| **Movimientos** | | |
|---|---|---|
| **Movimiento Rectilíneo**<br>Posición y desplazamiento<br>Velocidad media y rapidez media<br>Velocidad instantánea.<br>Ejercicios resueltos de velocidad.<br>Aceleración media. Aceleración instantánea.<br>Ejercicios resueltos de aceleración<br>Movimiento con aceleración constante<br>Movimiento de caída libre.<br>Ejercicios resueltos de caída libre<br>Magnitudes vectoriales y escalares. Suma de vectores. Producto escalar | **Movimiento en dos dimensiones**<br>Posición y desplazamiento<br>Velocidad media. Velocidad instantánea<br>Aceleración media. Aceleración instantánea<br>Componentes intrínsecas de la aceleración<br>Movimiento con aceleración constante. Movimiento parabólico | **Movimiento Circular**<br>Movimiento circular uniforme<br>Movimiento circular no uniforme<br>Problemas resueltos de movimiento circular<br>**Movimiento relativo** a velocidades bajas |
| **Problemas propuestos** de Movimientos y **Problemas resueltos** | | |

## Movimiento a lo largo de una línea recta

El mundo, y todo lo que hay en él se mueve. Aunque algunas cosas nos parecen estacionarias, como una carretera, se mueve con la rotación de la Tierra, la Tierra da vueltas alrededor del sol, el sol gira alrededor del centro de la Vía Láctea, y la galaxia tiene un movimiento relativo respecto de otras galaxias.

Las propiedades generales del movimiento las vamos a restringir en tres cosas: 1) el movimiento se va a realizar a lo largo de una **línea recta**, que puede ser vertical, horizontal o inclinada; 2) No vamos a especificar la causa del movimiento; 3) El objeto en movimiento es una partícula (que no tiene estructura interna, como un electrón) o un objeto que se mueve como una partícula (cada porción se mueve en la misma dirección y a la misma velocidad).

### Posición y desplazamiento.-

Localizar un objeto significa encontrar su **posición relativa** a algún punto de referencia, el origen de un eje (OX). Por ejemplo, una partícula está localizada en x = 5 m, que significa que está en la posición a 5 m en la dirección positiva desde el origen.

Un cambio desde una posición $x_1$ a otra posición $x_2$ se llama **desplazamiento** $\Delta x = x_2 - x_1$

El desplazamiento es un ejemplo de magnitud vectorial ya que posee magnitud y dirección. Si se desplaza desde la posición $x_1$ = 2 m hasta la posición $x_2$ = 5 m, el desplazamiento es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5\,\text{m} - 2\,\text{m} = 3\,\text{m}\,.$$

Si se desplaza desde la posición $x_1$ = 2 m hasta la posición $x_2$ = -5 m, el desplazamiento es

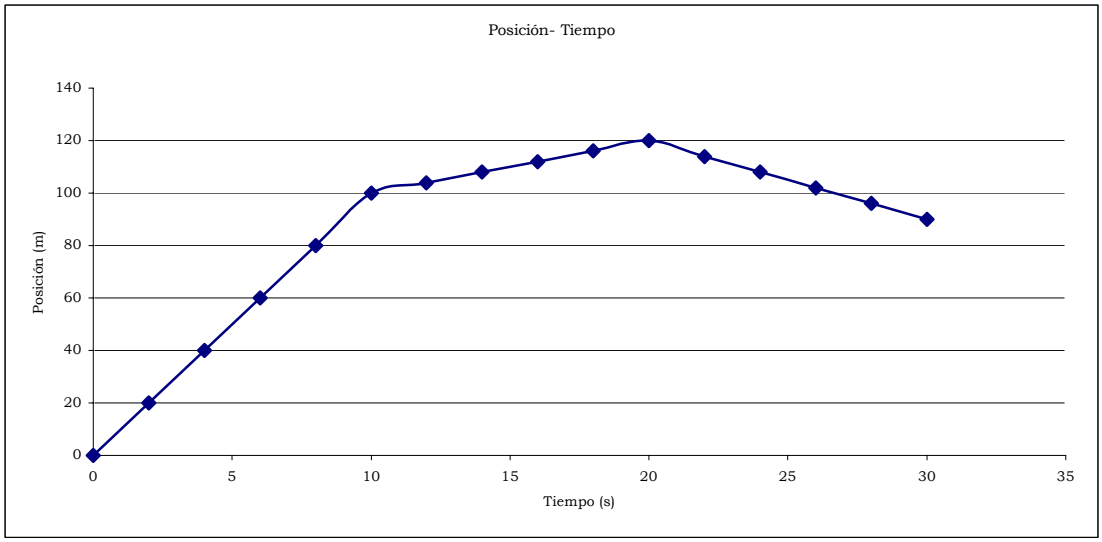
$$\Delta x = x_2 - x_1 = -5\,\text{m} - 2\,\text{m} = -7\,\text{m}\,.$$

### Velocidad media y rapidez media.-

Una forma de representar el movimiento es dibujar la posición x en función del tiempo. En el eje de ordenadas se representa la posición x y en el eje de abscisas el tiempo correspondiente.

Por ejemplo, una partícula se mueve, sobre una línea recta, durante 10 s con una velocidad de 10 m/s, durante los 10 s siguientes con una velocidad de 2 $m\cdot s^{-1}$ y en los 10 s últimos con una velocidad de -3 $m\cdot s^{-1}$

| Tiempo (s) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Posición (m) | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 104 | 108 | 112 | 116 | 120 | 114 | 108 | 102 | 96 | 90 |




En los diez primeros segundos del recorrido la partícula se desplaza desde la posición x = 0 m hasta x = 100 m, en los diez segundos siguientes desde la posición x = 100 m hasta la posición x = 120 m y en los diez últimos segundos desde la posición x = 120 m hasta la posición x = 90 m.

Luego al cabo de los treinta segundos $\Delta x = x_2 - x_1 = 90\,m - 0\,m = 90\,m$ .

Para determinar la velocidad promedio durante todo el recorrido se puede hacer de dos formas: calculando la **velocidad media** $v_m$ y la **rapidez media** $s_m$. La **velocidad media**, en cada tramo del recorrido, y la velocidad media total es la siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{v}_1 = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{100\,m - 0\,m}{10\,s - 0\,s} = 10\,\dfrac{m}{s} \\ \overline{v}_2 = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{120\,m - 100\,m}{20\,s - 10\,s} = 2\,\dfrac{m}{s} \\ \overline{v}_3 = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \dfrac{90\,m - 120\,m}{30\,s - 20\,s} = -3\,\dfrac{m}{s} \end{array}\right\} \quad \overline{v} = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_3 - x_0}{t_3 - t_0} = \frac{90\,m - 0\,m}{30\,s - 0\,s} = 3\,\frac{m}{s}$$

Y, la **rapidez media** $\overline{s} = s_m = \dfrac{\text{distancia total}}{\Delta t} = \dfrac{100\,m + 20\,m + 30\,m}{30\,s - 0\,s} = \dfrac{150\,m}{30\,s} = 5\,\dfrac{m}{s}$

La rapidez media y la velocidad media son diferentes, en la rapidez consideramos la distancia total recorrida por la partícula, y en la velocidad media el desplazamiento, también difieren en que en la rapidez media no se incluye dirección. Algunas veces coinciden, aunque tengan signo distinto, pero cuando la partícula retrocede sobre su camino, los resultados pueden ser muy diferentes.

**Velocidad instantánea y rapidez o celeridad**.-

Hemos aprendido a determinar la velocidad de una partícula en un intervalo de tiempo, pero lo que más nos interesa es saber la velocidad de la partícula en un instante determinado. Es decir, su velocidad instantánea o velocidad.

La velocidad en cualquier instante se obtiene de la velocidad promedio reduciendo el intervalo de tiempo $\Delta t$ hasta aproximarlo a cero. Cuando $\Delta t$ disminuye, la velocidad promedio se aproxima al valor límite que es la velocidad en aquel instante

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Para deteminar la velocidad instantánea a partir de la ecuación que relaciona la posición y el tiempo **utilizamos el operador derivada** de la función x(t) respecto de la variable t. Sea la función $\mathbf{x = m \cdot t^n}$, siendo m un número constante y n el exponente entero de la variable t:

$$\left\{x = m \cdot t^n\right\} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}\left(m \cdot t^n\right) = m \cdot n \cdot t^{n-1}$$

Por **ejemplo**, si la ecuación posición-tiempo es **$x = 2 \cdot t^2$**, entonces la velocidad instantánea es igual a **$v = 4t$**:

$$\left\{x = 2 \cdot t^2\right\} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2 \cdot t^2\right) = 2 \times 2 \cdot t^{2-1} = 4t$$

**Ejercicios resueltos de velocidad**:

**1º)** Determina la velocidad media y la velocidad instantánea de una partícula que se mueve mediante la siguiente ecuación de movimiento **$x = 5 \cdot t$**. Obtenemos que la velocidad media es constante y, por tanto, coincide con la velocidad instantánea, y lo hacemos de **dos formas**

$$x = 5t \quad \left.\begin{cases} x_1 = 5t_1 \\ x_2 = 5(t_1 + \Delta t) \\ \Delta x = x_2 - x_1 = 5\Delta t \end{cases}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{5\Delta t}{\Delta t} = 5\,\frac{m}{s} \\ v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_m = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = 5\,\frac{m}{s} \end{array}\right\}$$

$$x = 5t \quad \left\{v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t) = 5\,\frac{m}{s}\right\}$$

**2º)** Determina la velocidad media y la velocidad instantánea de una partícula que se mueve mediante la ecuación de movimiento **$x = 5 \cdot t^2$**. Ahora, obtenemos que la velocidad media no es constante ya que depende del tiempo, por lo que la velocidad instantánea será distinta en cada tiempo, y lo hacemos de **dos formas**.

$$x = 5t^2 \quad \left.\begin{cases} x_2 = 5(t_1 + \Delta t)^2 = 5\left(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2\right) \\ x_1 = 5t_1^2 \\ \Delta x = x_2 - x_1 = 10t_1\Delta t + 5\Delta t^2 \end{cases}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{10t_1\Delta t + 5\Delta t^2}{\Delta t} = 10t_1 + 5\Delta t \\ v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_m = 10t_1 \end{array}\right\}$$

$$x = 5t^2 \quad \left\{v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5t^2\right) = 10t\,\frac{m}{s}\right\}$$

**3º)** Determina la velocidad instantánea, en el instante $t_1$=1 s, de una partícula que se mueve mediante la ecuación de movimiento **$x = 1 + 4 \cdot t^2$**.

$$x = 1 + 4t^2 \quad \left.\begin{cases} x_2 = 1 + 4(t_1 + \Delta t)^2 = 1 + 4\left(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2\right) \\ x_1 = 1 + 4t_1^2 \\ \Delta x = x_2 - x_1 = 8t_1\Delta t + 4\Delta t^2 \end{cases}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{8t_1\Delta t + 4\Delta t^2}{\Delta t} = 8t_1 + 4\Delta t \\ v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = 8t_1 \end{array}\right\}$$

$$x = 1 + 4t^2 \quad \left\{v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1 + 4t^2\right) = 8t\,\frac{m}{s}\right\}$$

En el lenguaje del cálculo, la velocidad instantánea es la rapidez con la que la posición x de una partícula está cambiando con el tiempo en un instante dado. **La velocidad** de una partícula en un instante **es la pendiente** de su curva de posición en el punto representado en aquel instante. La rapidez es la magnitud de la velocidad. Los velocímetros de los coches miden la rapidez, no la velocidad, porque no nos dicen nada sobre la dirección del movimiento.

**Aceleración media y aceleración instantánea**.-

Cuando cambia la velocidad de una partícula, decimos que la partícula experimenta una aceleración.

La **aceleración media** en un intervalo de tiempo es $\bar{a} = a_m = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

La **aceleración instantánea** o aceleración $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} a_m = \dfrac{dv}{dt}$

La aceleración de una partícula en un instante es la rapidez a la cual su velocidad está cambiando en aquel instante. **La aceleración** de una partícula en cualquier punto **es la pendiente** de la curva de v(t) en aquel punto.

**Ejercicios resueltos de aceleración**:

**1º)** La posición de una partícula, en función del tiempo, se ha determinado que cumple la siguiente ecuación: **$x = 10 + 20 \cdot t - 2 \cdot t^2$**. Calcula la velocidad media y la velocidad instantánea, en función del tiempo, y la aceleración. Dibuja las gráficas posición-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo

$$x = 10 + 20t - 2t^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 10 + 20(t_1 + \Delta t) - 2(t_1 + \Delta t)^2 = 10 + 20t_1 + 20\Delta t - 2\left(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2\right) \\ x_1 = 10 + 20t_1 - 2t_1^2 \\ \Delta x = x_2 - x_1 = 20\Delta t - 4t_1\Delta t - 2\Delta t^2 \end{array} \right\}$$

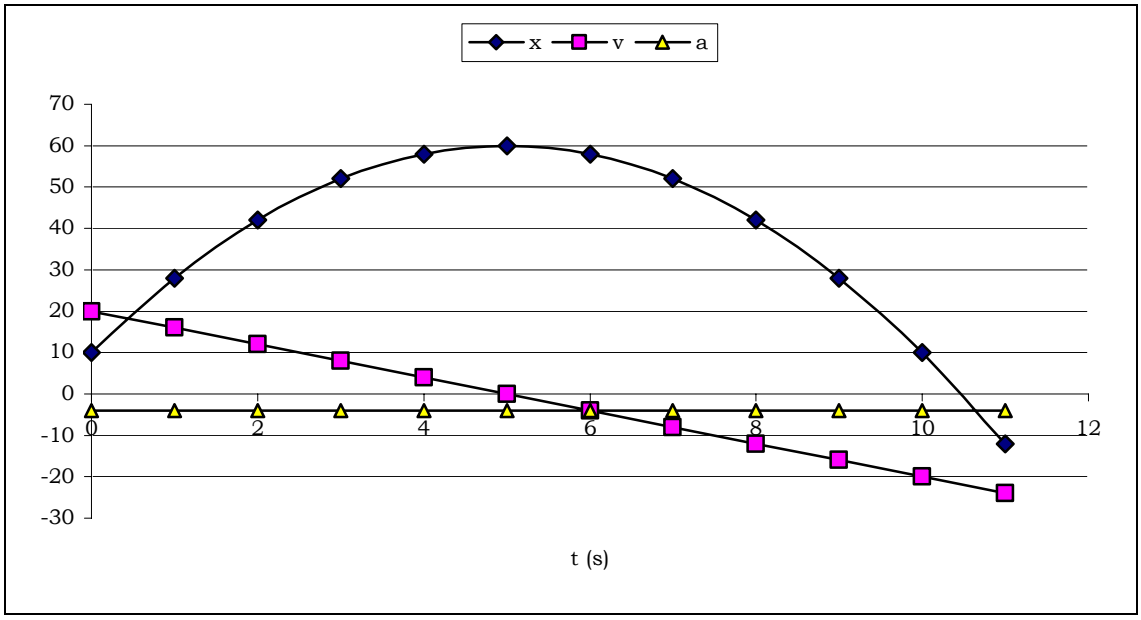
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \left\{ v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 4t_1\Delta t - 2\Delta t^2}{\Delta t} = 20 - 4t_1 - 2\Delta t \right\} \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(20 - 4t_1 - 2\Delta t)}{\Delta t} = 20 - 4t_1$$

$$v = 20 - 4t \quad \left\{ \begin{array}{l} v_2 = 20 - 4(t_1 + \Delta t) \\ v_1 = 20 - 4t_1 \\ \Delta v = -4\Delta t \end{array} \right\} \left\{ a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-4\Delta t}{\Delta t} = -4\ \frac{m}{s^2} \right\} \quad a = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = -4\ \frac{m}{s^2}$$

$$x = 10 + 20t - 2t^2 \quad \left\{ v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(10 + 20t - 2t^2\right) = 20 - 4t \right\} \quad v = 20 - 4t$$

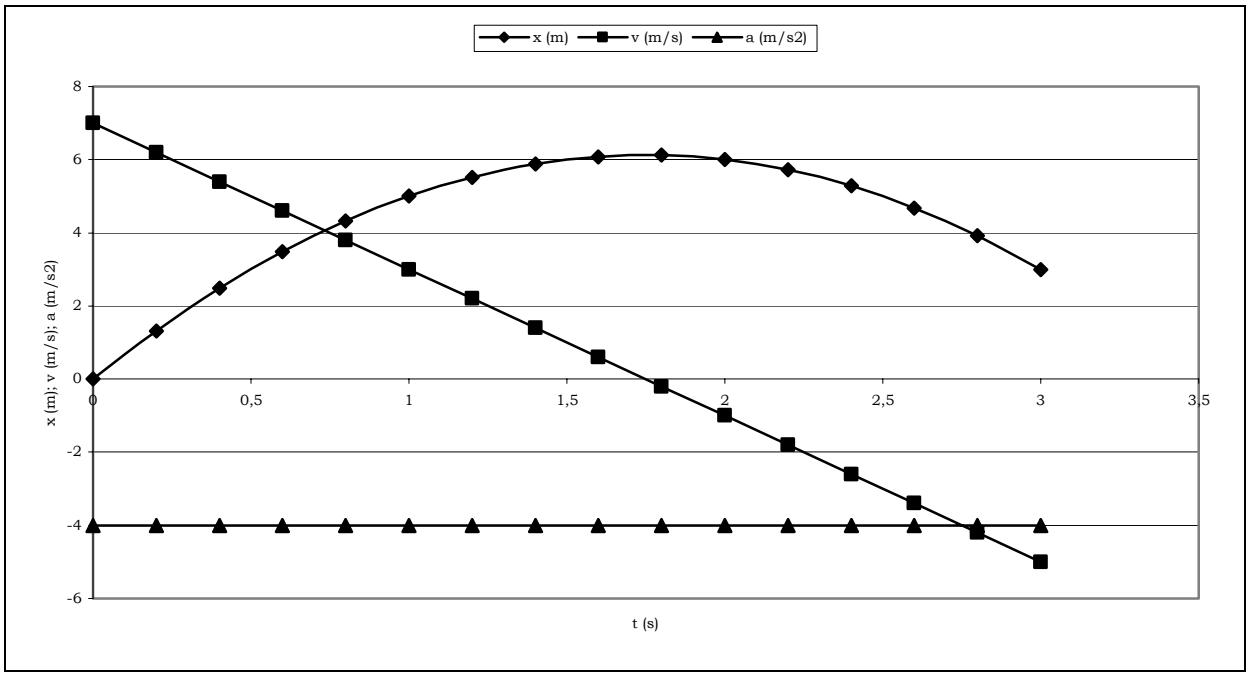
$$v = 20 - 4t \quad \left\{ a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(20 - 4t) = -4\ \frac{m}{s^2} \right\} \quad a = -4\ \frac{m}{s^2}$$

| **$x = 10 + 20 \cdot t - 2 \cdot t^2$** | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| x | 10 | 28 | 42 | 52 | 58 | 60 | 58 | 52 | 42 | 28 | 10 | -12 |
| v | 20 | 16 | 12 | 8 | 4 | 0 | -4 | -8 | -12 | -16 | -20 | -24 |
| a | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 |




**2º)** Si la posición de una partícula viene dada por la ecuación: **$x = 7 \cdot t - 2 \cdot t^2$**, calcula la velocidad instantánea y la aceleración. Dibuja las gráficas posición-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo

| t (s) | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x (m) | 0 | 1,32 | 2,48 | 3,48 | 4,32 | 5 | 5,52 | 5,88 | 6,08 | 6,12 | 6 | 5,72 | 5,28 | 4,68 | 3,92 | 3 |
| v (m/s) | 7 | 6,2 | 5,4 | 4,6 | 3,8 | 3 | 2,2 | 1,4 | 0,6 | -0,2 | -1 | -1,8 | -2,6 | -3,4 | -4,2 | -5 |
| a (m/s²) | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 | -4 |




**Ecuaciones del movimiento con aceleración constante**:

Hasta ahora a partir de una ecuación determinada posición-tiempo, x-t, hemos obtenido la velocidad media, la velocidad instantánea, la aceleración media y la aceleración instantánea.

