# CAPITULO 5. TRABAJO Y ENERGIA.

El problema fundamental de la Mecánica es describir como se moverán los cuerpos si se conocen las fuerzas aplicadas sobre él. La forma de hacerlo es aplicando la segunda Ley de Newton, pero si la fuerza no es constante, es decir la aceleración no es constante, no es fácil determinar la velocidad del cuerpo ni tampoco su posición, por lo que no se estaría resolviendo el problema.

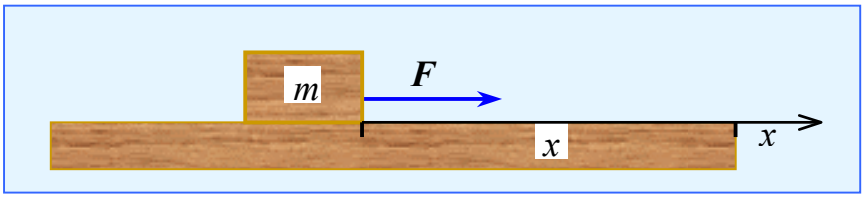
Los conceptos de trabajo y energía se fundamentan en las Leyes de Newton, por lo que no se requiere ningún principio físico nuevo. Con el uso de estas dos magnitudes físicas, se tiene un método alternativo para describir el movimiento, espacialmente útil cuando la fuerza no es constante, ya que en este caso la aceleración no es constante y no se pueden usar las ecuaciones de la cinemática anteriormente estudiadas. En este caso se debe usar el proceso matemático de integración para resolver la segunda Ley de Newton. Ejemplos de fuerzas variables son aquellas que varían con la posición, comunes en la naturaleza, como la fuerza gravitacional o las fuerzas elásticas.

## *5.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE.*

Si la fuerza $\boldsymbol{F}$ que actúa sobre una partícula es constante (en magnitud y dirección) el movimiento se realiza en línea recta en la dirección de la fuerza. Si la partícula se desplaza una distancia $x$ por efecto de la fuerza $\boldsymbol{F}$ (figura 5.1), entonces se dice que la fuerza ha realizado trabajo $W$ sobre la partícula de masa $m$, que en este caso particular se define como:

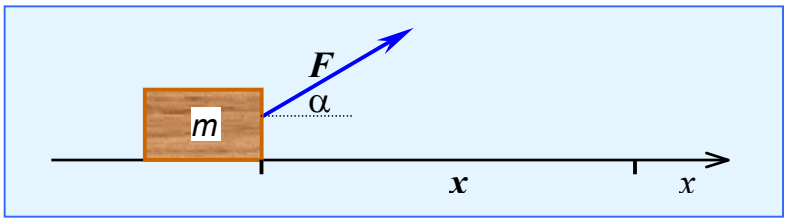
$$W = F\,x$$

*Figura 5.1*



Si la fuerza constante no actúa en la dirección del movimiento, el trabajo que se realiza es debido a la componente de la fuerza en la dirección paralela al movimiento, como se ve en la figura 5.2. La componente *y* de la fuerza, perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo sobre el cuerpo.

*Figura 5.2*




Si α es el ángulo medido desde el desplazamiento *x* hacia la fuerza ***F***, el valor del trabajo *W* es ahora:

$$W = (F\cos\alpha)x$$

De acuerdo a la ecuación anterior, se pueden obtener los siguientes conclusiones: a) si $\alpha = 0$, $W = (F \cos 0)\, x = F\, x$, b) si $\alpha = 90^o$, $W = (F \cos 90)\, x = 0$, la fuerza no tiene componente en la dirección del movimiento o lo que es lo mismo, la fuerza es perpendicular al movimiento y no hace trabajo sobre el cuerpo, c) si la fuerza aplicada sobre el cuerpo no lo mueve, no realiza trabajo ya que el desplazamiento es cero, d) el signo del trabajo depende de la dirección de ***F*** respecto al desplazamiento, es positivo (negativo) cuando la componente de ***F*** tiene la misma (opuesta) dirección que el desplazamiento. De estas conclusiones se deduce que el trabajo se puede expresar en la forma:

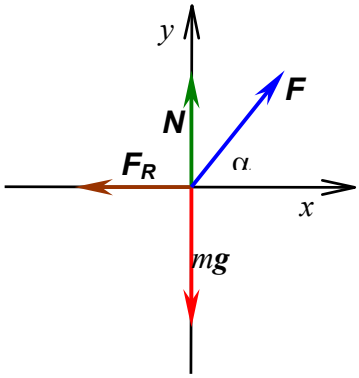
$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}\,, \quad \boldsymbol{F}\ cte.$$

El trabajo es una magnitud física escalar, obtenido del producto escalar de los vectores fuerza y posición. De la expresión anterior, por la definición de producto escalar, queda claro que el trabajo puede ser positivo, negativo o cero. Su unidad de medida en el SI es *N m* que se llama *Joule,* símbolo *J.*

Otras fuerzas actúan sobre el cuerpo (peso, roce, normal, etc.), por lo que la ecuación anterior se refiere sólo al trabajo de la fuerza ***F*** en particular; las otras fuerzas también pueden realizar trabajo. En la figura 5.2 las fuerzas peso y normal no realizan trabajo ya que son perpendiculares al desplazamiento y la fuerza de roce realiza trabajo negativo, ya que siempre se opone al desplazamiento. El trabajo total sobre la partícula es la suma escalar de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.

