F,*** cuya línea de acción pasa por el borde superior de un tambor de radio *R* y peso *P*, se aplica sobre el tambor, para hacerlo subir por un escalón de alto *R/2* (figura 11). Calcular: a) la fuerza ***F,*** b) la fuerza del vértice del escalón en *A*, c) la dirección de la fuerza en *A*. R: a) *(√3/3)P, b) (√10/9)P, c)* $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

*Figura 10.*



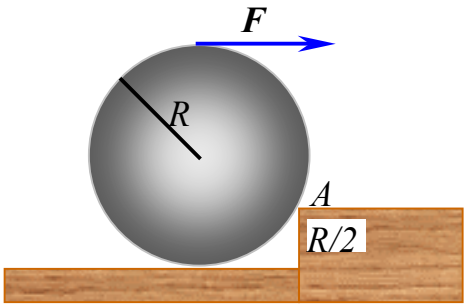


*Figura 11.*