Ahora vamos a desarrollar el proceso inverso. Partimos del tipo de movimiento en que la aceleración permanece constante, en ellos la distinción entre aceleración media y aceleración instantánea pierde su significado. Si $v_0$ es la velocidad inicial, en el tiempo t = 0, y v la velocidad en cualquier tiempo:

$$a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_0}{t - 0} \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + at$$

Si la **aceleración es constante**, la **velocidad instantánea** $v = v_0 + at$

Si representamos la velocidad en el eje de ordenadas, v, y el tiempo en el eje de abscisas, t, el resultado es una línea recta. Siendo la aceleración, a, la pendiente de la recta y la velocidad inicial, $v_0$, el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas.

La velocidad media, $v_m$, en cualquier intervalo de tiempo Δt, es la media de la velocidad inicial, $v_0$, y la velocidad final del intervalo, v. Por lo que el desplazamiento **$\Delta x = x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$**

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x - x_0}{t - 0} = \dfrac{x - x_0}{t} \\ \Delta x = x - x_0 = v_m t = \dfrac{(v_0 + v)}{2} t = \dfrac{(v_0 + v_0 + at)}{2} t == \dfrac{(2\, v_0 + at)}{2} t = v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

La **posición en cada instante** $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Hemos obtenido que en la ecuación posición-tiempo, el término independiente $x_0$ representa la posición inicial para t=0, el término que multiplica a la variable t es la velocidad inicial $v_0$, y el término que multiplica a la variable $t^2$ es la mitad de la aceleración instantánea o media.

En todos los problemas, con aceleración constante, están implicadas **cinco magnitudes** desplazamiento, **$(x-x_0)$**, tiempo, **t**, velocidades instantánea e inicial, **v** y **$v_0$**, y aceleración, **a**.

Usualmente, una de ellas no se conoce en un problema. Hay dos ecuaciones que contienen cuatro de dichas magnitudes, pero no las mismas cuatro.

En la ecuación $\mathbf{v = v_0 + at}$ no está presente el desplazamiento ($x-x_0$).

En la ecuación $\mathbf{x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2}$ no está presente la velocidad v.

Estas ecuaciones pueden combinarse de tres formas para obtener tres ecuaciones adicionales: eliminando t, eliminando a, eliminando $v_0$.

$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 + at \\ \Delta x = x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{elimina-t: } \Delta x = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ \text{elimina-a: } \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{v - v_0}{t}\right)t^2 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \\ \text{elimina-}v_0\text{: } \Delta x = (v - at)t + \frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}at^2 \end{array}\right.$$

| Si la aceleración es constante la ecuación posición-tiempo es cuadrática | Si la ecuación posición-tiempo es cuadrática la aceleración es constante |
|---|---|
| $a_m = a = \text{cte.} = \frac{v - v_0}{t}$ | $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ |
| $v = v_0 + at$ | $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right) = v_0 + at$ |
| $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 + at) = a$ |

**Movimiento de caída libre**:

Cuando lanzamos un objeto hacia arriba o hacia abajo y podemos eliminar los efectos del aire sobre su vuelo, se encuentra que el objeto acelera hacia abajo con un valor determinado que se llama **aceleración de caída libre g**. La aceleración g es independiente de las características del objeto, como la masa, la densidad o la forma. El valor de g varía con la latitud y con la altura, siendo mayor en los polos y en la superficie de la Tierra. En el nivel del mar en latitudes medias es de 9,8 $m/s^2$.

Por todo lo anterior las ecuaciones del movimiento cuando la aceleración es constante son válidas para la caída libre. Para hacer más fáciles las ecuaciones consideramos que la dirección del movimiento es vertical a lo largo del eje y con la dirección positiva hacia arriba. Por tanto la aceleración de caída libre es negativa, es decir, hacia abajo sobre el **eje y**. Luego en las ecuaciones a = - g.

$$\left\{\begin{array}{l} v = v_0 + at = v_0 - gt \\ \Delta y = y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta y = 2 \cdot (-g) \cdot \Delta y = -2 \cdot g \cdot \Delta y \end{array}\right.$$

**Ejercicios resueltos de caída libre**:

**1º)** Se lanza un objeto, verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 12 m/s. Calcula: a) el tiempo que tarda en llegar al punto más alto; b) la altura máxima que alcanza; c) el tiempo que tardará en alcanzar el punto situado a 5 m por encima. Dato: g = 9,8 $m/s^2$.

**Respuesta**: El objeto se mueve en una línea recta vertical y consideramos que lo hacen sobre el eje OY, siendo el origen O el suelo. Para resolver el problema hay que saber que en el punto más alto la velocidad es cero.

Tiempo en alcanzar la altura máxima: $\left.\begin{array}{l} v = v_0 + at \\ v = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{ t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 12\,\frac{m}{s}}{-9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 1{,}2\ s \right.$

La altura máxima alcanzada: $\left\{\begin{matrix} v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \\ v = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\Delta y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - \left(12\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(-9,8\,\frac{m}{s^2}\right)} = 7,3\ m\right.$

Tiempo en alcanzar el punto de posición 5 m:

$$\left\{\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right\}\left\{\begin{matrix} \Delta y = 5\ m \\ v_0 = 12\,\frac{m}{s} \\ a = -g = -9,8\,\frac{m}{s^2} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 5 = 12t - 4,9t^2 \\ 4,9t^2 - 12t + 5 = 0 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} t_1 = 0,53\ s \\ t_2 = 1,9\ s \end{matrix}\right.$$

Al calcular el tiempo que tarda en alcanzar el punto situado a 5 m, obtenemos dos valores, 0,53 s y 1,9 s, que son los tiempos que tarda en pasar por la altura de 5 m cuando sube y cuando baja.

**2º)** Se lanza un objeto desde el suelo, verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 14,7 m/s. Calcula: a) el tiempo que tarda en caer al mismo punto que partió; b) la velocidad con la que llega al suelo; c) el tiempo que tarda en alcanzar el punto más alto y la altura máxima que alcanza; d) la distancia total recorrida.

**Respuesta**: El objeto se mueve en una línea recta vertical y consideramos que lo hacen sobre el eje OY, siendo el origen O el suelo.

Tiempo total de vuelo:

$$\left\{\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right\} \quad \left\{\begin{matrix} \Delta y = 0 \\ v_0 = 14,7\,\frac{m}{s} \\ a = -g = -9,8\,\frac{m}{s^2} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_0 t = \frac{1}{2}gt^2 \\ t_{total} = \frac{2v_0}{g} \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \quad t_{total} = 3\ s$$

Velocidad al caer al suelo:

$$\left\{v = v_0 + at_{total}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} v_0 = 14,7\,\frac{m}{s} \\ a = -g = -9,8\,\frac{m}{s^2} \\ t_{total} = \frac{2v_0}{g} \end{matrix}\right\} v = v_0 - g\frac{2v_0}{g} = -v_0 = -14,7\,\frac{m}{s}$$

Altura máxima que alcanza y tiempo que tarda:

$$\left\{\begin{matrix} v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \\ v = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\Delta y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - \left(14,7\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(-9,8\,\frac{m}{s^2}\right)} = 11,0\ m\right.$$

$$\left\{v = v_0 + at\right\} \quad \left\{\begin{matrix} v = 0 \\ a = -g \end{matrix}\right\} \quad t_{subir} = \frac{0 - v_0}{-g} = 1,5\ s$$

La distancia total recorrida es la recorrida en subir y en bajar, en total 22 m.

**3º)** Un vehículo lleva una velocidad constante de 36 km/h y frena con una aceleración de a=-5 m/s². Calcula: a) la distancia que recorre hasta que se para y el tiempo que tarda en parar; b) lo mismo que en el apartado anterior pero considera que la velocidad inicial es el doble.

**Respuesta**:

La distancia hasta que se para:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \quad \left\{\begin{matrix} v = 0 \\ v_0 = 36\,\frac{km}{h} = 10\,\frac{m}{s} \\ a = -5\,\frac{m}{s^2} \end{matrix}\right\} \quad \Delta x = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-\left(10\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(-5\,\frac{m}{s^2}\right)} = 10\ m$$

El tiempo hasta que se para:

$$v = v_0 + at \quad \left\{\begin{array}{l} v = 0 \\ v_0 = 36\,\frac{km}{h} = 10\,\frac{m}{s} \\ a = -5\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right\} \quad t_{parar} = \frac{-v_0}{a} = \frac{-10\,\frac{m}{s}}{-5\,\frac{m}{s^2}} = 2\ s$$

Si la velocidad inicial es el doble, 72 km/h, calcula la distancia hasta que se para y el tiempo:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \quad \left\{\begin{array}{l} v = 0 \\ v_0 = 72\,\frac{km}{h} = 20\,\frac{m}{s} \\ a = -5\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right\} \quad \Delta x = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-\left(2\times 10\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(-5\,\frac{m}{s^2}\right)} = 2^2 \times 10\ m = 40\ m$$

$$v = v_0 + at \quad \left\{\begin{array}{l} v = 0 \\ v_0 = 72\,\frac{km}{h} = 20\,\frac{m}{s} \\ a = -5\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right\} \quad t_{parar} = \frac{-v_0}{a} = \frac{-20\,\frac{m}{s}}{-5\,\frac{m}{s^2}} = 4\ s$$

**Magnitudes vectoriales y escalares**.-

Una partícula confinada a moverse en una línea recta lo hace solamente en dos direcciones. Podemos decir que una dirección es positiva y que la opuesta es negativa. Pero una partícula moviéndose en tres dimensiones con un signo más o menos no sabemos la dirección del movimiento. Por lo que necesitamos una flecha que nos apunte en la dirección del movimiento. Esta flecha es un vector.

Un vector tiene magnitud y dirección y sigue ciertas reglas de combinación. Una cantidad vectorial es una cantidad que puede representarse por un vector; es decir, tiene una cuantía que tiene asociada con ella una magnitud y dirección. Algunas cantidades físicas que se representan por vectores son el desplazamiento, velocidad, aceleración fuerza y campo magnético.

No todas las cantidades físicas tienen dirección. Como la temperatura, la presión, la energía, la masa y el tiempo. Tales cantidades se llaman escalares y se rigen por las reglas del álgebra.

**Suma de vectores**: $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

**Los vectores unitarios**: Son vectores que tienen de magnitud 1 y sus direcciones son perpendiculares. Están dirigidos hacia las direcciones positivas de los ejes x, y, z. Se denominan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Constituyen el sistema de coordenadas de la mano derecha.

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} = \left(a_x + b_x\right)\vec{i} + \left(a_y + b_y\right)\vec{j} \\ |\vec{r}| = \sqrt{\left(r_x\right)^2 + \left(r_y\right)^2} \end{array}\right.$$

**Ejemplo**: Si caminamos 3 km hacia el oeste y después 4 km hacia el noreste formando un ángulo de 60º con la horizontal. Determina el desplazamiento resultante.

**Respuesta**: Considera que nos movemos en un sistema de referencia OXY, entonces el primer desplazamiento estará representado por un vector de módulo 3 km y dirección sobre el eje –OX. El segundo vector desplazamiento tendrá un módulo de 4 km y sus componentes serán: sobre el eje OX (4·cos 60º) y sobre el eje OY (4·sen 60º)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = -3\vec{i}\ km \\ \vec{b} = 4\cos 60^\circ\,\vec{i} + 4\,\mathrm{sen}\,60^\circ\,\vec{j} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \vec{r} = \left(-3 + 4\cos 60^\circ\right)\vec{i} + \left(4\,\mathrm{sen}\,60^\circ\right)\vec{j} \\ |\vec{r}| = \sqrt{\left(-3 + 4\cos 60^\circ\right)^2 + \left(4\,\mathrm{sen}\,60^\circ\right)^2} = 3{,}61\ km \end{array}\right.$$

**Producto escalar**:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \\ \vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot 1\cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} \end{array}\right\} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}\right)\cdot\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j}\right) = a_xb_x + a_yb_y$$

## Movimiento en dos dimensiones

### Posición y desplazamiento:

Una manera general para localizar una partícula o un objeto tipo-partícula es con el **vector de posición** $\vec{r}$ , que es un vector que va desde el punto de referencia al objeto.

El vector de posición de una partícula situada en un punto P del sistema cartesiano OXY, se expresa por $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$ , siendo $r_x$ y $r_y$ las componentes del vector respecto al centro O.

El vector de posición se relaciona con la trayectoria, s, que a su vez depende del tiempo mediante: $\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$.

Si la partícula se mueve, su vector de posición cambia, pero siempre va dirigido desde el origen O hasta el nuevo punto P' que tiene de componentes sobre los ejes r'$_x$ y r'$_y$ : $\vec{r}' = r'_x\,\vec{i} + r'_y\,\vec{j}$

El **vector desplazamiento** es el vector resultante de la diferencia entre los vectores de posición en dos instantes determinados

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = (r'_x - r_x)\vec{i} + (r'_y - r_y)\vec{j}$$

**Ejemplo**: La posición de una partícula en un instante inicial es (-3;2) m y en un instante posterior está en el punto (9;2) m. Escribe los vectores de posición iniciales y finales. Determina el vector desplazamiento

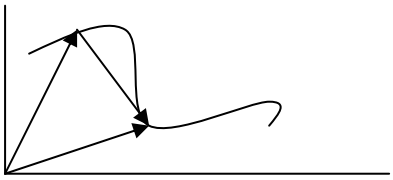
$$\left.\begin{cases}\vec{r}_i = -3\vec{i} + 2\vec{j}\ \text{m}\\ \vec{r}_f = 9\vec{i} + 2\vec{j}\ \text{m}\end{cases}\right\} \begin{cases}\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = (9+3)\vec{i} + (2-2)\vec{j} = 12\vec{i}\ \text{m}\\ |\Delta\vec{r}| = \sqrt{12^2} = 12\ \text{m}\end{cases}$$

### Velocidad media:

La velocidad media de una partícula es la relación entre el vector desplazamiento y el tiempo transcurrido en dicho desplazamiento.

Si la trayectoria de la partícula es recta o si describe una trayectoria curvilínea. La velocidad media es un vector que tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$



### Velocidad instantánea:

La velocidad del punto material en un instante dado es igual a la primera derivada del vector de posición del punto con relación al tiempo.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\vec{i} + \frac{dr_y}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Para hallar las derivadas rápidamente usamos la siguiente regla:

$$\left.\begin{cases}x = m\cdot t^n\\ y = p\cdot t^n\end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{cases}v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\cdot t^n\right) = m\cdot n t^{n-1}\\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(p\cdot t^n\right) = p\cdot n t^{n-1}\end{cases}\right\}$$

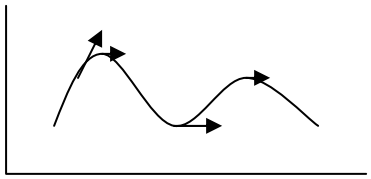
**Ejemplo**: Si la ecuación es $x = 5\cdot t^2$, entonces la velocidad instantánea es $v = (dx/dt) = 10\cdot t$

Como el vector de posición se relaciona con la trayectoria, que a su vez depende del tiempo, la velocidad instantánea también se expresa como el producto del módulo de la velocidad por el vector unitario que nos indica la dirección y sentido de la velocidad:

$$\vec{r} = \vec{r}[s(t)] \quad \Rightarrow \left\{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{u}_t\,|\vec{v}|\right.$$

El módulo de la velocidad es

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \frac{ds}{dt}$$



**Ejercicio resuelto de velocidad en dos dimensiones**: Una partícula se mueve en el plano OXY, siendo su posición en cada instante de la trayectoria la que viene determinada por las coordenadas (x,y) en metros, expresadas por las expresiones siguientes: **$x = -0{,}31 \cdot t^2 + 7{,}2 \cdot t + 28$**; **$y = 0{,}22 \cdot t^2 - 9{,}1 \cdot t + 30$**. Calcula: a) la magnitud y dirección del vector de posición a los 15 s respecto del eje positivo +OX; b) la magnitud y dirección de velocidad instantánea a los 15 s.