***Ejemplo 1****: Con una fuerza de 250 N que forma un ángulo de 60º con la horizontal se empuja una caja de 50 kg, en una superficie áspera horizontal (figura 5.2). La caja se mueve una distancia de 5m con rapidez constante. Calcular a) el trabajo realizado por cada fuerza, b) el coeficiente de roce.*

***Solución****: Diagrama de cuerpo libre de m.*




*a) La definición de trabajo es* $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$ *, que se aplica a cada fuerza*

*Para* ***F****:* $W_F = F \cos\alpha \;\; x = 250 \cdot \cos 60 \cdot 5 = 625\ J$

*Para* ***N****:* $W_N = N \cos\alpha \;\; x = N \cos 90 \cdot 5 = 0$

*Para* ***mg****:* $W_P = mg \cos\alpha \;\; x = mg \cos 270 \cdot 5 = 0$

*Para* $\boldsymbol{F_R}$*:* $W_R = F_R \cos\alpha \;\; x = F_R \cos 180 \cdot 5,$

*Como no se conoce el valor de la $F_R$ se debe calcular, del DCL y aplicando la primera ley de Newton, ya que la caja se mueve con rapidez constante, se tiene:*

*Eje x:* $F\cos\alpha - F_R = 0$ *1)*
*Eje y:* $F\,\text{sen}\alpha + N - mg = 0$ *2)*

*De 1)* $F_R = F\cos\alpha = 250 \cdot \cos 60 = 125$ *N, reemplazando en el trabajo,*

$$W_R = 125 \cdot \cos 180 \cdot 5 = -625\ J$$

*b) Por definición la* $F_R = \mu N$*, despejando N de 2) se tiene* $N = mg - F\,\text{sen}\alpha$*, entonces:*

$$F_R = \mu(mg - F\,\text{sen}\alpha) \Rightarrow \mu = F_R / (mg - F\,\text{sen}\alpha)$$

$$\mu = 125/(50x10 - 250\ \text{sen}60) = 0.44$$

## *5.2 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE.*

Si una fuerza variable ***F*** está moviendo a un objeto a lo largo del eje *x* desde una posición inicial a otra final, ya no se puede usar la expresión anterior para calcular el trabajo realizado por la fuerza. En este caso se puede hacer que el cuerpo experimenta pequeños desplazamientos *dx*, entonces la componente $F_x$ de la fuerza en la dirección del desplazamiento se puede considerar aproximadamente constante en ese intervalo *dx* y se puede calcular un trabajo *dW* en ese pequeño desplazamiento como:

$$dW = F_x\, dx$$

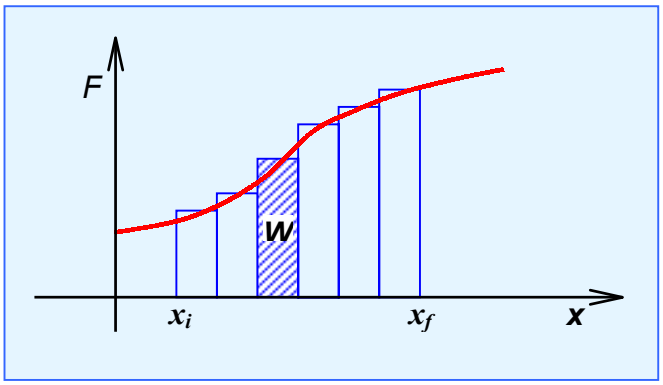
Si se calcula el trabajo total en el desplazamiento desde la posición inicial a la final, este es igual a la suma de todos los pequeños trabajos *dW*, esto es:

$$W = dW \Rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Matemáticamente, el valor de la integral es numéricamente igual al área bajo la curva de $F_x$ versus $x$ (figura 5.3). Si actúan más de una fuerza sobre el cuerpo, el trabajo resultante es el realizado por la componente de la fuerza resultante en dirección del desplazamiento, entonces en términos del producto escalar en tres dimensiones, el trabajo es:

$$\boxed{W_{TOTAL} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}} \qquad (5.1)$$

*Figura 5.3*



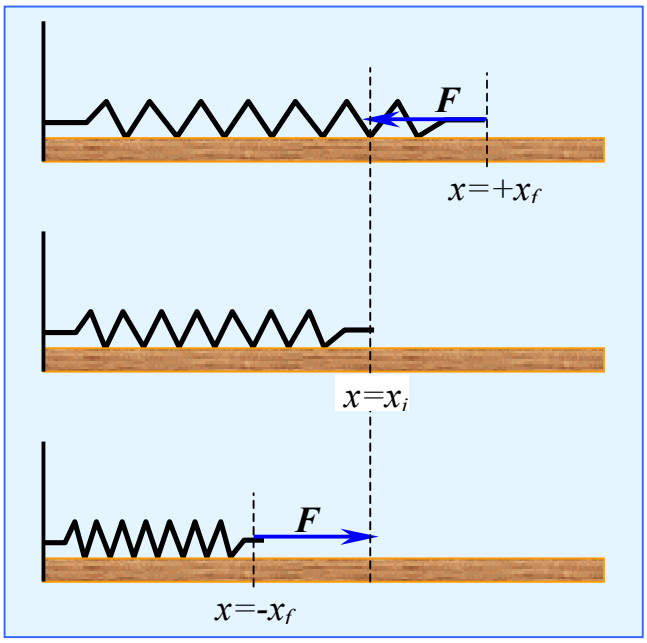

***Ejemplo 2:*** *trabajo realizado por un resorte.*

Un sistema físico común en el que la fuerza varía con la posición, es el de un cuerpo conectado a un resorte. Si el resorte, orientado en dirección del eje *x,* se deforma desde su configuración inicial, es decir se estira o se comprime, por efecto de alguna fuerza externa sobre el resorte, instantáneamente actúa una fuerza producida por el resorte contra el objeto que ejerce la fuerza externa, cuya magnitud es:

$$F_{Resorte} = - k\,x$$

donde $x$ es la magnitud del desplazamiento del resorte desde su posición no deformada en $x = 0$ y $k$ una constante positiva, llamada *constante de fuerza del resorte*, que es una medida de la rigidez (dureza) del resorte. Esta ecuación se llama ***Ley de Hooke***, y es válida para pequeños desplazamientos, ya que si el resorte se estira demasiado, puede deformarse y no recuperar su forma original. El signo negativo indica que la dirección de esta fuerza es siempre opuesta al desplazamiento, como se ilustra en la figura 5.4, donde ***F*** representa la fuerza producida por el resorte.

*Figura 5.4*




Si el cuerpo se desplaza desde una posición inicial a la final, el trabajo realizado por el resorte es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Por ejemplo, para un resorte de $k$ = 100 N/m, que se estira 10 cm (= $x_f$), el trabajo que realiza la fuerza del resorte para recuperar su posición inicial no deformada ($x_i = 0$) es 0.5 J.

## *5.3 ENERGÍA CINÉTICA.*

Cuando se hace trabajo contra el roce, se observa que en la superficie de los cuerpos en contacto se produce un aumento de temperatura. Es porque se ha producido una transformación desde movimiento a calor, es decir que se ha producido una transferencia de energía de movimiento a energía calórica. En otras transformaciones se produce energía en forma de luz, sonido, eléctrica, nuclear, etc. En las transformaciones se miden cambios de energía cuando se realiza trabajo, aparecen las fuerzas que realizan trabajo, por lo tanto el trabajo es una medida de las transferencias de energía. El concepto de energía se puede generalizar para incluir distintas formas de energía conocidas como cinética, potencial, calórica, electromagnética, etc. De esta forma, la mecánica de los cuerpos en movimiento se relaciona con otros fenómenos naturales que no son mecánicos por intermedio del concepto de energía. El concepto de ***energía*** invade toda la ciencia y es una de las ideas unificadoras de la Física.

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, le produce una aceleración durante su desplazamiento. El trabajo realizado por la fuerza para mover al cuerpo es:

$$W_{TOTAL} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Por la segunda Ley de Newton se tiene:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}},$$

reemplazando en el trabajo total, se obtiene:

$$W_{TOTAL} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \vec{v}d\vec{v} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$, se llama ***energía cinética***, $E_c$, es energía que se obtiene por el movimiento, es siempre positiva porque la rapidez está al cuadrado.

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2} \qquad (5.2)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza resultante sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética, enunciado que se conoce como el ***Teorema del Trabajo y la Energía***. Cuando la rapidez es constante, no hay variación de energía cinética y el trabajo de la fuerza neta es cero. La unidad de medida de la energía cinética es el Joule, *J*.

## *5.4 POTENCIA.*

Para fines prácticos interesa también conocer la rapidez con la cual se realiza trabajo. Esta información la entrega la ***potencia***, que se define como la rapidez de transferencia de energía. Si se aplica una fuerza externa a un cuerpo y se realiza trabajo *dW* en un intervalo de tiempo *dt,* la potencia instantánea *P* se define como:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

La unidad de medida de la potencia en el SI es *J/s*, que se llama *Watt, W*.

Como $dW = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr}$, se puede escribir la potencia como:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (5.3)$$

Se puede definir una nueva unidad de energía en términos de la unidad de potencia, llamada kilowatt-hora. Un *kilowatt-hora (kWh)* es la energía utilizada durante una hora con una potencia constante de *1 kW*. El valor de un kWh es:

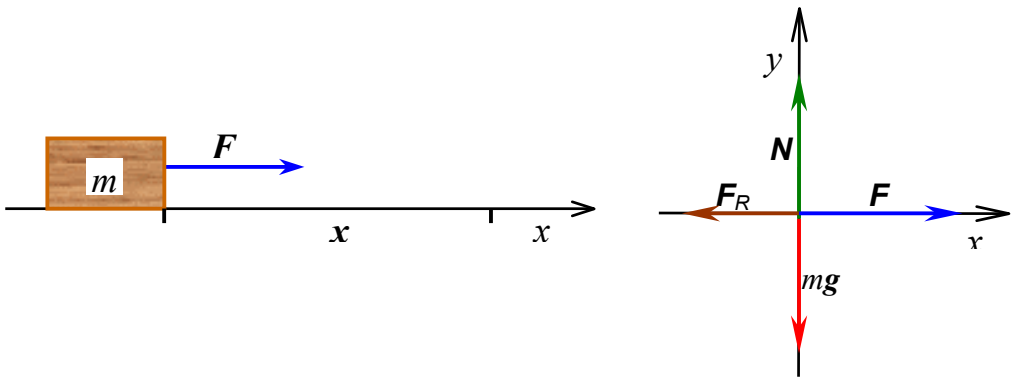
$$1\ kWh = 1000\ W \cdot 3600\ s = 3.6 \times 10^6\ J.$$

El kWh es unidad de energía, no de potencia. Por ejemplo, para encender una ampolleta de *100 W* de potencia se requieren $3.6 \times 10^5$ *J* de energía durante una hora, equivalente a *0.1 kWh*.