**Respuesta**: a) a los 15 s

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} = \left(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28\right)\vec{i} + \left(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30\right)\vec{j}\ \text{m}$$

$$\vec{r} = 66\vec{i} - 57\vec{j}\ \text{m} \begin{cases} |\vec{r}| = \sqrt{(66)^2 + (-57)^2} = 87\ \text{m} \\ \theta = \arctan \dfrac{r_y}{r_x} = -41^\circ \end{cases}$$

b) Para calcular la magnitud de la velocidad instantánea en el tiempo t = 15 s

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\vec{i} + \frac{dr_y}{dt}\vec{j} = \frac{d\left(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28\right)}{dt}\vec{i} + \frac{d\left(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30\right)}{dt}\vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = (-0{,}62t + 7{,}2)\vec{i} + (0{,}44t - 9{,}1)\vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v} = -2{,}1\vec{i} - 2{,}5\vec{j}\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} \begin{cases} |\vec{v}| = \sqrt{(-2{,}1)^2 + (-2{,}5)^2} = 3{,}3\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \\ \theta = \arctan \dfrac{v_y}{v_x} = -130^\circ \end{cases}$$

**<u>Aceleración media</u>**:

La aceleración es una magnitud que nos mide la rapidez de cambio de la velocidad. La aceleración media, que posee un punto material, cuando éste cambia la velocidad instantánea en un intervalo de tiempo como la división entre el incremento del vector velocidad y el tiempo transcurrido en dicho incremento

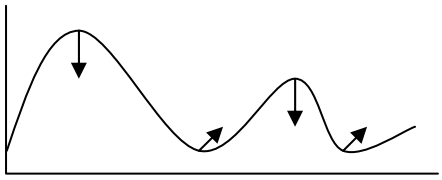
$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

**<u>Aceleración instantánea</u>**:

Se llama aceleración del punto material a una magnitud vectorial que caracteriza el cambio con el tiempo del módulo y de la dirección de la velocidad del punto material. La aceleración del punto material en un instante dado es igual a la primera derivada de la velocidad o a la segunda derivada del vector de posición del punto material con relación al tiempo.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

*La aceleración instantánea, en un movimiento curvilíneo, siempre va dirigida hacia la concavidad de la trayectoria.*



**Ejemplo**: Calcula el vector aceleración a los 15 s, su módulo y dirección, del ejemplo anterior en el que las ecuaciones del movimiento son: **$x = -0{,}31\cdot t^2 + 7{,}2\cdot t + 28$**; **$y = 0{,}22\cdot t^2 - 9{,}1\cdot t + 30$**.

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} = \left(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28\right)\vec{i} + \left(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30\right)\vec{j}\ \text{m}$$

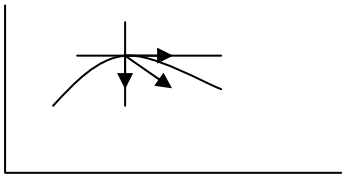
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\vec{i} + \frac{dr_y}{dt}\vec{j} = (-0{,}62t + 7{,}2)\vec{i} + (0{,}44t - 9{,}1)\vec{j}\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = \frac{d(-0{,}62t + 7{,}2)}{dt}\vec{i} + \frac{d(0{,}44t - 9{,}1)}{dt}\vec{j} = -0{,}62\vec{i} + 0{,}44\vec{j}\ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -0{,}62\vec{i} + 0{,}44\vec{j}\ \frac{m}{s^2} \quad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{(-0{,}62)^2 + (0{,}44)^2}\ \frac{m}{s^2} \\ \theta = \arctan\frac{a_y}{a_x} = 145^o \end{cases}$$

**<u>Componentes intrínsecas de la aceleración</u>**.-

Como en un movimiento curvilíneo la aceleración instantánea siempre está dirigida hacia la concavidad de la curva, se puede descomponer en dos componentes, llamadas componentes intrínsecas de la aceleración. Estas componentes son la tangente a la trayectoria y la normal a la trayectoria que está dirigida hacia el centro de la curvatura.



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[|\vec{v}|\vec{u}_t] = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_t + |\vec{v}|\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = \vec{a} - \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_t$$

**Significado físico de las componentes intrínsecas de la aceleración**: La aceleración tangencial $|\vec{a}_t| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$ nos mide los cambios en magnitud del módulo de la velocidad o celeridad. La aceleración normal $|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}$ nos mide los cambios en la dirección de la velocidad.

<u>Demostración:</u> Consideremos una sección de la trayectoria curvilínea. En cada instante el vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria y el vector aceleración está dirigido hacia la concavidad de la trayectoria. La aceleración mide la rapidez de los cambios de velocidad, es decir, los cambios de la celeridad o de la dirección de la velocidad o de los dos.

La rapidez de cambio en el módulo de la velocidad (la celeridad) se denomina aceleración tangencial. La rapidez de cambio en la dirección del vector velocidad se denomina aceleración centrípeta o normal.

Demostración de que el vector resultante de la derivada del vector unitario tangente respecto del tiempo es perpendicular al propio vector unitario tangente:

$$\vec{u}_t \cdot \vec{u}_t = 1 \quad \Rightarrow \quad d(\vec{u}_t \cdot \vec{u}_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}_t}{dt}\vec{u}_t + \vec{u}_t\frac{d\vec{u}_t}{dt} = 2\left(\vec{u}_t \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_t \perp \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \left|\frac{d\vec{u}_t}{dt}\right|\vec{u}_n = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_n = \frac{d\left(\frac{s}{R}\right)}{dt}\vec{u}_n = \frac{|\vec{v}|}{R}\vec{u}_n$$

**<u>Movimiento curvilíneo con aceleración constante</u>**:

En los movimientos curvilíneos con aceleración la velocidad y la posición en cualquier instante viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\,; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\\ d\vec{v}=\vec{a}\cdot dt\\ \vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\\ d\vec{r}=\vec{v}\cdot dt=[\vec{v}_0+\vec{a}t]\cdot dt\\ \vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2\end{array}\right\}$$

Por lo que el movimiento está siempre en un plano y la trayectoria es una parábola

$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t \quad \{\vec{v}$ en plano de $\vec{v}_0$ y $\vec{a}\}$

$\Delta\vec{r}=\vec{v}_0t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \{\Delta\vec{r}$ en plano de $\vec{v}_0$ y $\vec{a}\}$

**Ejemplos de movimientos curvilíneos**:

Si consideramos una caída vertical, un lanzamiento hacia arriba formando un ángulo con la horizontal, etc., son todos movimientos con aceleración constante, que es la de la gravedad. Si el origen del sistema de referencia, O, está en el suelo, el eje de ordenadas OY es positivo hacia arriba y el origen de tiempos $t_0$=0, la aceleración del movimiento tendrá de valor $a_y$ = -g = -9,8 m/s$^2$. El movimiento se desarrolla sobre el plano OXY y la ecuación de la trayectoria es una parábola

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\\ \vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}\vec{v}_0=v_{0x}\vec{i}+v_{0y}\vec{j}\\ \vec{v}_0=(v_0\cos\alpha)\vec{i}+(v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha)\vec{j}\\ \vec{a}=-g\vec{j}\end{array}\right\}\quad\left\{\vec{v}=\left(v_{0x}\vec{i}+v_{0y}\vec{j}\right)-gt\,\vec{j}=v_{0x}\vec{i}+\left(v_{0y}-gt\right)\vec{j}\right.$$

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}\quad\left\{\begin{array}{l}v_x=v_{0x}=v_0\cos\alpha\\ v_y=v_{0y}-gt=v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha-gt\end{array}\right.$$

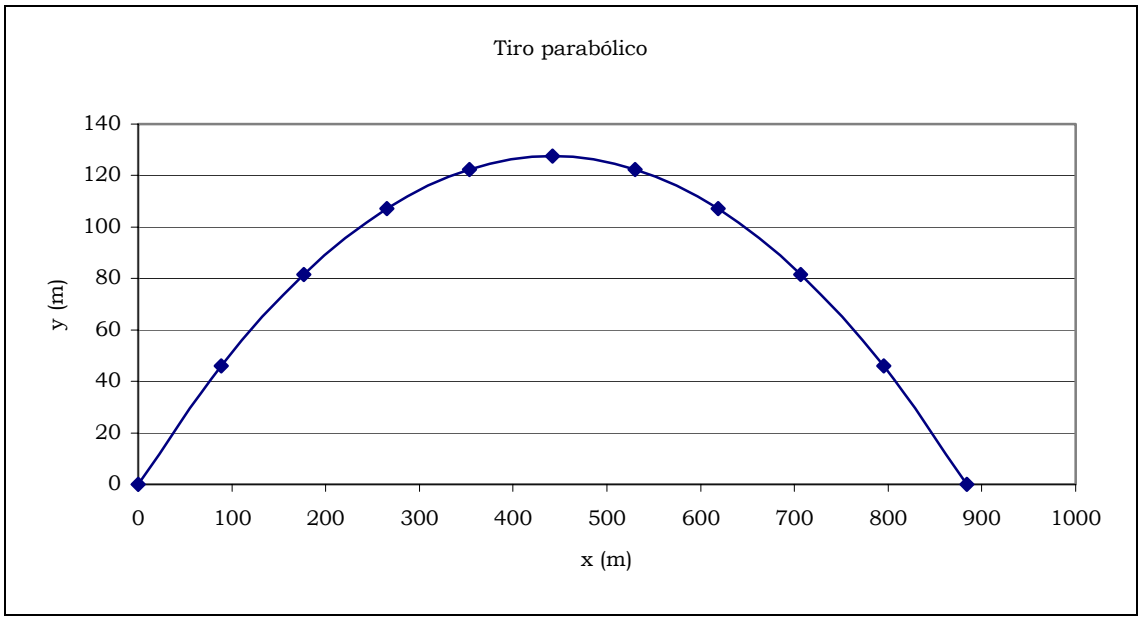
$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\\ d\vec{r}=\vec{v}\cdot dt=[\vec{v}_0+\vec{a}t]\cdot dt\\ \vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2\end{array}\right\}\vec{r}=r_x\vec{i}+r_y\vec{j}\quad\left\{\begin{array}{l}r_x=r_{0x}+v_xt=r_{0x}+v_{0x}t=r_{0x}+v_0t\cos\alpha\\ r_y=r_{0y}+v_{0y}t-\dfrac{1}{2}gt^2=r_{0y}+v_0t\,\mathrm{sen}\,\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2\end{array}\right.$$

Ecuación de la parábola:

$$r_{0x}=r_{0y}=0\quad\left\{\begin{array}{l}x=v_{0x}t\\ y=v_{0y}t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{array}\right\}\quad y=v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}x-\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2$$

**<u>Movimiento parabólico</u>**: Sea un tiro parabólico de velocidad inicial 100 m/s formando un ángulo de 30º con la horizontal. El tiempo de vuelo es el tiempo que tarda en caer al suelo ($r_y$ = 0), que es el mismo tiempo que tarda en llegar al punto más alejado, o alcance. La altura máxima se alcanza cuando la componente de la velocidad vertical es cero ($v_y$ = 0), que coincide con un tiempo que es la mitad del tiempo de vuelo.

| **$v_i$ (m/s)** | **Ángulo (grados)** | **Tiempo vuelo (s)** | **Alcance (m)** | **Altura máxima (m)** |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 30 | 10,20 | 883,70 | 127,55 |
| **t (s)** | **$r_x$ (m)** | **$r_y$ (m)** | **$v_x$ (m/s)** | **$v_y$ (m/s)** |
| 0 | 0 | 0 | 86,60 | 50,00 |
| 1,02 | 88,37 | 45,92 | 86,60 | 40,00 |
| 2,04 | 176,74 | 81,63 | 86,60 | 30,00 |
| 3,06 | 265,11 | 107,14 | 86,60 | 20,00 |
| 4,08 | 353,48 | 122,45 | 86,60 | 10,00 |
| 5,10 | 441,85 | 127,55 | 86,60 | 0,00 |
| 6,12 | 530,22 | 122,45 | 86,60 | -10,00 |
| 7,14 | 618,59 | 107,14 | 86,60 | -20,00 |
| 8,16 | 706,96 | 81,63 | 86,60 | -30,00 |
| 9,18 | 795,33 | 45,92 | 86,60 | -40,00 |
| 10,20 | 883,70 | 0,00 | 86,60 | -50,00 |




**Movimiento circular**:

Para describir el movimiento circular lo podemos hacer de dos formas:

- Considerando que la partícula va recorriendo una distancia a lo largo del **arco** de la circunferencia
- Considerando que la partícula va describiendo un **ángulo** que barre, que en cada vuelta completa es de 360º ó 2π radianes.

La relación entre el arco y el ángulo viene dada porque el arco descrito es el resultado de multiplicar el ángulo (en radianes) por el radio de la circunferencia.

Longitud de la circunferencia: $\begin{cases} 2\pi R = 2\pi \times R \\ \text{arco} = \text{ángulo} \times R \end{cases}$

La **velocidad** en el movimiento circular: $\begin{cases} \text{arco} = \text{ángulo} \times R \\ v = \dfrac{d(\text{arco})}{dt} = \dfrac{ds}{dt} \\ v = \dfrac{d(\text{ángulo} \times R)}{dt} = \dfrac{d(\text{ángulo})}{dt} \times R = \omega \cdot R \end{cases}$

Movimiento circular uniforme: Si un objeto describe un movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante, ya que el tiempo que tarda en dar una vuelta es siempre el mismo. Este tiempo se llama **período**, T, y se mide en segundos. El inverso del período es el número de vueltas que da en un segundo, y se llama **frecuencia**, f, su unidad es el Hertz Hz (hercios):

$$\omega = \text{cte.} = \frac{d(\text{ángulo})}{dt} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$v = \omega \times R = \frac{2\pi}{T} \times R = \frac{2\pi R}{T}$$

Aunque el objeto lleva velocidad angular constante, al describir la trayectoria circular va cambiando continuamente la dirección de la velocidad, por lo que posee una aceleración asociada al cambio de dirección de la velocidad y no al módulo de la velocidad. La aceleración asociada al cambio en el módulo de la velocidad se le llama **aceleración centrípeta** o aceleración normal.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

La aceleración tangencial $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t$ nos mide los cambios en magnitud del módulo de la velocidad o celeridad. La aceleración normal $a_c = \frac{v^2}{R}$ nos mide los cambios en la dirección de la velocidad.

**Relación entre arco recorrido y ángulo descrito**: $\Delta\theta = \omega t$ $\begin{cases} \Delta\theta \cdot R = \omega \cdot R \cdot t \\ \Delta s = \omega \cdot R \cdot t = v \cdot t \end{cases}$

Movimiento circular no uniforme:

La velocidad angular ahora no es constante y, por tanto, la partícula posee aceleración angular. Consideraremos solamente el caso de *aceleración angular constante*.

$$\text{arco} = \text{ángulo} \times R \quad \begin{cases} v = \frac{d(\text{arco})}{dt} = \frac{d(\text{ángulo} \times R)}{dt} = \frac{d(\text{ángulo})}{dt} \times R \\ v = \omega \cdot R \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right) \cdot R = \alpha \cdot R \\ a_n = \omega^2 \cdot R \end{cases}$$

Si la aceleración angular es constante: $\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$

Demostración:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\theta = \omega_m t = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t = \left(\frac{\omega_0 + \omega_0 + \alpha t}{2}\right)t = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

**Relación entre arco recorrido y ángulo descrito**:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \begin{cases} \omega \cdot R = \omega_0 \cdot R + \alpha \cdot R \cdot t \\ v = v_0 + a_t \cdot t \end{cases}$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \begin{cases} \Delta\theta \cdot R = (\omega_0 \cdot R) \cdot t + \frac{1}{2}(\alpha \cdot R) \cdot t^2 \\ \Delta s = v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2 \end{cases}$$

**Problemas resueltos de movimiento circular**:

**1º)** Un objeto viaja describiendo una circunferencia horizontal de radio 90 m. El objeto incrementa su velocidad uniformemente con una aceleración de 2,1 m/s². Si partió del reposo, determina el tiempo necesario para que alcance la aceleración de 2,4 m/s² y la velocidad en ese instante.

**Respuesta**: El objeto describe una circunferencia y aumenta su velocidad constantemente, luego posee una aceleración tangencial, por aumentar su velocidad lineal, y una aceleración normal, por cambiar su dirección.

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_t = \frac{dv}{dt} = 2{,}1\,\frac{m}{s^2} \\ a_n = \frac{v^2}{R} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = v_0 + a_t t = 2{,}1t \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(2{,}1t)^2}{90\ m} = 0{,}049t^2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = \left(2,4\,\frac{m}{s^2}\right)^2 = \left(2,1\,\frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(0,049t^2\right)^2 \\ t = 4,87\ s \\ v = 10,2\,\frac{m}{s} \end{array}\right\}$$

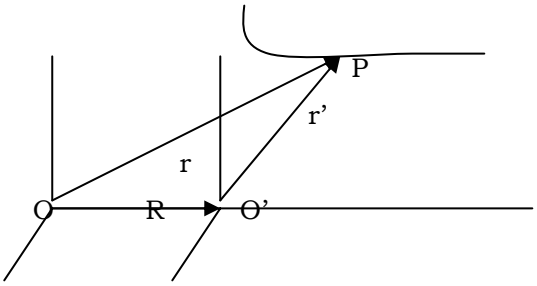
**2º)** Un satélite describe un movimiento circular alrededor de la Tierra a una altitud de 200 km sobre la superficie. A esa altitud la aceleración de caída libre es de 9,2 m/s$^2$. Calcula la velocidad orbital del satélite y el tiempo que tarda en dar una vuelta a la Tierra.

**Respuesta**: Al ser un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra la aceleración normal es la misma que la aceleración de la gravedad

$$g = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{R_T + h}$$

$$\left\{\begin{array}{l} v = \sqrt{g\left(R_T + h\right)} = \sqrt{9,2\,\frac{m}{s^2}\left(6,37\cdot 10^6\ m + 200\cdot 10^3\ m\right)} = 7770\,\frac{m}{s} \\ t = \dfrac{2\pi\left(R_T + h\right)}{v} = \dfrac{2\pi\left(6,37\cdot 10^6\ m + 200\cdot 10^3\ m\right)}{7770\,\frac{m}{s}} = 5313\ s = 1,48\ h \end{array}\right.$$

Movimiento relativo a velocidades bajas.- Siempre que analicemos el movimiento de una partícula lo haremos con respecto a un Sistema de Referencia. La velocidad de una partícula, como veremos, depende del sistema de referencia que utilicemos.




Sean los dos Sistemas de Referencia OXYZ y O'X'Y'Z', cuyos centros O y O' se encuentran a una distancia $R_{O'O}$. Una partícula situada en un punto P tendrá de coordenadas (x,y,z) para el primer sistema OXYZ y (x',y',z') para el segundo O'X'Y'Z'. Los vectores de posición y las velocidades instantáneas de la partícula en un sistema y en otro están relacionados por:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{r}_O = \vec{R}_{O'O} + \vec{r}\,'_{O'} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R} \\ \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}_{O'O} \quad \Rightarrow \\ \vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_{relativa} \end{array}\right.$$

Si $\vec{a}_{relativa} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\,' = \vec{a}$

Transformaciones Galileanas (sistemas inerciales) $\left\{\begin{array}{l} x' = x - V_x\cdot t \\ y' = y - V_y\cdot t \\ z' = z - V_z\cdot t \\ t' = t \end{array}\right.$

Si la velocidad relativa de un sistema respecto de otro es constante o cero las aceleraciones son iguales.

$$\vec{r}_O = \vec{r}\,'_{O'} + \vec{R}_{O'O} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v = \dfrac{v' + V_{O'O}}{1 + \dfrac{(v'\times V_{O'O})}{c^2}} \quad \text{(velocidades altas)} \quad \text{Si } v' \ll c;\ V_{O'O} \ll c \\ \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}_{O'O} \quad \text{(velocidades bajas)} \end{array}\right.$$

**Problemas de "Movimiento rectilíneo"**

**1)** Una bola se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s. Dos segundos más tarde se lanza otra con la misma velocidad. ¿Dónde y cuando se encuentran? ¿Cuál es su velocidad cuando se encuentran?. [122,7 m; 6,10 s; -9,78 m/s y +9,82 m/s]

**2)** Un cuerpo se está moviendo a lo largo de una línea recta de acuerdo a la ley $x = 16t - 6t^2$, donde x se mide en metros y t en segundos. a) Encuentra la posición del cuerpo en el tiempo t= 1s. b) ¿En qué tiempo pasa el origen?. c) calcula la velocidad promedio en el intervalo de tiempo de 0 a 2 s. d) Encuentra la expresión general para la velocidad promedio en el intervalo $t_0<t<(t_0+\Delta t)$. e) Calcula la velocidad para el tiempo t=0. g) ¿En qué tiempo y posiciones el cuerpo estará en reposo?. h) Encuentra la expresión general para la aceleración promedio en el intervalo de tiempo $t_0<t<(t_0+\Delta t)$. i) Encuentra la expresión general para la aceleración en cualquier tiempo. j) ¿En qué tiempos es cero la aceleración?. k) Dibuja sobre unos ejes, x-t, v-t y a-t. l) ¿En qué tiempos es el movimiento acelerado y en que tiempos es retardado?. [a) 10 m; b) 2,7 s y 0; c) 4 m/s; d) $16-12t_0-6\Delta t$ m/s; e) 16-2t m/s; f) 16 m/s; g) 1,33 s y 10,7 m sólo; h) -12 $m/s^2$; i) -12 $m/s^2$; j) nunca; l) retardado para $0<t<1,33$s, acelerado en la dirección negativa del eje X para $t>1,33$s]

**3)** Una piedra cae desde un globo que está descendiendo a una velocidad uniforme de 12 m/s. a) Calcula la velocidad y la distancia que recorre la piedra después de 10 s. b) Soluciona el mismo problema para el caso de que el globo suba. [a) 110 m/s hacia abajo; 610 m; b) 86 m/s hacia abajo; 370 m por debajo del punto inicial]

**4)** Un hombre colocado en lo alto de un edificio lanza una bola verticalmente hacia arriba con una velocidad de 12,25 m/s. La bola llega al suelo a los 4,25 s. a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?. b) ¿Cuál es la altura del edificio?. c) ¿Con qué velocidad alcanza la bola el suelo?. [a) 44,1 m por encima del suelo; b) 36,4 m; c) 29,4 m/s]

**5)** Una piedra se deja caer desde lo alto de un edificio. El sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 6,5 s después de dejarla caer. Si la velocidad del sonido es de 340 m/s calcula la altura del edificio. [175,4 m]

**6)** Mientras permanecemos en el interior de un ascensor, vemos caer un objeto desde el techo. La altura del ascensor es de 3 m. a) Si el ascensor se está moviendo hacia arriba con una velocidad constante de 2,2 m/s, calcula el tiempo que tarda en llegar al suelo del ascensor. b) Calcula el tiempo que tarda en caer el objeto si el ascensor parte del reposo y sube con una aceleración constante de 4 $m/s^2$. [a) 0,78 s; b) 0,66 s)]

**7)** Un móvil acelera, desde el reposo, durante 20 s con una aceleración constante de 2 $m/s^2$. Después mantiene la velocidad constante durante otros 20 s. Posteriormente frena, con una aceleración de -3 $m/s^2$, hasta que para. Calcula la distancia total recorrida. [1466,7 m]

**8)** Desde lo alto de un acantilado, de 200 m de altura, se lanza hacia arriba una piedra, y antes de chocar con el suelo, por debajo del acantilado, recorre los últimos 45 m en 0,5 s. Calcula la velocidad inicial con la que se lanzó la piedra. [68 m/s]

**9)** Un objeto tiene una aceleración constante de +3,2 $m/s^2$. Si en un instante su velocidad es de 9,6 m/s, ¿cuál será su velocidad a los 2,5 s posteriores y qué velocidad tenía 2,5 s antes?. [17,6 m/s y 1,6 m/s]

**10)** Un electrón con una velocidad inicial de $1,5\cdot10^5$ m/s recorre una zona del espacio de 1 cm de longitud, en la que experimenta una aceleración, y sale con una velocidad de $5,7\cdot10^6$ m/s. Determina la aceleración que experimenta. [$1,6\cdot10^{15}$ $m/s^2$]

**11)** Desde lo alto de un edificio de 300 m de altura se deja caer una bola A, y en el mismo instante, se lanza desde el suelo hacia arriba otra bola B con una velocidad $v_0$ desconocida. Cuando las bolas chocan en dirección opuesta la velocidad de la bola A es el doble de la bola B. Calcula a qué altura se produce el choque, el tiempo que tardan en chocar y la velocidad inicial de la bola B. [200 m; 4,52 s; $v_0$ = 54,2 m/s]

**12)** Desde lo alto de un edificio de 300 m de altura se deja caer una bola A, y en el mismo instante, se lanza desde el suelo hacia arriba otra bola B con una velocidad $v_0$ desconocida. Cuando las bolas chocan lo hacen en la misma dirección y la velocidad de la bola A es cuatro veces mayor que la bola B. Calcula a qué altura se produce el choque, el tiempo que tardan en chocar y la velocidad inicial de la bola B. [100 m; 6,38 s; $v_0$ = 47 m/s]

**13)** En una zona escolar los coches han de parar en una distancia de 4 m. La aceleración de frenada del coche puede alcanzar, como máximo, el valor de -7 $m/s^2$, y el tiempo de reacción del

conductor es de 0,5 s. Determina la velocidad máxima permitida y la fracción de los cuatro metros que recorre el coche en el tiempo de reacción. [4 m/s = 14,4 km/h; 2 m]

**14)** Una persona viajando a 80 km/h en un coche, a través de la lluvia en una tormenta, observa que el agua al caer forma un ángulo de 80º con la vertical. Cuando la persona se para observa que la lluvia cae verticalmente con respecto al coche. Calcula la velocidad relativa de la lluvia respecto del coche cuando a) el coche está parado, b) el coche se mueve a 80 km/h. [ a) 14,1 km/h; b) 81,2 km/h]

**Problemas de "Movimiento en dos dimensiones"**

**1)** Un objeto se está moviendo en el plano XY. Cuando t=1 s su posición es el punto (2,3) m y cuando t=4 s está en el punto (4,5) m. Calcula el vector velocidad media y su módulo. [$v_x=v_y=2/3$ m/s; v=0,94 m/s]

**2)** Conocido el vector de posición de una partícula, de componentes $r_x=t^2$; $r_y=2t$ en metros, $\vec{r} = t^2\vec{i} + 2t\vec{j}$, calcula a los 3 s: a) el vector velocidad y su módulo; b) el vector aceleración y su módulo; c) el vector aceleración tangencial y su módulo; d) el vector aceleración normal y su módulo; e) la ecuación de la trayectoria. [a) $v_x=6$ m/s; $v_y=2$ m/s; b) $a_x=2$ m/s$^2$; c) $a_{t(x)}=1,8$ m/s$^2$; $a_{t(y)}=0,6$ m/s$^2$; d) $a_{n(x)}=0,2$ m/s$^2$; $a_{n(y)}=-0,6$ m/s$^2$; e) $y=2x^{½}$].

**3)** Desde el suelo se dispara un proyectil con una velocidad de 80 m/s formando un ángulo de 45º con la horizontal. Calcula: a) tiempo de vuelo; b) alcance máximo; c) vector de posición cuando lleva la mitad de tiempo de vuelo; d) ecuación de la trayectoria. [a) 11,5 s; b) 653 m; c) $r_x$ = 326 m y $r_y$ = 163,1 m; d) $y = x - 0,0015\cdot x^2$]

**4)** Desde un punto elevado 150 m desde el suelo se dispara horizontalmente un proyectil con una velocidad de 300 m/s. Calcula: a) el tiempo que tardará en caer al suelo; b) el alcance; c) la velocidad con la que llegará al suelo. [a) 5,5 s; b) 1.659 m; c) 304,8 m/s]

**5)** Si un proyectil tiene un ángulo de lanzamiento de 52º por encima de la horizontal y una velocidad inicial de 18 m/s, ¿cuál es la barrera más alta que el proyectil puede saltar por encima?. [10,3 m]

**6)** Un rifle está colocado horizontalmente. La velocidad de salida de la bala es de 670 m/s. La bala hace blanco a 0,025 m por debajo de la línea horizontal del rifle. ¿Cuál es la distancia horizontal entre el extremo del rifle y el blanco?. [48 m]

**7)** Desde el borde de un acantilado de 60,0 m de altura, se lanza un objeto hacia arriba formando un ángulo de 50º con la horizontal y a una velocidad de 23 m/s. ¿En qué punto por encima del suelo golpea el objeto la pared vertical de un acantilado situado a 20 m de distancia?. [74,9 m]

**8)** Calcula la velocidad inicial, en magnitud y dirección, de una pelota de golf si a los 5,10 s de vuelo está viajando hacia abajo con una velocidad de 48,6 m/s, formando un ángulo de 22,2º con la horizontal. [55 m/s a 35,1º por encima de la horizontal]

**9)** Un proyectil es lanzado hacia arriba formando un ángulo con la horizontal. Prueba que el tiempo de vuelo del proyectil desde el suelo a su altura máxima es igual al tiempo de vuelo desde su altura máxima al suelo. Dato: La altura máxima se alcanza cuando $v_y$ sea cero y cuando llegue al suelo el valor de $r_y$ es cero.

**10)** Queremos hacer blanco, con un rifle, a una distancia horizontal de 3534,8 m. Si la velocidad inicial de la bala es de 200 m/s, ¿cuáles son los ángulos posibles del rifle con la horizontal para hacer blanco?. Datos: g=9,8 m/s$^2$; sen $(2\cdot ø)=2\cdot senø\cdot cosø$ . [30º y 60º]

**11)** Las coordenadas de una partícula en movimiento vienen dadas por: $x=t^2$, $y=(t-1)^2$. a) Encuentra las componentes rectangulares de su velocidad promedio y aceleración promedio en el intervalo de tiempo entre t y t+Δt. b) Aplica los resultados cuando t=2s y Δt=1s. c) Compara los resultados de b con los valores de las componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración en t=2s. [a) $v_x=2t+\Delta t$ m/s; $v_y=2(t-1)+\Delta t$ m/s; $a_x=a_y=2$m/s$^2$; b) $v_x=5$ m/s; $v_y=3$m/s; c) $v_x=4$m/s; $v_y=2$m/s]

**12)** Se dispara un proyectil con una velocidad de 100 m/s y formando un ángulo de 60º con la horizontal. Calcula: a) el alcance horizontal; b) la altura máxima; c) el tiempo de vuelo; d) la velocidad y altura después de 10 s. [a) 883,7 m; b) 382,6 m; c) 17,67 s; d) 51,28 m/s y 376 m]

**13)** Un bombardero está volando horizontalmente a una altitud de 1,2 km con una velocidad de 360 km/h. a) ¿Cuánto tiempo antes de llegar a la vertical del blanco deberá soltar la bomba?; b)

¿Cuál es la velocidad de la bomba cuando llega al suelo?; c) ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por la bomba?. [a) 15,65 s; b) 183,1 m/s; c) 1565 m]

**14)** Una partícula se está moviendo a lo largo de una parábola $y = x^2$ de tal forma que en cualquier tiempo $v_x$=3 m/s. Calcula la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración de la partícula en el punto x=2/3m. [$dy/dx=2x=4/3=v_y/v_x$; $v_x$=3m/s; $v_y$=4m/s; $v=(3^2+4^2)^{1/2}$=5m/s, arctg(4/3); 18 m/s$^2$ en dirección +Y]

**15)** a) Calcula la velocidad angular de un disco que rota con movimiento uniforme describiendo 13,2 rad cada 6 s. b) Calcula el período y la frecuencia de rotación. ¿Cuánto tardará el disco en c) rotar un ángulo de 720º y d) realizar 12 revoluciones?. [a) 2,2 rad/s; b) 2,9 s, 0,35 Hz; c) 6,2 s; d) 34,3 s]

**16)** Determina el radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria de un proyectil que se ha lanzado desde el punto inicial formando un ángulo ß con la horizontal. Dato: en el punto más alto la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical). [$v^2\cdot\cos^2ß/g$]

**17)** Calcula la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración centrípeta de la Luna. La luna realiza una revolución completa cada 28 días y la distancia promedio desde la Tierra a la Luna es de $3{,}84\cdot10^8$m. [ $2{,}60\cdot10^{-6}$rad/s; 997 m/s y $2{,}60\cdot10^{-3}$ m/s$^2$]

**18)** Una rueda partiendo del reposo acelera de tal manera que su velocidad angular se incrementa uniformemente a 200 rpm en 6 s. Después de que ha estado rotando algún tiempo a esta velocidad se aplican los frenos hasta que se para en 5 minutos. El número total de revoluciones de la rueda es de 3100. a) Dibuja la velocidad angular en función del tiempo. b) Calcula el tiempo total de rotación y el ángulo total rotado por la rueda. [18,1' y $1{,}95\cdot10^4$ rad]

**19)** Considera un disco, de radio 0,1 m, que puede rotar libremente alrededor de un eje horizontal y una cuerda está envolviéndolo. De la cuerda cuelga un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad siendo su movimiento uniformemente acelerado con una aceleración menor que la de la gravedad. Si en el tiempo t=0 la velocidad del cuerpo es 0,04 m/s y 2 s después ha bajado 0,2 m determina la aceleración tangencial y la aceleración normal en cualquier instante de cualquier punto sobre el anillo del disco. [$a_t$=0,06 m·s$^{-2}$; $a_n=(0{,}016+0{,}048t+0{,}036t^2)$ m·s$^{-2}$

**20)** Una partícula describe una circunferencia de 5 m de radio con velocidad constante de 2 ms$^{-1}$. En un instante dado frena, con una aceleración constante de 0,5 m/s$^2$ hasta pararse. Calcula: a) la aceleración de la partícula antes de empezar a frenar; b) la aceleración 2 s después de empezar a frenar; c) la aceleración angular mientras frena; d) tiempo que tarda en parar; e) número de vueltas que da desde que empieza a frenar hasta que se para. [a) 0,8 m/s$^2$; b) 0,53 m/s$^2$; c) 0,1 rad/s$^2$; d) 4 s; e) 0,12]

**21)** Un volante parte del reposo con aceleración constante. Después de dar 100 vueltas la velocidad es de 300 rpm, calcula: a) la aceleración angular; b) la aceleración tangencial de un punto situado a 20 cm del eje. [a) 0,785 rad/s$^2$; b) 0,157 m/s$^2$]

**DINÁMICA**:

- ¿Por qué cambia la velocidad de una partícula?. Concepto de dinámica.
- Leyes de la dinámica de una partícula de Newton
- Análisis de las leyes de la dinámica de Newton
- Fuerzas en la Naturaleza
- Sistemas inerciales
- Características dinámicas de los sistemas inerciales y no inerciales
- Aplicaciones de las leyes de Newton del movimiento
- Fuerza de fricción
- Dinámica del movimiento circular
- Movimiento curvilíneo. Par de torsión
- Problemas propuestos y **problemas resueltos**

¿**Por qué cambia la velocidad de una partícula**?

Cuando un objeto cambia su velocidad decimos que acelera. En todos los casos que observamos, en los que ocurre este fenómeno, siempre encontramos que hay uno o más objetos próximos a los que se les asocian el cambio. Por lo que la aceleración de una partícula se debe a una interacción entre la partícula y los alrededores.

La **mecánica** es la parte de la física que trata del equilibrio y del movimiento de los cuerpos sometidos a cualesquiera fuerzas. La **dinámica** es la parte de la mecánica que trata de las leyes del movimiento en relación con las fuerzas que lo producen.

Las primeras nociones sobre dinámica se desarrollaron después de 1590, cuando Galileo realizó los experimentos para estudiar el movimiento del péndulo y la caída de cuerpos. Las conclusiones, de estos experimentos, nos hicieron comprender que estos eran los efectos de fuerzas actuando sobre cuerpos en movimiento. Las leyes del movimiento de un cuerpo sujeto a fuerzas no fueron conocidas hasta 1687, cuando Isaac Newton (1642-1727) presentó en Principia (1687) las tres leyes básicas que gobiernan el movimiento de una partícula.

**Leyes de la dinámica de una partícula de Newton.-**

**1ª)** Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (con velocidad constante) a menos que sobre él actúe una fuerza.