***Ejemplo 3**: Una caja de 40 kg que se encuentra inicialmente el reposo se empuja una distancia de 5 m a lo largo de un piso horizontal de coeficiente de roce 0.3, con una fuerza de 130 N. Calcular: a) el trabajo de la fuerza, b) el trabajo del roce, c) la variación de energía cinética, d) la rapidez final de la caja, e) la potencia final de la fuerza aplicada.*

***Solución:***

*Esquema.* *DCL de m*




*a)* $W = \vec{F} \cdot \vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = F\hat{i} \cdot \Delta x\hat{i} = F\Delta x$

$W_F = 130N \cdot 5m = 650J$

*b)* $F_R = \mu N = \mu mg$

$$W_R = \vec{F}_R \cdot \Delta\vec{x} = F_R(-\hat{i}) \cdot \Delta x\hat{i} = -F_R \Delta x = -\mu mg\Delta x$$

$$W_R = -0.3 \cdot 40 \cdot 10 \cdot 5 = -600\ J$$

*c)* $W = \Delta E_c$ , $W_F + W_N + W_R + W_P = \Delta E_c$,

*pero* $W_N = W_P = 0$, *ya que las fuerzas normal y peso son perpendiculares al desplazamiento, entonces:*

$$\Delta E_c = W_F + W_R = 650 - 600 = 50\ J$$

*c) Para calcular la rapidez final, usamos el resultado anterior*

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\Delta E_C}{m}}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\Delta E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{40}} = 1.6(m/s)$$

*d) Usando la definición de potencia:*

$$P_f = \vec{F} \cdot \vec{v} = F\hat{i} \cdot v_f\hat{i} = Fv$$
$$P_f = 130 \cdot 1.6 = 208(watt)$$

## *5.5 FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS.*

Se llaman ***fuerzas conservativas*** aquellas para las cuales el trabajo realizado por las fuerzas para mover un cuerpo entre dos puntos por cualquier trayectoria arbitraria, no depende de la trayectoria que une los puntos. Las fuerzas que dependen de la posición son conservativas, por ejemplo: la gravitacional, elástica, electromagnética, etc.

Suponer que una partícula se mueve, por la acción de una fuerza, desde una posición inicial *P* hasta otra posición final *Q*, por trayectorias arbitrarias 1 y 2,

como se ve en la figura 5.4a. Si la fuerza es conservativa, entonces el trabajo para mover la partícula desde $P$ a $Q$ sólo depende de las coordenadas inicial y final de la partícula, esto es:

$$W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) = W_{PQ}(\text{por trayectoria 2})$$

*Figura 5.4 a*

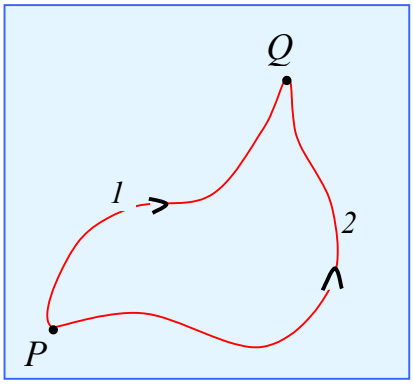
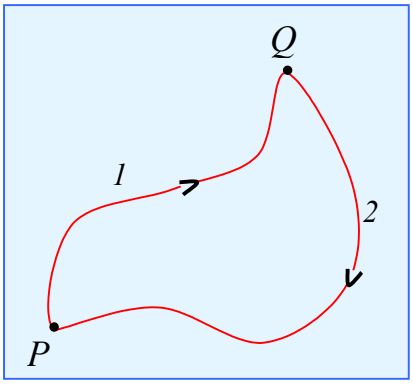



*Figura 5.4 b*




Si ahora la partícula se mueve desde $P$ hasta $Q$ por la trayectoria 1 y luego regresa desde $Q$ hasta $P$ por la trayectoria 2 (figura 5.4 b), se observa que en el regreso, $W_{QP}(\text{por trayectoria 2}) = -W_{PQ}(\text{por trayectoria 2})$, entonces:

$$W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) = -W_{QP}(\text{por trayectoria 2})$$

$$W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) + W_{QP}(\text{por trayectoria 2}) = 0$$

Entonces, si la partícula regresa a su posición inicial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada es cero.

Por el contrario, las ***fuerzas no conservativas*** o ***fuerzas disipativas*** son aquellas para las cuales el trabajo realizado por las fuerzas para mover una partícula entre dos puntos, depende de la trayectoria que se realice para unir los puntos. Para las fuerzas no conservativas se tiene que, $W_{PQ}(\text{por trayectoria 1}) \neq W_{PQ}(\text{por trayectoria 2})$. Las fuerzas de roce que siempre se oponen al desplazamiento, son no conservativas o disipativas, el trabajo de estas fuerzas es negativo y le hacen perder energía al sistema.