**2ª)** Una partícula sobre la que actúa una fuerza $\vec{F}$, o varias $\vec{F}_{neta}$, experimenta una aceleración $\vec{a}$, que tiene la misma dirección que la fuerza y una magnitud que es directamente proporcional a la fuerza: $\sum \vec{F} = \vec{F}_{neta} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

**3ª)** Cuando dos partículas ejercen fuerzas entre sí, estas fuerzas son de intensidades iguales y sentidos opuestos. Si sobre el cuerpo 1 ejerce una fuerza el 2 $\left(\vec{F}_{12}\right)$ esta ha de ser igual a la fuerza que sobre el 2 ejerce el 1 $\left(\vec{F}_{21}\right)$: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

**Análisis de las leyes de la dinámica de Newton.-**

**La primera ley**: Se conoce como **ley de inercia** y no hace distinción entre una partícula en reposo y una partícula moviéndose con velocidad constante. Únicamente contiene un significado preciso para una fuerza nula, es decir, que una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si no está sometido a la acción de una fuerza. A esta propiedad de la materia le llamó Galileo su **inercia**, que se define como la incapacidad de los cuerpos para salir del estado de reposo, para cambiar las condiciones de su movimiento o para cesar en él, sin la aplicación o intervención de alguna fuerza.

Si una partícula está en reposo o en movimiento con velocidad constante depende del sistema de referencia, desde el cual se observa la partícula. Un **sistema de referencia** es un juego de sistemas coordenados -líneas que sirven para determinar la posición de un punto, y a los ejes o planos a que se refieren aquellas líneas- en reposo relativo entre ellos.

Considera una bola quieta en el pasillo de un avión que está moviéndose en línea recta. En un sistema coordenado unido al avión la bola está en reposo, y permanecerá en reposo relativo al avión mientras en avión vuele con velocidad constante. En un sistema coordenado sujeto a la Tierra, la bola se está moviendo con la velocidad constante del avión. De acuerdo con la primera ley de Newton, la bola continuará moviéndose con velocidad constante en el sistema de referencia de

la Tierra, y permanecerá en reposo en el sistema de referencia del avión, a no ser que sobre ella actúe una fuerza neta.

Un sistema de referencia en el que la ley de inercia se cumpla exactamente se llama **sistema de referencia inercial**. Cualquier sistema de referencia moviéndose con velocidad constante relativa a un sistema de referencia inercial también es un sistema inercial.

Si ahora suponemos que el avión acelera hacia delante, respecto al suelo, la bola rodará retrocediendo, con una aceleración relativa al avión aunque no hay fuerza actuando sobre ella. La bola acelera en el sistema de referencia del avión a pesar de que no haya una fuerza externa neta actuando sobre ella. También, el respaldo del asiento ejercerá una fuerza horizontal hacia delante sobre una persona sentada, pero la persona no tiene aceleración relativa al avión. La ley de inercia no se cumple en el sistema de referencia del avión acelerando. Un sistema de referencia acelerando relativo a un sistema de referencia inercial no es un sistema de referencia inercial. Por lo que la primera ley de Newton nos da un criterio para determinar si un sistema de referencia es un sistema inercial.

Un sistema de referencia unido a la superficie de la Tierra no es un sistema de referencia completamente inercial debido a la pequeña aceleración de la superficie de la Tierra (relativa al centro de la Tierra) debida a la rotación y a la pequeña aceleración debida a la rotación alrededor del Sol. Pero como son del orden de 0,01 $m/s^2$ o inferiores se pueden despreciar y es una buena aproximación considerar que un sistema de referencia en la superficie de la Tierra es un sistema de referencia inercial.

**La segunda ley**: Con la primera ley nos permiten definir la fuerza. Una **fuerza** es una influencia externa sobre una partícula que le causa una aceleración relativa en un sistema de referencia inercial. La **dirección** de la fuerza es la dirección de la aceleración $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$. La **magnitud** de la fuerza es el producto de la masa y la magnitud de la aceleración.

La **masa** es una propiedad intrínseca de un objeto que mide su resistencia a la aceleración. Es decir, es una medida de la inercia del objeto. La relación de dos masas se define cuantitativamente por la aplicación de la misma fuerza F a cada una y comparando sus aceleraciones.

$$F = m_1a_1 = m_2a_2 \quad \left\{\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}\right\}$$

La unidad de masa es el kilogramo. La fuerza requerida para producir una aceleración de 1 $m/s^2$ sobre un objeto de masa 1 kg se define como 1 newton (N).

Por tanto, la segunda ley nos da una afirmación explícita acerca de la fuerza, en la cual la fuerza se relaciona con la rapidez de cambio del momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. Ahora bien, la definición de fuerza sólo expresa algo completo y preciso cuando se define la "masa".

**Ejemplo**:

Una fuerza sobre un objeto, de masa 1 kg, le produce una aceleración de 5 $m/s^2$, y si la misma fuerza se aplica a otro objeto $m_2$ le produce una aceleración de 20 $m/s^2$. Determina la masa del segundo objeto y la magnitud de la fuerza.

Respuesta:

$$F = m_1a_1 = m_2a_2 \quad \left\{\begin{array}{l} m_2 = m_1\dfrac{a_1}{a_2} = 1\,kg \times \dfrac{5\,\frac{m}{s^2}}{20\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}25\,kg \\ F = m_1a_1 = 1\,kg \times 5\,\frac{m}{s^2} = 5\,N \end{array}\right\}$$

**Ejemplo**:

Una partícula de masa 0,5 kg está sometida simultáneamente a dos fuerzas $\vec{F}_1 = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j}\,N$ y $\vec{F}_2 = -2\,\vec{i} + 5\,\vec{j}\,N$. Si la partícula está en el origen y parte desde el reposo, determina su posición y velocidad al cabo de 2 s.

Respuesta:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2\\ \vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{r}=\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2\\ \vec{v}=\vec{a}t\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{F}_{neta}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=m\vec{a}\\ \vec{a}=\dfrac{\vec{F}_{neta}}{m}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{F}_{neta}=\left(2\vec{i}-4\vec{j}\right)+\left(-2\vec{i}+5\vec{j}\right)N=1\vec{j}\ N\\ \vec{a}=\dfrac{1\vec{j}\ N}{0{,}5\ kg}=2\vec{j}\ \frac{m}{s^2}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{r}=\dfrac{1}{2}\vec{a}t^2=\dfrac{1}{2}\left(2\vec{j}\ \frac{m}{s^2}\right)(2\ s)^2=4\vec{j}\ m\\ \vec{v}=\vec{a}t=\left(2\vec{j}\ \frac{m}{s^2}\right)(2\ s)=4\vec{j}\ \frac{m}{s}\end{array}\right.$$

**Ejemplo**:

Sobre un objeto de masa 70 kg que está en reposo se aplica una fuerza constante durante 3 s. Si se ha desplazado 9,0 m determina el valor de la fuerza.

Respuesta:

$$F=ma\quad\left\{\begin{array}{l}\Delta x=\dfrac{1}{2}at^2\\ a=\dfrac{2\times 9{,}0\ m}{(3\ s)^2}=2\ \frac{m}{s^2}\end{array}\right\}\quad F=ma=70\ kg\times 2\ \frac{m}{s^2}=140\ N$$

**La fuerza debida a la gravedad: Peso**

Si dejamos caer un objeto próximo a la superficie de la Tierra, acelera hacia la Tierra. Si no consideramos la resistencia del aire, todos los objetos tienen la misma aceleración, llamada la aceleración debida a la gravedad $\vec{g}$ en cualquier punto del espacio. La fuerza causante de esta aceleración es la fuerza de la gravedad sobre el objeto, llamada el peso $\vec{P}$. Si el peso $\vec{P}$ es la única fuerza actuando sobre el objeto se dice que el objeto está en caída libre. La segunda ley de Newton define el peso como $\vec{P}=m\vec{g}$. Mientras $\vec{g}$ es la misma para todos los objetos en cualquier punto, el peso $\vec{P}=m\vec{g}$ de un objeto es proporcional a la masa. El vector $\vec{g}$ es la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto y se llama el campo gravitatorio de la Tierra.

Medidas precisas de $\vec{g}$ demuestran que su valor varía con su localización. En puntos por encima de la superficie de la Tierra $\vec{g}$ apunta hacia el centro de la Tierra y varía inversamente con el cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.

Para conocer nuestro propio peso lo hacemos comparándolo con otras fuerzas que lo equilibren. Cuando estamos sentados en una silla sentimos una fuerza ejercida por la silla que equilibra nuestro peso e impide que nos caigamos al suelo. Cuando nos colocamos sobre una balanza de resorte sentimos en los pies la fuerza ejercida por la balanza. La balanza se calibra para leer la fuerza que debe ejercer (por la compresión de sus muelles) para equilibrar nuestro peso. Esta fuerza se llama nuestro **peso aparente**. Si no hay fuerza para equilibrar nuestro peso, como ocurre en la caída libre, el peso aparente es cero. Esta condición es la que experimentan los astronautas en los satélites girando alrededor de la Tierra, ya que cuando el satélite está viajando en la órbita circular la dirección de su vector velocidad está cambiando constantemente y está acelerando hacia la Tierra. La única fuerza que actúa sobre el satélite es su peso, por lo que está en caída libre con la aceleración debida a la gravedad. Por lo que la única fuerza que actúa sobre los astronautas es su peso, que les produce una aceleración g, y como no hay fuerza que equilibre la fuerza de la gravedad, los astronautas tienen un peso aparente cero.

$$g=a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{v^2}{R_T+h}\ .$$

**La tercera ley**: Es realmente un principio, ya que se trata de una declaración relativa del mundo físico real y contiene toda la física de que están dotadas las leyes del movimiento de Newton. La palabra fuerza se usa para describir la interacción entre dos objetos. Cuando dos objetos interactúan ejercen se ejercen fuerzas entre ellos. La tercera ley establece que estas fuerzas son iguales en magnitud y sentidos opuestos.

Con la tercera ley, cuando consideramos dos objetos 1 y 2, si el objeto 1 ejerce una fuerza sobre el 2, el objeto 2 ejerce una fuerza sobre el 1 que es igual en magnitud y opuesta en sentido. Por lo que las fuerzas acontecen en pares. Son conocidas como fuerzas de **acción** y de **reacción**, aunque esta terminología es desafortunada porque parece que una de ellas es una fuerza que *reacciona* a la otra, lo que no es cierto. Las dos fuerzas se producen simultáneamente. **Las fuerzas**

**de acción y reacción no pueden equilibrarse nunca entre ellas**, porque actúan sobre objetos diferentes.

Por ejemplo, si colocamos un objeto sobre una mesa, actúa una fuerza **sobre el objeto**, hacia el centro de la Tierra, que es el peso, y una fuerza igual y opuesta es la ejercida por el objeto **sobre la Tierra**. Las dos son el par acción-reacción. Pero como el objeto no se mueve debe actuar otra fuerza que lo equilibre, esta es la fuerza ejercida por la mesa sobre el objeto, que debe ir hacia arriba, llamada fuerza normal $\vec{F}_n$ y que equilibra el peso del objeto. Por su parte, el objeto también ejerce una fuerza sobre la mesa $-\vec{F}_n$, siendo un para acción-reacción.

Por la tercera ley tenemos que: $\left.\begin{array}{l}\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2\end{array}\right\} \quad \frac{m_1}{m_2} = -\frac{\vec{a}_2}{\vec{a}_1}$

Siempre nos será posible establecer una masa unidad y determinar la masa de otro cuerpo comparando el cociente de aceleraciones cuando interactúen los dos. La masa así determinada es la **masa inerte**, *que es la masa que determina la aceleración de un cuerpo sometido a una fuerza dada*. Si la masa se determina pesando un cuerpo es la **masa gravitatoria** o pesante. El primero en comprobar la equivalencia entre las dos masas fue Galileo (caída de cuerpos), Newton, etc.

**La tercera ley no es un principio general de la Naturaleza,** puesto que sólo se aplica en el caso de que la fuerza ejercida por una partícula sobre otra esté dirigida a lo largo de la recta que une a ambas. Son éstas las llamadas **fuerzas centrales** y a ellas se aplica la tercera ley, sean las fuerzas atractivas o repulsivas. Ejemplos de **fuerzas centrales** son las **gravitatorias** y las **electrostáticas**, por lo cual las leyes de Newton podrán aplicarse a los problemas en los que intervengan fuerzas de esta naturaleza.

Muchas fuerzas que se ejercen los objetos son por **contacto directo**, estas fuerzas son de origen electromagnético ya que son ejercidas entre las moléculas de cada objeto. Al colocar un objeto sobre la mesa, el peso del objeto va hacia abajo presionando las moléculas de la superficie de la mesa, que resisten la compresión y ejercen una fuerza hacia arriba sobre el objeto. Esta fuerza perpendicular a la superficie se llama **fuerza normal**. Los objetos en contacto también pueden ejercerse fuerzas paralelas a la superficie de contacto. La componente paralela de una fuerza de contacto se llama **fuerza de fricción**. Cuando un muelle se comprime, o se alarga un poco, la fuerza que ejerce se comprueba experimentalmente que es $F_x = -k \cdot \Delta x$. Donde k es la constante de fuerza que nos mide la rigidez del muelle y el signo negativo nos dice que cuando el muelle se alarga o se comprime, la fuerza que ejerce va en sentido contrario. Esta ecuación se conoce como **Ley de Hooke**. Las fuerzas elásticas son centrales, ya que son manifestaciones macroscópicas de fuerzas electrostáticas microscópicas.

Si **la fuerza depende de las velocidades** de las partículas en interacción no es una fuerza central esencialmente, y no se aplica la tercera ley en tales casos. Así la fuerza electromagnética que se ejercen las partículas con carga eléctrica y en movimiento no obedece la tercera ley de Newton, puesto que dicha fuerza se propaga a la velocidad de la luz; incluso la fuerza gravitatoria que se ejercen las partículas en movimiento depende de la velocidad, pero el efecto de ésta es pequeño y difícil de detectar, siendo el único efecto observable la precesión del perihelio de los planetas más cercanos al Sol.

**Fuerzas en la Naturaleza**.-

La aplicación total de la segunda ley de Newton surge cuando se combina con las leyes de las fuerzas que describen las interacciones de los objetos. Por ejemplo, la ley de Newton de la gravitación combinada con la segunda ley de Newton nos permite calcular las órbitas de planetas alrededor del Sol, el movimiento de la Luna y la variación de la aceleración de la gravedad g con la altura.

El concepto general de **fuerza** es igual a la relación entre el cambio del momento lineal y el tiempo que tarda en producirse. Siendo la **fuerza** la causa de todo **cambio, reacción, creación o desintegración**. En la Naturaleza se distinguen cuatro fuerzas fundamentales: **gravitatoria, electromagnética, fuerte y débil**. Estas fuerzas se han reconocido como resultado del análisis de gran número de experimentos.

La *fuerza gravitatoria* actúa sobre todas las partículas, pero su efecto en el nivel de partículas subatómicas es muy débil. La *fuerza electromagnética* actúa sobre todas las partículas cargadas. La *fuerza fuerte* es la que obliga a los núcleos a permanecer unidos, o a que los nucleones permanezcan pegados, y actúa sólo sobre algunas partículas llamadas **hadrones**; constituidas por

los bariones, como los protones y neutrones, que tienen espín semientero y son fermiones, y los mesones que tienen espín entero y son bosones. La *fuerza débil* es la responsable de la desintegración-ß y de procesos similares, y actúa sobre todas las partículas.

Las fuerzas fundamentales o interacciones están asociadas con unas **fuentes**. Estas entidades se asocian con el *origen de las fuerzas o la materia sobre la que actúan las fuerzas*. Esto sale directamente de la ley de conservación del momento o la equivalente tercera ley de Newton de "acción y reacción", si una fuente es origen de una fuerza es una entidad sobre la que puede actuar dicha fuerza. Esto es natural porque *las fuerzas son expresiones del cambio de momento lineal entre cuerpos interaccionantes*.

Las partículas elementales son partículas puntuales sin estructura interna:

**1) Leptones:** Existen seis leptones, tres cargados negativamente (**electrón**, **muón** y **tauón**) y tres neutros que están asociados a ellos.

**2) Quarks:** $\begin{pmatrix}\text{up}\\ \text{down}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{charged}\\ \text{strange}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{top}\\ \text{bottom}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}q_u=+\frac{2}{3}q_e\\ q_d=-\frac{1}{3}q_e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_c=+\frac{2}{3}q_e\\ q_d=-\frac{1}{3}q_e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_t=+\frac{2}{3}q_e\\ q_d=-\frac{1}{3}q_e\end{pmatrix}$

Los quarks están unidos por la **fuerza fuerte o fuerza "color"**, los quarks de diferentes colores se atraen formando combinaciones estables, es decir, sin color tales como $(q_r, q'_g, q''_b)(q_r, \bar{q}_r)$. Por esta razón una distribución estable de quark son combinaciones sin color de tres quarks o de un quark y un antiquark. De la misma forma que los átomos neutros están formados de cargas positivas y negativas, una combinación de tres quarks con tres colores diferentes o de un quark con una carga color y un antiquark con la carga anticolor dan un sistema de color neutro o sin color (blanco).

**3) Bosones intermediarios:** Los bosones intermediarios son las partículas llamadas transportistas de las interacciones.

| Interacción | Fuentes | Intensidad relativa | Alcance | Bosón transportista de la interacción | Sienten la interacción |
|---|---|---|---|---|---|
| Gravitatoria | masa | $10^{-38}$ | infinito | El gravitón (?) | Todas las partículas (hasta el fotón) |
| Electromagnética | carga eléctrica | $10^{-2}$ | infinito | El fotón (m = 0) | Partículas cargadas y neutras con momento magnético intrínseco (n) |
| Fuerte | carga color | 1 | $10^{-15}$ m | 8 bosones (gluones: 2 quarks) ($1{,}8\cdot10^{-36}$ hasta $3{,}2\cdot10^{-25}$ kg) | Los Hadrones: bariones (fermiones: n y p) y mesones (bosones). No los leptones |
| Débil | carga débil | $10^{-14}$ | $10^{-18}$ m | 3 bosones ($W^{+-}$ y Z)($1{,}4\cdot10^{-25}$ kg) | Leptones y Quarks |

**Sistemas inerciales**.-

Se llama sistema inercial a todo sistema de referencia en el que sean válidas las leyes de la dinámica de Newton. Las **propiedades** son: 1ª) Una partícula aislada de acciones exteriores, está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, respecto a cualquiera de estos sistemas. 2ª) Para estos sistemas, el espacio es homogéneo (igual naturaleza) e isótropo y el tiempo es homogéneo.

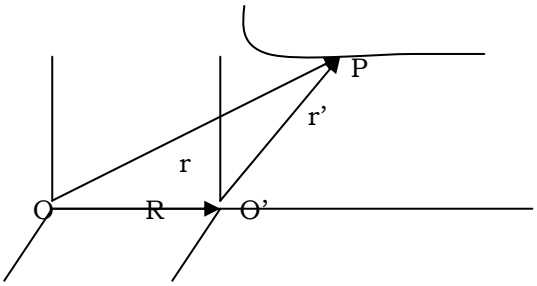
Cuando las leyes de Newton sean válidas en un sistema de referencia, lo serán también en todo sistema que se mueva uniformemente respecto del primero, o sea sin aceleración. El Sistema Solar, si despreciamos la debilísima acción gravitatoria estelar, puede ser considerado como un sistema aislado, y por consiguiente, es una referencia inercial. Por tanto, un triedro con origen en el centro del Sol (centro de masas del sistema solar) y ejes en direcciones de tres estrellas fijas, es un sistema inercial con alto grado de exactitud, es el llamado **sistema copernicano**.

Galileo comprobó experimentalmente que las leyes de la mecánica son idénticas para dos observadores que se hallen en **movimiento de traslación rectilíneo y uniforme**. Es lo que se conoce como **principio de relatividad de Galileo**. Este principio se limita a las leyes de la mecánica si la velocidad de los cuerpos es muy inferior a la de las interacciones.

La **validez** de la Mecánica Clásica está acotada por dos extremos: 1º) Cuando la velocidad de las partículas es muy grande y no se puede considerar como infinita la velocidad de propagación de las interacciones (próxima a $3\times10^8$ m/s). 2º) Cuando las dimensiones de las partículas involucradas en el fenómeno es del orden de 0,1 nm.

**Características dinámicas de los sistemas inerciales y no inerciales.-**

Un sistema se llama **inercial** si se comporta como una partícula libre, es decir, no está sujeto a interacción, y por tanto o está **en reposo o se mueve con velocidad constante** y **sin aceleración**, por lo que no ha de rotar. Dos sistemas se dice que son inerciales uno con respecto del otro si están en reposo relativo o se mueven con velocidad constante uno con respecto del otro.




**Sistemas inerciales**: Sean los Sistemas OXYZ y O'X'Y'Z' que se encuentran a una distancia $\vec{R}_{O'O}$ los dos centros O'O. Una partícula situada en el punto P tendrá de coordenadas (x,y,*z*) para el primer sistema y de coordenadas (x',y',*z*') para el segundo sistema. Que están relacionados por:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{r} = \vec{R}_{O'O} + \vec{r}' \\ \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{R}_{O'O} + \vec{r}'\right) = \vec{V}_{O'O} + \vec{v}' \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{V}_{O'O} + \vec{v}'\right) = \vec{a}_{O'O} + \vec{a}'\end{array}\right\}$$

Para los Sistemas Inerciales obtenemos que son iguales las leyes del movimiento, es decir, miden las mismas aceleraciones de una partícula $\vec{a} = \vec{a}'$ y las mismas Fuerzas $\vec{F} = \vec{F}'$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{O'O} + \vec{v}'\right) = \vec{a}_{O'O} + \vec{a}' \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{V}_{O'O} = 0 \\ \vec{V}_{O'O} = cte\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{a}' \\ \vec{F} = \vec{F}'\end{array}\right.$$

Esto es lo que se denomina el **Principio Clásico de Relatividad**.

**Sistemas no Inerciales:** Si el Sistema O'X'Y'Z' es no Inercial, es decir que la velocidad relativa de éste sistema con respecto al OXYZ no es constante, y por tanto, el sistema O'X'Y'Z' con respecto al OXYZ posee aceleración, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{r} = \vec{R}_{O'O} + \vec{r}' \\ \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{R}_{O'O} + \vec{r}'\right) = \vec{V}_{O'O} + \vec{v}' \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{V}_{O'O} + \vec{v}'\right) = \vec{a}_{O'O} + \vec{a}'\end{array}\right\} \quad \{m\vec{a} = m\vec{a}_{O'O} + m\vec{a}'\} \quad \left\{\begin{array}{l}m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_{O'O} \\ \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{inercial}\end{array}\right.$$

En el Sistema no inercial O'X'Y'Z' medimos una fuerza $\vec{F}'$ distinta que en el Sistema inercial OXYZ, $\vec{F}$, considerando que en el primero aparece una Fuerza Ficticia $\vec{F}_{inercial} = -m\vec{a}_{O'O}$, llamada de Inercia que es consecuencia de la aceleración relativa del Sistema O'X'Y'Z' con respecto al OXYZ.

**Aplicaciones de las leyes de Newton del movimiento**.-

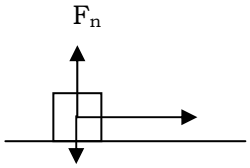
El movimiento de una partícula, bajo una fuerza constante, tiene la aceleración también constante. Además, analizando las ecuaciones siguientes, la velocidad siempre cambia en una dirección paralela a la fuerza aplicada, por lo que la trayectoria tiende hacia la dirección de la fuerza. Respecto al desplazamiento, si la fuerza es constante, es una combinación de dos vectores. Uno es la velocidad inicial y el otro la dirección de la fuerza aplicada. Si los dos vectores son paralelos el movimiento es rectilíneo y si no lo son estará en el plano determinado por los dos.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{v} = \vec{v}_0 + \dfrac{\vec{F}}{m}t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{F}}{m}t^2\end{array}\right.$$

**Problemas de aplicación**.-

**1º)** Supongamos que tiramos de un objeto, de masa 50 kg, con una fuerza horizontal de 100 N. Si el objeto está situado encima del hielo, en el que el rozamiento es prácticamente cero, determina la aceleración que experimenta.

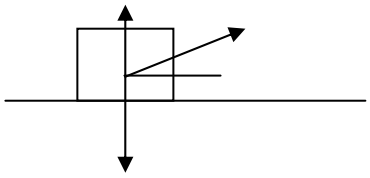
Solución: Las tres fuerzas que actúan sobre el objeto son el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por el hielo que es perpendicular y la **fuerza** de contacto de tiro.




$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{\begin{matrix} F_{x(neta)} = F_x = ma_x \\ F_{y(neta)} = -mg + F_n = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left\{a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{100\ N}{50\ kg} = 2\ \frac{m}{s^2}\right.$$

**2º)** Supongamos que tiramos de un objeto, de masa 50 kg, con una fuerza de 150 N que forma un ángulo de 25º con la horizontal. Si el objeto está situado encima del hielo, en el que el rozamiento es prácticamente cero, determina la aceleración que experimenta y la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el objeto.

Solución: Las tres fuerzas que actúan sobre el objeto son el peso, la fuerza de contacto ejercida por el hielo que es perpendicular y la fuerza de contacto de tiro que forma un ángulo de 25º con la horizontal.

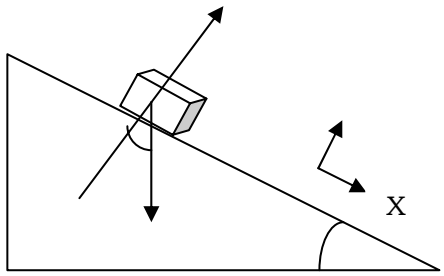


$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{\begin{matrix} F_{x(neta)} = F_x = ma_x \\ F_{y(neta)} = F_y - mg + F_n = 150\,sen\,25º - mg + F_n = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{150\cos 25º\ N}{50\ kg} = 2,72\ \frac{m}{s^2} \\ F_n = mg - 150\,sen\,25º = 426,6\ N \end{matrix}\right.$$

**3º)** Supongamos que un objeto, de masa 50 kg, está situado en un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Si al caer el rozamiento es cero, determina la aceleración que experimenta y la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el objeto.

Solución: Las dos fuerzas que actúan sobre el objeto son el peso, que está dirigido verticalmente hacia abajo, y la fuerza de contacto ejercida por el suelo del plano inclinado que es perpendicular a la superficie de contacto.



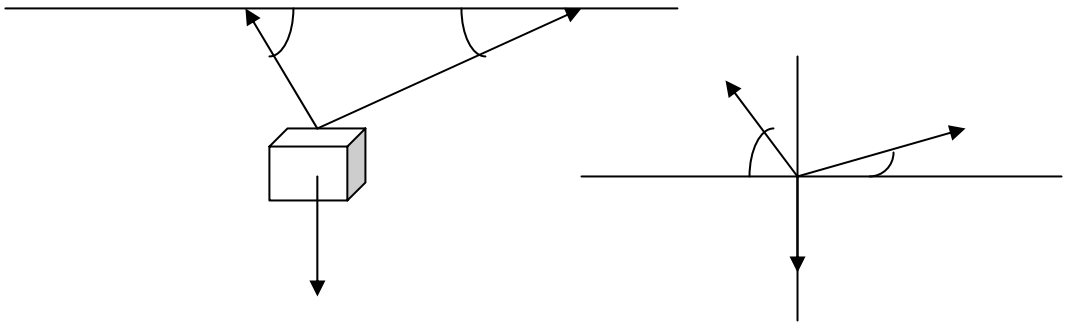

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{\begin{matrix} F_{x(neta)} = P_x = P\,sen\,30º = ma_x \\ F_{y(neta)} = -P_y + F_n = -P\cos 30º + F_n = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} a_x = \frac{mg\,sen\,30º}{m} = g\,sen\,30º = 4,9\ \frac{m}{s^2} \\ F_n = P\cos 30º = 424,35\ N \end{matrix}\right.$$

**4º)** Supongamos un objeto, de masa 50 kg, que está colgado del techo sujeto a dos puntos y en equilibrio. Los ángulos de las cuerdas con el techo son de 30º y de 60º. Determina las tensiones de las cuerdas.

Solución:

Sobre el objeto en equilibrio hay aplicadas tres fuerzas, su peso que está dirigido verticalmente hacia abajo y las dos tensiones de la cuerdas que forman con el techo ángulos de 30º y 60º, y con el eje x de 30º y 60º.



$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \quad \left\{\begin{array}{l} F_{x(neta)} = T_1 \cos 30^o - T_2 \cos 60^o = 0 \\ F_{y(neta)} = -mg + T_1 \,\text{sen}\, 30^o + T_2 \,\text{sen}\, 60^o = 0 \end{array}\right\} \quad T_2 = T_1 \frac{\cos 30^o}{\cos 60^o}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -mg + T_1 \,\text{sen}\, 30^o + T_1 \dfrac{\cos 30^o}{\cos 60^o} \,\text{sen}\, 60^o = 0 \\ T_1 = \dfrac{mg}{\left(\,\text{sen}\, 30^o + \dfrac{\cos 30^o}{\cos 60^o} \,\text{sen}\, 60^o\right)} = \dfrac{1}{2} mg \end{array}\right.$$

**5º)** Un objeto de 80 kg está colocado sobre una balanza dentro de un ascensor. Determina la lectura de la balanza cuando: a) el ascensor sube con aceleración a; b) el ascensor baja con una aceleración a'; c) el ascensor se mueve hacia arriba con una velocidad de 20 m/s mientras su velocidad está disminuyendo a razón de 8 m/s$^2$.

Solución: La lectura de la balanza es la magnitud de la fuerza normal ejercida por la balanza sobre el objeto. El objeto está en reposo relativo respecto del ascensor, él y el ascensor tienen la misma aceleración. Sobre el objeto actúan dos fuerzas, la fuerza de la gravedad, dirigida hacia abajo, y la fuerza normal desde la balanza dirigida hacia arriba. La suma de las dos nos dará la aceleración observada.

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{F_{y(neta)} = -mg + F_n = ma_y\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_n - mg = ma_y = ma \\ F_n = mg + ma \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} F_n - mg = ma_y = m(-a') \\ F_n = mg - ma' \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} F_n - mg = ma_y = m(-a'') \\ F_n = mg - ma'' \end{array}\right\}$$

**<u>Fuerza de fricción</u>**.-

**Fricción estática**: La fricción es un fenómeno complicado, y conocido incompletamente, que se debe al enlace o unión de moléculas entre dos superficies que están en contacto. Este enlace o unión es el mismo que el enlace molecular que sostiene un objeto unido. Si consideramos una caja en reposo sobre el suelo y le aplicamos una fuerza pequeña, la caja puede que no se mueva debido a la fuerza de fricción estática, $\vec{f}_s$, que es una fuerza ejercida por el suelo sobre la caja, y equilibra la fuerza que se está aplicando. La fuerza de fricción estática, que se opone a la fuerza aplicada, puede ajustarse desde cero a algún valor máximo, $f_{s,máx}$, dependiendo de la fuerza que apliquemos. El valor de $f_{s,máx}$ es independiente del área de contacto y es proporcional a la fuerza normal ejercida por una superficie sobre otra: $f_{s,máx} = \mu_s F_n$. Donde $\mu_s$ es el coeficiente de fricción estático, una cantidad adimensional que depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Si ejercemos una fuerza horizontal sobre la caja menor que $f_{s,máx}$, la fuerza de fricción se ajustará hasta equilibrar esta fuerza horizontal. Por lo que en general: $f_s \le \mu_s F_n$.

**Fricción cinética**: Si empujamos fuertemente una caja colocada sobre el suelo, la caja se deslizará sobre el suelo. Cuando la caja se está deslizando, continuamente enlaces moleculares se están formando y rompiendo, y pequeñas piezas de la superficie se están rompiendo. El resultado es

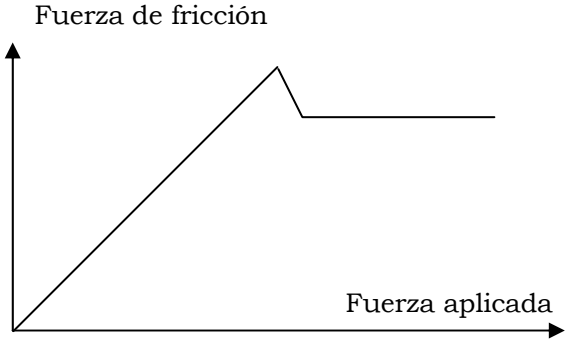
una fuerza de fricción cinética, $\vec{f}_k$, también llamada fricción de deslizamiento, que se opone al movimiento. Para que la caja permanezca deslizándose con velocidad constante, debemos ejercer una fuerza sobre la caja que sea igual en magnitud y opuesta a la fuerza de fricción cinética ejercida por el suelo. El coeficiente de fricción cinética $\mu_k$ se define como la relación de las magnitudes de la fuerza de fricción cinética y la fuerza normal: $f_k = \mu_k F_n$. Donde $\mu_k$ depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Experimentalmente se ha encontrado que $\mu_k < \mu_s$ y es aproximadamente constante para velocidades desde 0,01 m/s a 10 m/s.

En el caso de un coche que se encuentra en reposo, las fuerzas que actúan son la **fuerza peso** dirigido hacia en centro de la Tierra, las **fuerzas normales** aplicadas sobre las ruedas que equilibran el peso del coche. Cuando el coche comienza a moverse debido a la potencia suministrada por el motor al eje de las ruedas para que giren. Si la carretera no tuviera rozamiento la ruedas darían vueltas sin avanzar, pero cuando hay fricción la fuerza de fricción ejercida por la carretera sobre las ruedas se produce en el mismo sentido que la dirección de avance y proporciona la fuerza necesaria para acelerar el coche. Cuando las ruedas giran sin deslizar y la huella de la rueda tocando la carretera está en reposo relativo respecto de la carretera, es decir, la velocidad del punto sobre el neumático en contacto con el suelo es cero relativa al suelo. Por tanto la fuerza de fricción entre la carretera y la rueda es fricción estática. La mayor fuerza de fricción que las ruedas pueden ejercer sobre la carretera (y que la carretera puede ejercer sobre las ruedas) es $\mu_s F_n$.

Si la potencia suministrada por el motor es demasiado grande, las superficies en contacto deslizarán y las ruedas girarán. Entonces la fuerza que acelera el coche es la fuerza de fricción cinética, que es menor que la fuerza de fricción estática. Similarmente, cuando frenamos un coche para pararlo, la fuerza ejercida por la carretera sobre las ruedas puede ser fricción estática o fricción cinética, dependiendo de cómo apliquemos los frenos, si frenamos bruscamente las ruedas se bloquean, los neumáticos deslizarán a lo largo de la carretera y la fuerza de frenado será la fricción cinética. Cuando una rueda rígida gira a velocidad constante, sin deslizarse, a lo largo de una carretera horizontal, el neumático continuamente se deforma, y la banda de rodadura y la carretera están despegándose continuamente, por lo que se necesita una fuerza para mantenerla a velocidad constante. El **coeficiente de fricción de rodadura**, $\mu_r$, es la relación de la fuerza necesaria para mantener una rueda girando a velocidad constante sobre una superficie a la fuerza normal ejercida sobre la rueda. Los valores típicos de $\mu_r$ son de 0,01 a 0,02 para neumáticos de caucho sobre hormigón y son de 0,001 a 0,002 para ruedas de acero sobre raíles de acero.