## *5.6 ENERGÍA POTENCIAL.*

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria y de la rapidez con la que se mueve la partícula. En este caso el trabajo es sólo función de las coordenadas, por lo que se puede asociar con una variación de energía función de la posición, similar al caso de la energía cinética que es función de la velocidad. Las fuerzas que son función de la posición generan energía de posición, a la que se llama ***energía potencial***. El trabajo realizado por la fuerza se almacena como energía potencial en el objeto en movimiento. Se define la *energía potencial* $E_P$, a aquella que puede obtenerse en virtud de la posición del cuerpo, tal que el trabajo realizado por la fuerza conservativa entre dos posiciones, es igual a la disminución de la *energía potencial*, esto es, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual al valor negativo del cambio de energía potencial asociada con la fuerza:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

Se puede elegir una posición de referencia inicial y medir las diferencias de energía potencial respecto a ese punto y definir una función energía potencial en cualquier posición ***r*** como:

$$E_P(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + E_{Pi}$$

El valor de $E_{Pi}$ generalmente no se conoce, por lo que se elige una posición arbitraria, donde por convención se le asigna el valor cero a la energía potencial inicial, $E_{Pi} = 0$, ya que por su definición, sólo tiene significado físico el cambio de energía potencial. Esta posición arbitraria se llama ***nivel de referencia*** y puede ser cualquiera, generalmente se toma como nivel de referencia la superficie de la Tierra o cualquier otra posición conveniente, pero una vez que se ha elegido no debe cambiarse. Con esta elección, se define la energía potencial en una posición ***r*** como:

$$\boxed{E_P(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}} \qquad (5.4)$$

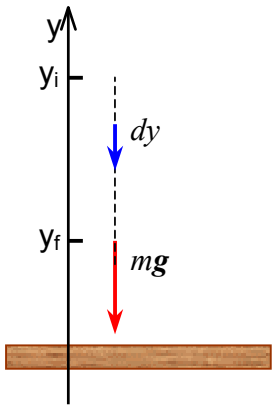
Para las fuerzas no conservativas no existe una función de energía potencial, ya que el trabajo, que depende de la trayectoria, no es función de la posición inicial y final de la partícula.

***Ejemplo 4.*** *Energía potencial de la fuerza peso.*

Como ejemplo, se calculará el trabajo y la energía potencial para una partícula que se deja caer libremente desde una posición inicial $y_i$ a otra posición final $y_f$. La fuerza que produce el movimiento de la partícula es la gravitacional, que para caída libre es el peso $P = mg$, entonces el trabajo es:

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y_i}^{y_f} mg(-\hat{j}) \cdot dy(-\hat{j})$$

$$W = mgy_f - mgy_i$$




Esto demuestra que la fuerza gravitacional es conservativa, ya que el trabajo realizado por esa fuerza depende sólo de las posiciones inicial y final de la partícula.

La variación de energía potencial de la partícula es:

$$\Delta E_P = -W = -(mgy_f - mgy_i) = mgy_i - mgy_f$$

Como las posiciones inicial y final son arbitrarias, se define la energía potencial de la fuerza gravitacional, o simplemente energía potencial gravitacional $E_g$, válida en las condiciones de caída libre, por la expresión:

$$\boxed{E_g = mgy} \qquad (5.5)$$

***Ejemplo 5.*** *Energía potencial de la fuerza elástica.*

Otra fuerza conservativa es la que ejerce un resorte deformado sobre un cuerpo fijo a él. El trabajo realizado por la fuerza elástica del resorte sobre el cuerpo ya se calculó, y es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

Esto permite definir la energía potencial elástica $E_E$ almacenada en un resorte como:

$$\boxed{E_E = \frac{1}{2}kx^2} \qquad (5.6)$$

La energía potencial elástica es cero cuando el resorte no está deformado, es máxima cuando alcanza su deformación máxima y es siempre positiva ya que es proporcional a $x^2$.

## *5.7 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA.*

Cuando una partícula se mueve por la acción de una fuerza conservativa, por el teorema del trabajo y la energía se tiene que el trabajo realizado por la fuerza es igual a la variación de energía cinética de la partícula:

$$W = \Delta E_c$$

Pero como la fuerza es conservativa, entonces $W = -\Delta E_P$, donde $E_P$ puede ser la energía potencial gravitacional, elástica o cualquier otra forma de energía potencial mecánica. Igualando ambas expresiones del trabajo se obtiene:

$$\Delta E_c = -\Delta E_P \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_P = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta( E_c + E_P ) = 0$$

esta ecuación representa la ***ley de conservación de la energía mecánica,*** que se puede escribir también de la siguiente forma:

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

Se puede definir la energía mecánica total como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E = E_c + E_P$$

entonces la conservación de la energía se escribe como:

$$\boxed{E_i = E_f \Rightarrow E = cte} \qquad (5.7)$$

La *ley de conservación de la energía mecánica* establece que la energía mecánica total de un sistema permanece constante si las únicas fuerzas que realizan trabajo sobre el sistema son conservativas. Cuando una cantidad física no

cambia, decimos que se conserva. Decir que la energía se mantiene constante significa que la cantidad total de energía de un sistema natural no cambia, no se puede crear ni destruir energía, sólo se puede convertir de una forma a otra. Es una de las leyes fundamentales de la Física, deducida a partir de una de las leyes fundamentales de la mecánica, la segunda ley de Newton.