Resumiendo:

- Si el cuerpo no se mueve la fuerza de fricción estática es igual a la F aplicada.
- La magnitud fuerza de fricción estática $f_s$ tiene su valor máximo $f_{s(máximo)} = \mu_s \times F_n$
- Si el cuerpo comienza a deslizarse sobre la superficie la magnitud de la fuerza de fricción rápidamente decrece a $f_k$ con el coeficiente de fricción cinética $\mu_k$.
- La dirección de $f_s$ y de $f_k$ es siempre paralela a la superficie y opuesta al movimiento deseado y $F_n$ es perpendicular a la superficie.




| Valores de coeficientes de fricción | | |
|---|---|---|
| Materiales | $\mu_s$ | $\mu_k$ |
| Acero-acero | 0,7 | 0,6 |
| Latón-acero | 0,5 | 0,4 |
| Cobre-hierro | 1,1 | 0,3 |
| Vidrio-vidrio | 0,9 | 0,4 |
| Teflón-teflón | 0,04 | 0,04 |
| Teflón-acero | 0,04 | 0,04 |
| Caucho-hormigón seco | 1,0 | 0,80 |
| Caucho-hormigón húmedo | 0,30 | 0,25 |
| Cera de ski- nieve | 0,10 | 0,05 |

**Problemas de aplicación**.-

**1º)** Supongamos que tiramos de un objeto, de masa 0,5 kg, con una velocidad inicial de 4 m/s. El objeto se mueve sobre una superficie horizontal y se para cuando ha recorrido 5 m. Determina el coeficiente de fricción cinética y la fuerza de rozamiento.

Solución:

El objeto está sometido a tres fuerzas: el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por el suelo que es perpendicular y la **fuerza de fricción** que se dirige en sentido contrario al movimiento.

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_k = m\vec{a} \quad \left.\begin{cases} \vec{P} = -mg\,\vec{j} \\ \vec{F}_n = +mg\,\vec{j} \\ \vec{f}_k = -\mu_k mg\,\vec{i} \end{cases}\right\} \left.\begin{cases} F_{x(neta)} = -f_k = -\mu_k mg = ma_x \\ F_{y(neta)} = 0 \end{cases}\right\} \left.\begin{cases} \mu_k = -\dfrac{ma_x}{mg} = -\dfrac{a_x}{g} \\ f_k = -\mu_k mg \end{cases}\right.$$

$$\left.\begin{cases} a_x = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2\cdot\Delta x} = \dfrac{0^2 - \left(4\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 5\ m} = -1,6\,\frac{m}{s^2} \end{cases}\right\} \quad \left.\begin{cases} \mu_k = -\dfrac{a_x}{g} = -\dfrac{-1,6\,\frac{m}{s^2}}{9,8\,\frac{m}{s^2}} = 0,16 \\ f_k = \mu_k mg = 0,16\times 0,5\ kg\times 9,8\,\frac{m}{s^2} = 0,784\ N \end{cases}\right.$$

**2º)** Un objeto está en reposo sobre la superficie de un plano inclinado. El ángulo de inclinación se va aumentando gradualmente hasta que alcanza un valor crítico, después del cual el objeto empieza a caer. Determina el coeficiente de fricción estática.

Solución:

El objeto está sometido a tres fuerzas: el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por la superficie del plano inclinado y que es perpendicular y la **fuerza de fricción** estática que se dirige en sentido contrario al posible movimiento.

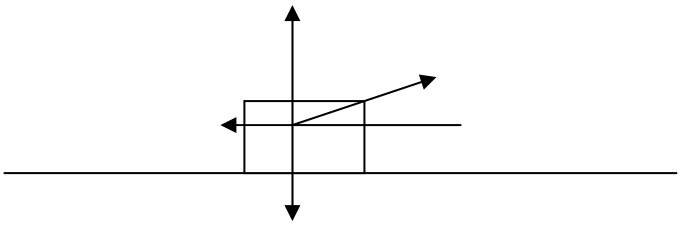
$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_s = m\vec{a} = 0 \quad \left.\begin{cases} \vec{P} = -mg\cos\theta\,\vec{j} + mg\,\text{sen}\,\theta\,\vec{i} \\ \vec{F}_n = +mg\cos\theta\,\vec{j} \\ \vec{f}_s = -\mu_s F_n\,\vec{i} = -\mu_s mg\cos\theta\,\vec{i} \end{cases}\right\} \left.\begin{cases} F_x = mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_s mg\cos\theta = 0 \\ F_y = -mg\cos\theta + mg\cos\theta = 0 \end{cases}\right\}$$

$$\begin{cases} mg\,\text{sen}\,\theta = \mu_s mg\cos\theta \\ \mu_s = \dfrac{mg\,\text{sen}\,\theta}{mg\cos\theta} = \tan\theta \end{cases}$$

**3º)** Con una cuerda tiramos de un trineo que está sobre la nieve. El trineo está en reposo y la cuerda forma un ángulo de 40º con la horizontal, la masa del trineo es de 50 kg y el coeficiente de fricción estático es de 0,2 y el coeficiente de fricción cinético de 0,15. Determina la fuerza de fricción ejercida por el suelo sobre el trineo y su aceleración si la tensión en la cuerda es: a) de 100 N; b) de 140 N.

Solución:

En primer lugar hemos de determinar si la fuerza de fricción es estática o cinética. Para ello comparamos la fuerza de fricción máxima con la fuerza horizontal ejercida por la tensión en la cuerda



El trineo está sometido a cuatro fuerzas: el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por el suelo que es perpendicular, la **fuerza de fricción** que se dirige en sentido contrario al movimiento y la **fuerza** con la que tiramos que forma un ángulo de 40º con la horizontal.

Para iniciar el movimiento:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \left.\begin{cases} \vec{T} = T_x\,\vec{i} + T_y\,\vec{j} \\ \vec{P} = -mg\,\vec{j} \\ \vec{F}_n = \left(mg - T_y\right)\vec{j} \\ \vec{f}_{s,máx} = -\mu_s \left|\vec{F}_n\right|\vec{i} \end{cases}\right\} \left\{\begin{matrix} F_{x(neta)} = T_x - f_{s,máx} = ma_x \\ F_{y(neta)} = T_y + F_n - mg = 0 \end{matrix}\right\} T_x > f_{s,máx}$$

$$\left|\vec{T}\right| = 100\ \text{N} \quad \left.\begin{cases} T_x = \left(100\cos 40^\circ\right)\text{N} = 76,6\ \text{N} \\ f_{s,máx} = \mu_s \left|\vec{F}_n\right| = 0,2 \times \left(50\ \text{kg} \times 9,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 100\,\text{sen}\,40^\circ\ \text{N}\right) = 85,1\ \text{N} \end{cases}\right\} \begin{cases} T_x < f_{s,máx} \\ a_x = 0 \end{cases}$$

$$\left|\vec{T}\right| = 140\ \text{N} \quad \left.\begin{cases} T_x = \left(140\cos 40^\circ\right)\text{N} = 107,2\ \text{N} \\ f_{s,máx} = \mu_s \left|\vec{F}_n\right| = 0,2 \times \left(50\ \text{kg} \times 9,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 140\,\text{sen}\,40^\circ\ \text{N}\right) = 80,0\ \text{N} \end{cases}\right\} \begin{cases} T_x > f_{s,máx} \\ a_x > 0 \end{cases}$$

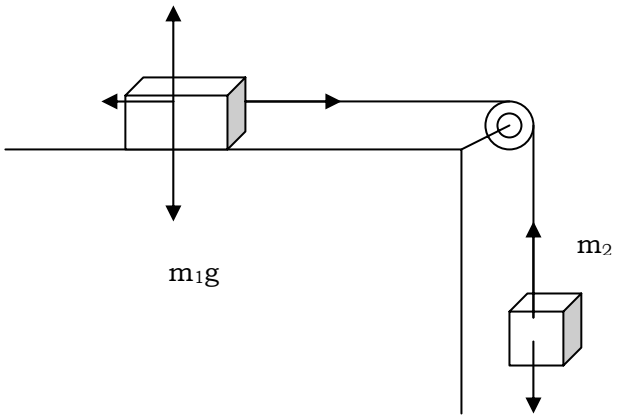
Iniciado el movimiento:

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \left.\begin{cases} \vec{T} = T_x\,\vec{i} + T_y\,\vec{j} \\ \vec{P} = -mg\,\vec{j} \\ \vec{F}_n = \left(mg - T_y\right)\vec{j} \\ \vec{f}_k = -\mu_k \left|\vec{F}_n\right|\vec{i} \end{cases}\right\} \left\{\begin{matrix} T_x - f_k = ma_x \\ T_y + F_n - mg = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases} f_k = \mu_k \left|\vec{F}_n\right| = 0,15 \times \left(50\ \text{kg} \times 9,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 140\,\text{sen}\,40^\circ\ \text{N}\right) = 60,0\ \text{N} \\ a_x = \dfrac{T_x - f_k}{m} = \dfrac{107,2\ \text{N} - 60,0\ \text{N}}{50\ \text{kg}} = 0,9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

**4º)** La masa $m_2$ de la figura se ha ajustado para que el bloque de masa $m_1$ esté a punto de empezar a deslizarse. Si $m_1$ es de 10 kg y $m_2$ de 5 kg determina el coeficiente de fricción estático $\mu_s$ del bloque de masa $m_1$ con el suelo. Posteriormente, le damos un pequeño impulso a la masa $m_2$ para que empiece a caer con una aceleración, determina la aceleración si el coeficiente de fricción cinético $\mu_k$ entre la masa $m_1$ y el suelo es 0,4.

Solución:




Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque, considerando el hecho de que la tensión de la cuerda T tiene la misma magnitud en todas las partes de la cuerda, $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen la misma magnitud porque la cuerda no se estira. Elegimos como dirección positiva para $m_1$ hacia la derecha y para $m_2$ hacia arriba.

Para iniciar el movimiento:

$$\left.\begin{matrix} m_1 \left\{\begin{matrix} F_{x(neta)} = T - f_{s,máx} = 0 \\ F_{y(neta)} = F_n - m_1 g = 0 \end{matrix}\right\} T = f_{s,máx} = \mu_s m_1 g \\ m_2 \left\{F_{y(neta)} = T - m_2 g = 0\right\}\ T = m_2 g \end{matrix}\right\} \begin{cases} T = \mu_s m_1 g = m_2 g \\ \mu_s = \dfrac{m_2 g}{m_1 g} = \dfrac{m_2}{m_1} \end{cases}$$

Iniciado el movimiento:

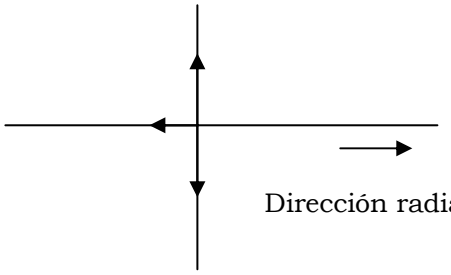
$$\left.\begin{matrix} m_1 \left\{\begin{matrix} F_{x(neta)} = T - f_k = T - \mu_k m_1 g = m_1 a \\ F_{y(neta)} = F_n - m_1 g = 0 \end{matrix}\right\} T = \mu_k m_1 g + m_1 a \\ m_2 \left\{F_{y(neta)} = T - m_2 g = -m_2 a\right\}\ T = m_2 g - m_2 a \end{matrix}\right\} \begin{cases} \mu_k m_1 g + m_1 a = m_2 g - m_2 a \\ a = \dfrac{m_2 g - \mu_k m_1 g}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

**5º)** Un coche está describiendo un círculo de radio 50 m en un tiempo de 16 s sin patinar. Determina: a) su velocidad promedio; b) la aceleración centrípeta, si consideramos que la velocidad v es

constante; c) el valor mínimo del coeficiente de fricción estática considerando que la velocidad es constante.

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre el coche son tres: la fuerza peso, la fuerza normal que equilibra la fuerza de la gravedad y la fuerza de fricción estática que es horizontal que procede de la fuerza centrípeta. Elegimos como dirección positiva la vertical hacia arriba y la dirección radial hacia fuera.



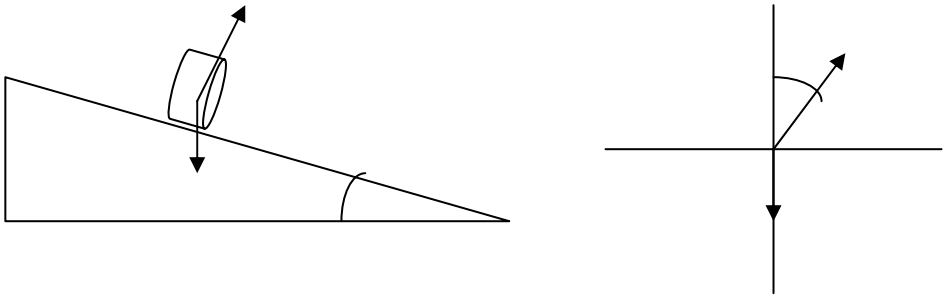

$$\left\{ v_m = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 50\ \text{m}}{16\ \text{s}} = 19{,}6\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} \right\} \quad \left\{ a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(19{,}6\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{50\ \text{m}} = 7{,}71\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \right\}$$

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a} \quad \left\{ \begin{matrix} F_{radial(neta)} = -f_{s,máx} = -ma_c = -m\dfrac{v^2}{r} \\ F_{y(neta)} = F_n - mg = 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f_{s,máx} = \mu_s F_n = \mu_s mg \\ f_{s,máx} = m\dfrac{v^2}{r} \end{matrix} \right\} \quad \mu_s = \frac{v^2}{gr}$$

**6º)** Determina la inclinación que debe tener una carretera en una curva de radio 100 m si la velocidad máxima es de 72 km/h.

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre el coche son dos: la fuerza peso debida a la gravedad y la fuerza normal. Como la carretera está inclinada la fuerza normal tiene una componente horizontal que suministra la fuerza centrípeta necesaria.



$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{ \begin{matrix} F_{y(neta)} = F_n \cos\theta - mg = ma_y = 0 \\ F_{x(neta)} = F_n \operatorname{sen}\theta = ma_x = m\dfrac{v^2}{r} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} F_n = \dfrac{mg}{\cos\theta} \\ \dfrac{mg}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = m\dfrac{v^2}{r} \end{matrix} \right\} \quad \tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$

**<u>Dinámica del movimiento circular</u>**.-

Newton demostró que una partícula moviéndose con velocidad constante en una circunferencia tiene una aceleración dirigida hacia el centro de la circunferencia, llamada **aceleración centrípeta**, requiere una fuerza neta dirigida hacia el centro de la circunferencia.

En el movimiento circular, como en todo movimiento curvilíneo, la aceleración está dirigida hacia la concavidad de la curva. La aceleración tiene dos componentes, la tangencial a la trayectoria y la normal a la trayectoria. La aceleración tangencial $\vec{a}_t$ nos mide los cambios en magnitud del módulo de la velocidad o celeridad. La aceleración normal $\vec{a}_n$ nos mide los cambios en la dirección de la velocidad.

$$\left.\begin{cases}\vec{v}=|\vec{v}|\vec{u}_t=v\vec{u}_t\\ \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(v\vec{u}_t)=\dfrac{dv}{dt}\vec{u}_t+v\dfrac{d\vec{u}_t}{dt}\\ \vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n\end{cases}\right\}\begin{cases}\vec{a}_t=\dfrac{dv}{dt}\vec{u}_t\\ \vec{a}_n=\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_n=\omega^2R\vec{u}_n\end{cases}$$

La causa de cualquier aceleración es una fuerza neta en la dirección de la aceleración. Para aceleraciones centrípetas, esta fuerza se llama **fuerza centrípeta**. No es un nuevo tipo de fuerza, es el nombre para la fuerza necesaria para el movimiento circular.

La fuerza centrípeta se puede deber a una cuerda, un muelle, u otra fuerza de contacto como la fuerza normal de fricción; puede ser un tipo de fuerza de acción a distancia, como la fuerza gravitatoria, o puede ser una combinación de estas. La fuerza centrípeta siempre está dirigida hacia el centro del círculo.

**Problema de aplicación**: Supongamos que estamos volteando un cubo o balde agua en un movimiento vertical de radio r. La velocidad del balde es $v_t$ en la parte más alta del círculo. a) Encuentra la fuerza ejercida sobre el agua por el balde en la parte más alta del círculo. b) Determina el valor mínimo de $v_t$ para que el agua permanezca en el cubo. c) Determina la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en la parte más baja del círculo donde la velocidad es $v_b$.

Solución:

Aplicamos la segunda ley de Newton para encontrar la fuerza ejercida por el cubo. Dos fuerzas actúan sobre el agua: la gravedad y la fuerza del cubo sobre el agua. Como el agua se mueve en un camino circular tiene una aceleración centrípeta hacia el centro del círculo. Elegimos la dirección positiva del eje y hacia arriba, entonces la aceleración en la parte superior es negativa y en la parte inferior positiva.

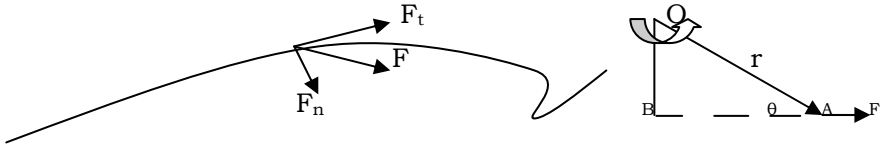
$$\vec{F}_{neta}=\vec{P}+\vec{F}_n=m\vec{a}$$

Arriba:
$$\left.\begin{cases}F_{y(neta)}=ma_y=m\left(-\dfrac{v_t^2}{r}\right)\\ -F_n-mg=m\left(-\dfrac{v_t^2}{r}\right)\end{cases}\right\}\begin{cases}F_n=m\left(\dfrac{v_t^2}{r}\right)-mg\\ \left\{\begin{array}{l}0=F_n=m\left(\dfrac{v_t^2}{r}\right)-mg\\ v_t=\sqrt{rg}\end{array}\right.\end{cases}$$

Abajo:
$$\left.\begin{cases}F_{y(neta)}=ma_y=m\left(\dfrac{v_b^2}{r}\right)\\ F_n-mg=m\left(\dfrac{v_b^2}{r}\right)\end{cases}\right\}\quad F_n=m\left(\dfrac{v_b^2}{r}\right)+mg$$

**<u>Movimiento curvilíneo</u>**.-

Una partícula experimenta un movimiento curvilíneo cuando la fuerza resultante forma un ángulo con la velocidad. Recordando que la aceleración es siempre paralela a la fuerza. La aceleración tendrá una componente paralela a la velocidad, que cambia su magnitud, y otra componente perpendicular a la velocidad que nos expresa los cambios en la dirección del movimiento.