Si las fuerzas presentes en un sistema mecánico no son conservativas, como ocurre en los sistemas reales, la energía aparentemente no se conserva, porque se transforma en otro tipo de energía. Por ejemplo, la fuerza de roce se dice que es disipativa porque disipa energía, que se transforma en calor en la superficie de contacto entre los cuerpos. En efecto, se puede aplicar el teorema del trabajo y la energía tomando en cuenta la existencia de las fuerzas no conservativas. Si $W_{NC}$ es el trabajo sobre una partícula de todas las fuerzas no conservativas y $W_C$ el trabajo de todas las fuerzas conservativas, entonces:

$$W_{NC} + W_C = \Delta E_c$$

Como $W_C = -\Delta E_P$ entonces:

$$\begin{aligned} W_{NC} &= \Delta E_C + \Delta E_P \\ W_{NC} &= (E_{Cf} - E_{Ci}) + (E_{Pf} - E_{Pi}) \\ W_{NC} &= (E_{Cf} + E_{Pf}) - (E_{Ci} + E_{Pi}) = E_f - E_i \end{aligned}$$

Es decir, el trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas es igual al cambio de energía mecánica total del sistema.

***Ejemplo 6.*** *Conservación de la energía en el movimiento de caída libre.*

Aplicando el principio de conservación de la energía para un cuerpo en caída libre, se obtiene a la siguiente expresión:

$$E = cte \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} = E_{cf} + E_{gf}$$

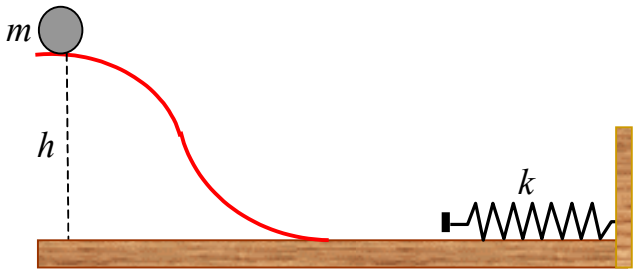
$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

Si se conoce la rapidez inicial y la posición inicial y final de la partícula, se puede calcular su rapidez final:

$$v_f = \sqrt{v_i + 2g(y_i - y_f)}$$

expresión equivalente a la obtenida por métodos cinemáticos.

***Ejemplo 7.*** *Para el sistema de la figura, donde el cuerpo de masa m desliza desde una altura h por la superficie sin roce, calcular la compresión máxima del resorte cuando la masa choca con él.*




***Solución:*** si no hay roce, se conserva la energía mecánica, entonces:

$$E = cte \Rightarrow E_{ci} + E_{gi} + E_{Ei} = E_{cf} + E_{gf} + E_{Ef}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f + \frac{1}{2}kx_f^2$$

la energía elástica inicial es cero porque en esa posición no hay resorte, la energía cinética inicial y final es cero, porque m parte del reposo y en la compresión máxima del resorte se detiene, la energía gravitacional final es cero en el suelo, porque la altura es cero, entonces queda:

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

## *PROBLEMAS SELECTOS.*

1. El chino Ríos recibe un servicio del Guga con una pelota de tenis de 50 gr, la cual al llegar a la raqueta del chino con una rapidez de 200 km/hr, la hunde 2 cm, se detiene y sale nuevamente disparada (todo eso ocurre en un intervalo de tiempo muy pequeño). Calcular: a) la energía cinética de la pelota antes que golpee la raqueta, b) el trabajo realizado sobre la pelota durante el golpe, c) la fuerza media sobre la pelota. R: a) 77J, c) 3850N

2. Sobre un cuerpo de 2 kg que se movía inicialmente con una rapidez de 5 m/s hacia la derecha, en una superficie horizontal, se aplica una fuerza de 10 N inclinada 30º respecto a la horizontal. El desplazamiento mientras se ejerce la fuerza fue de 5 m, y el coeficiente de roce es 0.25. Calcular a) el trabajo realizado por cada fuerza sobre el cuerpo, b) la variación de energía cinética, c) la velocidad final del cuerpo. R: b) 24.5 J, c) 7 m/s.

3. Algunos alumnos de Forestal, después de saber el resultado de su primer certamen, se premian subiendo varias veces al cerro del EULA. a) ¿Cuánto trabajo realizan en $n$ subidas? b) Comparar la potencia cuando suben el cerro corriendo con la potencia cuando bajan lentamente. c) Un kilo de grasa entrega unos 10 kWh de energía, si se convierte grasa en energía con un rendimiento del 20%, ¿a un cerro de que altura tendrían que subir para bajar 2 kilos de 'peso'? R: a) $n(mgh)$ $J$, c) si $m=72$ $kg$, $20$ $km$.

4. Por una sección unitaria del Salto del Laja fluye agua a razón de $Q$ $kg/s$. Suponiendo que de la potencia generada por la caída del agua en el salto se aprovecha un 58%, ¿Cuántas ampolletas de $100$ $W$ se podrían encender con esa potencia? R: depende de valores estimados.

5. Se tiene un sistema formado por 5 esferitas de masa $M$ unidas por cuerdas tensas de masa despreciable, separadas $L$ entre sí, colocado inicialmente en forma horizontal. Calcular el trabajo necesario para poner una a una todas las esferitas en posición vertical. R: $10\ MgL$.

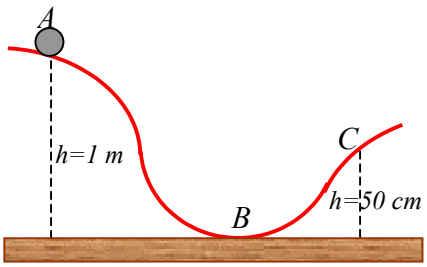
6. Sobre un cuerpo de masa $M$ que se movía inicialmente con una rapidez $v_0$ hacia la derecha, en una superficie horizontal de coeficiente de roce $\mu$, se aplica una fuerza de magnitud $F$ inclinada $\alpha$ sobre la horizontal. El desplazamiento mientras se ejerce la fuerza fue $D$. Calcular: a) el trabajo rea-

lizado por $F$ sobre el cuerpo, b) el trabajo realizado por la fuerza de roce, c) la variación de energía cinética, d) la rapidez final del cuerpo. Expresar los resultados en función de los valores conocidos $M$, $v_0$, $\mu$, $F$, $\alpha$ y $D$. R: b) $-\mu(Mg-F\text{sen}\alpha)D$, d) $\sqrt{v_o^2 + 2(F\cos\alpha-\mu(Mg-F\text{sen}\alpha)D/M}$.

7. Un bloque de masa $m$ se suelta desde la parte superior de una pista lisa formada por un cuadrante cóncavo de circunferencia de radio $R$ por la cual desliza. Cuando llega al extremo inferior choca con un resorte de constante $k$ que se encuentra ubicado sobre una superficie horizontal. Calcular: a) la energía cinética del cuerpo justo antes de chocar con el resorte, b) la compresión del resorte. R: a) $mgR$, b) $\sqrt{2mgR/k}$.

8. Desde la base de un plano inclinado 30º respecto a la horizontal, se lanza en subida un cuerpo de *1 kg*. El cuerpo recorre *0.5 m* y después comprime *0.1 m* un resorte de constante *100 N/m* ubicado en la parte superior del plano antes de detenerse. a) Si el plano es liso, determine la rapidez inicial del cuerpo. b) Si la rapidez con la que el cuerpo inicia la subida del plano fuera el doble de la calculada en a) y el coeficiente de roce entre el cuerpo y el plano fuera de *0.2*, ¿cuánto se comprimirá el resorte? c) ¿y si la rapidez se reduce a la mitad? R: a) 2.46 m/s, b) 0.38 m. c) no hay compresión.

*Figura 1.*




9. Una esfera de *0.5 kg* desliza por un riel curvo a partir del reposo en el punto A de la figura 1. El segmento de A a B no tiene roce y el de B a C si tiene roce. a) Calcular la rapidez del bloque en B. b) Si el bloque llega al reposo en C, calcular el trabajo por el roce en ese tramo. R: a) 4.5 m/s, b)–2.5 J.

10. Un bloque de *1kg* que cuelga por el costado de una mesa se conecta por una cuerda que pasa por una polea ideal a un resorte de constante *100 N/m*, ubicado horizontalmente sobre la mesa, fijo en el otro extremo. Se sostiene inicialmente al bloque en reposo manteniendo al resorte sin estirar. a) Calcular el estiramiento total del resorte después que la masa ha descendido hasta quedar otra vez en reposo. b) Determine la rapidez del bloque después que se suelta, cuando el resorte se ha estirado la mitad del total. R: a) 0.2 m, b) 1 m/s.

11. Una pelota describe una circunferencia vertical en el extremo de una cuerda. Si la energía total de la pelota permanece constante, demuestre que la tensión en la cuerda en la parte más baja es mayor que la tensión en el punto más alto en seis veces el peso de la pelota.

12. A la masa de 1 kg de un péndulo de 1 m de longitud, se la impulsa con una rapidez inicial de 2 m/s en su posición más baja. Cuando la cuerda forma un ángulo de 30º con la vertical, encontrar a) el cambio de energía potencial de la masa, b) la rapidez de la masa, c) la tensión en la cuerda, d) la altura máxima alcanzada por la masa sobre su posición más baja.

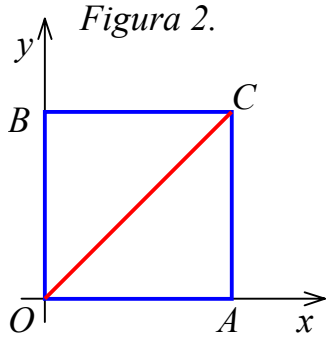
13. La esfera de masa $m$ de un péndulo de longitud $L$ se mantiene inicialmente en posición vertical. Cuando sopla un viento con una fuerza constante $F$, demuestre que si la esfera comienza a moverse desde el reposo, la altura que alcanza es $H=2L/(1+(mg/F)^2)$. Calcular también la altura de equilibrio de la esfera.

14. Una masa de peso $P$ N se amarra a un hilo de pesca que puede soportar $4P$ N. Si la masa se suelta desde el reposo en la posición horizontal, calcular el ángulo desde la vertical al cual se rompe el hilo.

## *PROBLEMAS VARIOS.*

15. Una partícula de 4 kg. se mueve desde el origen hasta la posición C que tiene coordenadas $x=5m$ e $y=5m$ con la influencia de la gravedad, la cual actúa en la dirección $y$ negativa (figura 2). Calcule el trabajo realizado por la gravedad al ir de O a C a lo largo de las siguientes trayectorias: a) OAC, b) OBC, c) OC. R: -200 J.

*Figura 2.*



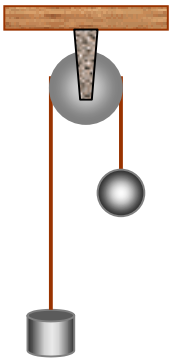

16. Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve sobre el plano $xy$ está dada por $\vec{F}=\left(2y\hat{i}+x^2\hat{j}\right)N$, en donde $x$ e $y$ están en m. La partícula se mueve desde el origen hasta una posición final de coordenadas $x=5m$ e $y=5m$, como en la figura 2. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza a lo largo de a) OAC, b) OBC, c) OC. d) ¿F es conservativa o no conservativa? R: a) 125 J, b) 50 J, c) 66.7 J d) No.

17. Una sola fuerza constante $\vec{F} = \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)$ $N$ actúa sobre una partícula de 4 kg. a) Calcule el trabajo efectuado por esta fuerza si la partícula se mueve desde el origen hasta un punto cuyo vector de posición es $\vec{r} = \left(2\hat{i} - 3\hat{j}\right)$ m. ¿Este resultado depende de la trayectoria? Explicar b) ¿Cuál es la rapidez de la partícula en ***r*** si su rapidez en el origen es 4 m/s. c) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial de la partícula? R: a) –9 J, b) 3.4 m/s, c) 9 J.

18. Una fuerza ***F*** paralela a un plano inclinado en 37º, se aplica sobre un bloque de masa 50 kg. El bloque se mueve con una rapidez constante de 10 m/s hacia arriba del plano, una distancia de 20 m. El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano inclinado es 0.2. Calcular el trabajo efectuado sobre el bloque por las fuerzas a) ***F*,** b) roce y c) de gravedad. R: a) 7.5 kJ, b) –1.6 kJ, c) –6 kJ.

19. Se lanza una pelota en un ángulo α respecto a la horizontal, desde una altura *h,* con una rapidez inicial $v_o$. Usar el método de la energía para calcular, cuando su altura es *h/2* la velocidad de la pelota.

*Figura 3.*



20. Se conectan dos masas por una cuerda ligera que pasa por una polea de masa despreciable, sin fricción, como se muestra en la figura 3. Una masa de 5 kg se libera desde el reposo, de una altura de 2.5 m sobre el suelo. Utilizando la ley de la conservación de la energía determinar: a) la velocidad final de la masa de 5 kg, b) la velocidad de la masa de 3 kg justo cuando la masa de 5 kg choca con el piso, c) la altura máxima a la cual se elevará la masa de 3 kg. R: b) 4.5 m/s, c) 5 m.

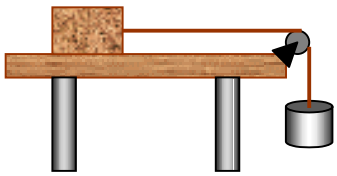
21. Un bloque de 5 kg. se pone en movimiento subiendo por un plano inclinado en un ángulo de 30° respecto a la horizontal, con una rapidez inicial de 8 m/s. El bloque alcanza el reposo después de recorrer 3 m a lo largo del plano inclinado áspero. Determine: a) el cambio en la energía cinética. b) el cambio en la energía potencial. c) la fuerza de roce sobre el bloque. d) el coeficiente de roce cinético. R: a) –160 J, b) 73.5 J, c) 28 N, d) 0.7.

22. Un bloque de 5 kg. se mueve hacia la derecha sobre una superficie horizontal áspera y choca contra un resorte horizontal, de constante 100 N/m. La rapidez del bloque justo antes del choque es 10 m/s. Cuando el bloque

rebota hacia la izquierda con el resorte no comprimido, su rapidez al liberarlo es 5 m/s. Si el coeficiente de razonamiento cinético entre el bloque y la superficie es de 0.4, determine: a) el trabajo realizado por la fricción mientras el bloque se encuentra en contacto con el resorte y b) la distancia máxima que se comprime el resorte.

23. Un bloque de masa *m* comienza a moverse desde una altura *H* sobre un plano inclinado en 30°. Al llegar a la parte inferior del plano, el bloque se desliza por una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción en ambas superficies es μ, calcular la distancia horizontal que deslizará el bloque antes de llegar al reposo.

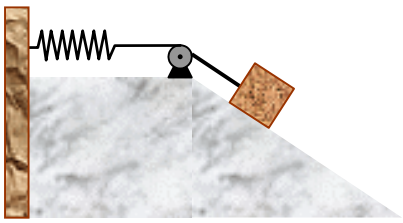
*Figura 4.*



24. El coeficiente de fricción entre el objeto de 3 kg y la superficie de la mesa que se ve en la figura 4, es 0.4. ¿cuál es la rapidez de la masa de 5 kg que cuelga, cuando ha caído una distancia vertical de 1 m?

25. Se coloca un bloque de masa 0.25 kg. sobre un resorte vertical de constante *k=5000 N/m* y se empuja hacia abajo, comprimiendo el resorte una distancia de *0.1 m.* Cuando el bloque se suelta, deja el resorte y continua su camino hacia arriba. ¿A qué altura máxima por encima del punto de liberación llega el bloque? R: 10.3 m.

*Figura 5.*



26. Un bloque de 2 kg sobre un plano áspero inclinado en 30º, se conecta a un resorte ligero de constante 100 N/m (figura 5). El bloque se suelta del reposo cuando el resorte no está estirado y se mueve 20 cm hacia abajo del plano antes de detenerse. Calcular el coeficiente de roce. R: 0.12.

27. Suponga que el plano inclinado del sistema descrito en el problema anterior es liso. El bloque se libera a partir del reposo con el resorte inicialmente no estirado. a) ¿Cuánto se desplaza hacia abajo del plano antes de quedar en reposo? b) ¿cuál es la aceleración del bloque al llegar a su punto más bajo? ¿Su aceleración es constante? c) Describa las transformaciones de energía que ocurren durante el descenso del bloque.