**Par de torsión** (Torque).- Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, este no sólo se mueve en la dirección de la fuerza sino que también lo hace alrededor de un punto. Considera la fuerza F actuando sobre una partícula A. Supongamos que el efecto de la fuerza es mover la partícula alrededor de O. La experiencia nos dice que el efecto de rotación de F se incrementa con la distancia perpendicular o distancia de la palanca OB, desde el centro de rotación O a la línea de acción de la fuerza F. La magnitud física que lo define se llama par de torsión o momento del par

$$M = F \cdot OB = F \cdot OA \cdot \text{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

**Problemas Dinámica de una partícula**

**1)** Una fuerza neta actúa sobre una masa $m_1$ y le produce una aceleración a. Otra masa $m_2$ se añade a la anterior y la misma fuerza neta actúa sobre las dos masas juntas y les produce una aceleración que es un tercio de la aceleración anterior. Determina la relación entre las masas. [$m_2 = 2 \cdot m_1$]

**2)** Una esfera de 36,50 kg experimenta una aceleración 3,960 m/s$^2$ dirigida 21º por encima del eje +X. Sobre ella actúan dos fuerzas, una de 133 N dirigida a lo largo del eje +X, ¿cuál es la magnitud y dirección de la segunda fuerza?. [51,8 N dirigida a 88º por encima del eje +X]

**3)** Una persona de 95 kg está situada sobre una báscula en un ascensor. Determina el peso aparente en los casos: a) el ascensor sube con una aceleración de 1,80 m/s$^2$; b) el ascensor sube a velocidad constante; c) el ascensor baja con una aceleración de 1,30 m/s$^2$. [a) 1102 N; b) 931 N; c) 807,5 N]

**4)** Una persona, de masa 60 kg, está situada sobre una báscula dentro de un ascensor moviéndose. La masa del ascensor y de la báscula es de 815 kg. Partiendo del reposo, el ascensor sube con una aceleración, siendo la tensión en el cable del ascensor de 9410 N. ¿Cuál es la lectura sobre la escala durante la aceleración?. [645 N]

**5)** Un objeto de 2 kg se suspende del techo de un vagón de ferrocarril. Si la cuerda que sujeta al objeto es inextensible y consideramos que su peso es nulo. Calcula el ángulo, que la cuerda forma con la vertical, si el vagón lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de aceleración 3 m/s$^2$. [17º]

**6)** Un bloque en reposo sobre una superficie horizontal pesa 425 N. Una fuerza aplicada al bloque tiene una magnitud de 142 N, estando dirigida hacia arriba formando un ángulo con la horizontal. El bloque empieza a moverse cuando el ángulo es de 60º. Determina el coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie. [0,235]

**7)** Un patinador sobre hielo lleva una velocidad inicial de 7,60 m/s. Se desprecia la resistencia del aire. Calcula: a) la desaceleración causada por la fricción cinética, si el coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el filo de los patines es de 0,100; b) ¿cuánta distancia recorrerá hasta que se pare?. [a) 0,98 m/s$^2$; b) 29,5 m]

**8)** A un bloque de 121 kg le aplicamos una fuerza de 661 N formando un ángulo de 20º por encima de la horizontal. El coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie es de 0,410. ¿Cuál es la cantidad mínima de masa que se ha de poner encima del bloque para impedir que se mueva?. [56,7 kg]

**9)** Un helicóptero se mueve horizontalmente con velocidad constante. El peso del helicóptero es de 53.800 N. La fuerza que lo levanta, generada por las hélices rotando, forma un ángulo de +69º con la horizontal del movimiento. a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que lo levanta?; b) determina la magnitud de la resistencia del aire que se opone al movimiento. [57.627 N y 20.652 N]

**10)** Un bloque de masa 10 kg es empujado hacia arriba en un plano inclinado, de 30º con la horizontal, con una fuerza de 73 N y que forma un ángulo de 10º con la tangente al plano inclinado. Si el sistema no tiene rozamiento determina la fuerza que ejerce el plano sobre el bloque y la aceleración a lo largo del plano. [72,2 N y 2,3 m/s$^2$]

**11)** Un coche viaja a 40 m/s por una carretera horizontal. Los coeficientes de fricción entre la carretera y las ruedas son $\mu_s$ = 0,45 y $\mu_k$ = 0,25. Calcula la distancia que va a recorrer antes de parar si: a) el coche está equipado con un sistema de frenada antibloqueo que hace que las ruedas no se deslicen (ABS Antilock Braking System), y b) el coche frena fuertemente sin ABS y las ruedas quedan bloqueadas. [a) 181,4 m; b) 326,5 m]

**12)** Sobre una mesa horizontal tenemos una masa de 10 kg. Si partiendo del reposo con un coeficiente de rozamiento cinético 0,25 y adquiere una velocidad de 12 m/s, en 36 m de movimiento rectilíneo, ¿cuál es el valor de la fuerza horizontal aplicada?. [44,5 N]

**13)** Un cuerpo cae por un plano inclinado con un coeficiente de rozamiento μ. Dibuja las fuerzas a que está sometido, y demuestra que la aceleración con la que cae es independiente de la masa y es igual a la expresión: $a = g(\operatorname{sen}\phi - \mu_k \cos\phi)$.

**14)** Dos cuerpos de 0,5 kg cada uno cuelgan de los extremos de un hilo que pasa por una polea. ¿Qué masa hay que añadir a uno de ellos para que el otro recorra 1 m en 2s? y ¿qué tensión soportará la cuerda?. [0,054 kg y 5,15 N]

**15)** Sobre un objeto, de masa de 500 g, se aplican simultáneamente dos fuerzas. Si la velocidad inicial del objeto es $\vec{v}_0 = 3\,\frac{m}{s}\vec{i} - 4\,\frac{m}{s}\vec{j}$ y las fuerzas son $\vec{F}_1 = 2\,N\vec{i} + 7\,N\vec{j}$ y $\vec{F}_2 = 3\,N\vec{i} + 4\,N\vec{j}$, determina: a) ¿Cuánto vale el módulo de la aceleración que adquiere la masa?; b) Si la masa se encuentra inicialmente en el punto (0,0) m con una determinada velocidad inicial, ¿qué posición ocupará al cabo de 3 s?. [a) 24,2m/s$^2$; b) $r_x$ = 54 m; $r_y$ = 87 m]

**16)** Un bloque de masa 0,2 kg sube por un plano inclinado de 30º con la horizontal. La velocidad inicial de subida fue de 12 m/s y el coeficiente de rozamiento cinético $\mu_k$ es 0,16. Determina: a) la distancia que recorrerá en la subida y la altura sobre el plano; b) la velocidad del bloque cuando al caer llegue a la parte más baja del plano inclinado. [a) 12,16 m y 6,08 m; b) 9,28 m/s]

**17)** Sobre una mesa horizontal hay un cuerpo de 10 kg, que está unido mediante un hilo y una polea a otro de 5 kg que está colgando verticalmente. El coeficiente de rozamiento cinético del cuerpo con la mesa es $\mu_k$ = 0,20. Calcula: a) la aceleración del sistema y dibuja las fuerzas existentes; b) la masa mínima que ha de tener un cuerpo para que al colocarlo sobre el de 10 kg éste no se mueva. [a) 1,96 m/s$^2$; b) 15 kg]

**18)** Un ciclista va a realizar un giro llamado el "rizo de la muerte" en el que realiza un giro por una carretera colocada perpendicularmente. Si el radio del rizo es de 2,7 m, ¿cuál es la velocidad menor que puede tener el ciclista para que pueda permanecer en contacto con el rizo?. [5,14 m/s]

**19)** Un coche viaja a una velocidad constante de 20 m/s por una carretera circular llana de radio 190 m. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente $\mu_s$ estático entre los neumáticos del coche y la carretera para prevenir que el coche se deslice?. [0,21]

**20)** En una carretera en la que no hay fricción, por ejemplo, sobre hielo, un coche se mueve con una velocidad constante de 20 m/s alrededor de una curva con peralte. Si el radio es de 190 m ¿cuál es el ángulo que deberá tener el peralte?. [12º]

**21)** En un cilindro de radio 2,1 m apoyamos un objeto, de masa 49 kg, que tiene un coeficiente de rozamiento con la pared del cilindro de 0,40. a) ¿Cuál es la velocidad mínima para que el objeto no se deslice hacia abajo?; b) ¿cuál es la fuerza centrípeta sobre el objeto?. [a) 7,2 m/s; b) 1200 N]

**TRABAJO y ENERGÍA**

- Conceptos de trabajo y de energía.
- Trabajo y Energía Cinética: movimiento en una dimensión con fuerzas constantes; el teorema trabajo-energía cinética. Ejemplos de problemas de aplicación del teorema trabajo-energía cinética
- Trabajo realizado por una fuerza variable. Ejemplos de problemas de aplicación de trabajo de una fuerza variable
- Trabajo y Energía en tres dimensiones. Ejemplos de problemas de aplicación de trabajo y energía en tres dimensiones
- Potencia. Ejemplos de problemas de aplicación de potencia
- Energía Potencial. Fuerzas conservativas. Función Energía Potencial. Ejemplos de funciones de energía potencial debidas a fuerzas conservativas
- La Conservación de la Energía Mecánica
- Trabajo debido a las fuerzas de fricción
- La Conservación de la Energía. Ejemplos de problemas del principio de conservación de la energía
- Relación entre energía y movimiento orbital: velocidad orbital, energía total negativa y velocidad de escape.
- **Problemas propuestos y problemas resueltos**.

**Conceptos de Trabajo y de Energía**:

El trabajo y la energía son conceptos importantes tanto en la física como en la vida diaria. En física una fuerza realiza **trabajo** cuando actúa sobre un objeto que se mueve por una distancia, y hay una componente de la fuerza a lo largo de la línea del movimiento.

Para una fuerza constante en una dimensión, el trabajo hecho es igual a la fuerza multiplicada por la distancia $W = F \cdot d$ .

El concepto de **energía** está asociado al de trabajo. Cuando se realiza trabajo por un sistema sobre otro, la energía se transfiere entre los dos sistemas. Por ejemplo, cuando realizamos trabajo empujando un columpio, la energía química de nuestro cuerpo se transfiere al columpio y aparece como energía cinética de movimiento o energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-columpio. Hay muchas formas de energía. La energía cinética está asociada con el movimiento de un objeto. La energía potencial está asociada con la configuración de un sistema, tal como la distancia de separación entre algún objeto y la Tierra. La energía térmica está asociada con el movimiento aleatorio de las moléculas dentro de un sistema y está íntimamente relacionada con la temperatura del sistema.

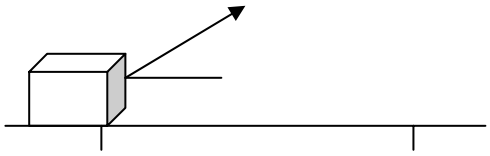
**Trabajo y Energía Cinética**.-

**Movimiento en una dimensión con fuerzas constantes**:

El trabajo W realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ cuyo punto de aplicación se mueve a lo largo de una distancia $\Delta x$ se define:

$$W = (F \cos\theta) \cdot \Delta x = F_x \cdot \Delta x$$

Donde $\theta$ es el ángulo entre la fuerza $\vec{F}$ y el eje x, y el término $\Delta x$ es el desplazamiento de la fuerza.



El trabajo es una magnitud escalar que es positiva si el desplazamiento y la fuerza tienen el mismo signo, y negativa si tienen signos opuestos. Las dimensiones del trabajo son de fuerza por distancia, en el Sistema Internacional (SI) de unidades la unidad de trabajo y energía es el **joule** (**J**), siendo la unidad 1 J = 1 N·m. Una unidad de trabajo y energía que se utiliza en la física atómica y nuclear es el electrón-voltio (eV): $1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J$.

Cuando hay varias fuerzas que realizan trabajo, el trabajo total se determina sumando el trabajo realizado por cada fuerza

$$W_{total} = F_{1x} \cdot \Delta x_1 + F_{2x} \cdot \Delta x_2 + \ldots$$

Cuando varias fuerzas realizan trabajo sobre una partícula, el desplazamiento $\Delta x_i$ es el mismo para cada fuerza y es igual al desplazamiento de la partícula $\Delta x$:

$$W_{total} = F_{1x} \cdot \Delta x + F_{2x} \cdot \Delta x + \ldots = \left(F_{1x} + F_{2x} + \ldots\right) \cdot \Delta x = F_{x(neta)} \cdot \Delta x$$

Por tanto, para una partícula el trabajo total se determina sumando todas las fuerzas para encontrar la fuerza neta y entonces calcular el trabajo realizado por la fuerza neta.

**El teorema trabajo-energía cinética**:

Hay una relación importante entre el trabajo total realizado sobre una partícula y las velocidades inicial y final de la partícula.

Si $F_x$ es la fuerza neta actuante sobre una partícula, la segunda ley de Newton se expresa por $F_x = ma_x$. Mientras el trabajo realizado por la fuerza neta es igual al trabajo total realizado sobre la partícula

$$W_{total} = F_x \cdot \Delta x = ma_x \cdot \Delta x$$

Para una **fuerza constante**, la aceleración es constante, y podemos relacionar la distancia que la partícula se mueve con su velocidad inicial y su velocidad final:

$$\left.\begin{matrix} F = cte \\ a = cte \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} v_f^2 - v_i^2 = 2a_x\Delta x \\ a_x\Delta x = \frac{1}{2}v_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2 \end{matrix}\right\} \quad W_{total} = F_x \cdot \Delta x = ma_x \cdot \Delta x = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \Delta E_c$$

La magnitud $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ es escalar y se llama la **energía cinética** de la partícula.

El trabajo total realizado sobre una partícula es igual al cambio en su energía cinética

$$W_{total} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Este resultado se conoce como **teorema trabajo-energía cinética**. El teorema es válido tanto si la fuerza neta es constante o es variable.

**Ejemplos de problemas de aplicación del teorema trabajo-energía cinética**:

**1º)** Un vehículo, de masa 3.000 kg, es levantado verticalmente por una grúa que ejerce una fuerza sobre el vehículo de 31.000 N, que también es vertical y hacia arriba,. Esta fuerza se aplica en una distancia de 2 m. Determina: a) el trabajo realizado por la grúa; b) el trabajo realizado por la gravedad; c) la velocidad del vehículo al cabo de los 2 m.

Solución:

La fuerza aplicada se produce en la dirección del movimiento (eje vertical OY), por lo que el trabajo es positivo. Sin embargo, la gravedad está en dirección opuesta a la del movimiento (-OY), y el trabajo realizado por la gravedad es negativo. La velocidad final del vehículo se obtiene desde la energía cinética final, que se obtiene aplicando el teorema trabajo-energía cinética. El cálculo del trabajo total se puede hacer de dos formas, determinando el trabajo de cada fuerza o a partir de la fuerza neta.

$$W_{total} = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$W_{total} = W_{(F_{aplicada})} + W_{(F_{gravedad})}$$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha \begin{cases} W_{(F_{aplicada})} = F_y \cdot \Delta y \cdot \cos 0^o = 31000\ N \times 2\ m \times 1 = 62000\ J \\ W_{(F_{gravedad})} = F_g \cdot \Delta y \cdot \cos 180^o = \left(3000\ kg \times 9{,}8\ \frac{m}{s^2}\right) \times 2\ m \times (-1) = -58800\ J \end{cases}$$

$$W_{total} = W_{(F_{aplicada})} + W_{(F_{gravedad})} = 62000\ J - 58800\ J = 3200\ J \begin{cases} W_{total} = 3200\ J = E_{c(f)} = \frac{1}{2}mv_f^2 \\ v_f = \sqrt{\frac{2 \times 3200\ J}{3000\ kg}} = 1{,}46\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$W_{total} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta\vec{r} = \left(F_{aplicada} - F_{gravedad}\right) \cdot \Delta y = (31000\ N - 29400\ N) \times 2\ m = 3200\ J$$

**2º)** En un tubo de televisión se acelera un electrón, partiendo del reposo, hasta alcanzar una energía cinética de 2,5 keV en una distancia de 80 cm. Determina la fuerza eléctrica aplicada sobre el electrón considerando que es constante y en la misma dirección del movimiento.

Solución:

$$W_{total} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)}$$
$$F_{neta} \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha = E_{c(f)} - E_{c(i)}$$
$$F_{neta} = \frac{E_{c(f)} - E_{c(i)}}{\Delta r \cdot \cos\alpha} = \frac{2500\ eV}{0,80\ m} \times \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\ J}{1\ eV} = 5,0 \cdot 10^{-16}\ N$$

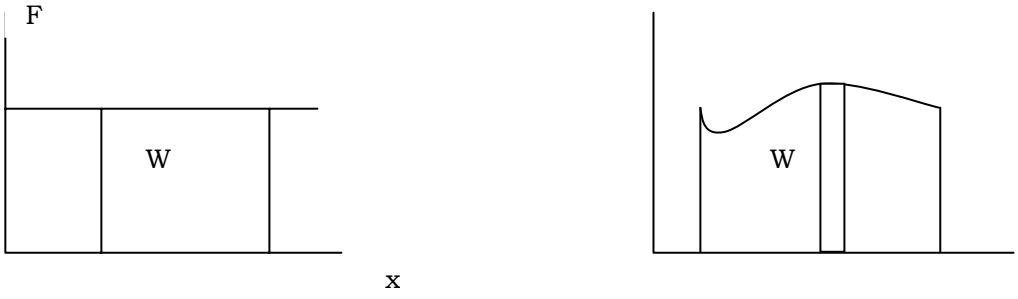
**3º)** Tiramos de un trineo, de masa 80 kg, que se desliza sobre el hielo, con una fuerza de 180 N formando un ángulo de 20º con la horizontal. Si parte del reposo y se desplaza 5 m sin rozamiento, determina el trabajo que realizamos y la velocidad final del trineo.

Solución:

Consideramos que el trineo se mueve sobre el eje OX horizontal. El trineo está sometido a tres fuerzas, la fuerza aplicada que forma un ángulo de 20º con la horizontal, la fuerza peso dirigida hacia el eje –OY, y la fuerza normal en la dirección +OY

$$W_{total} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta E_c = E_{c(f)} - E_{c(i)} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$
$$\vec{F}_{neta} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_n \quad \begin{cases} F_{neta(x)} = F\cos 20º = 180\ N \times \cos 20º \\ F_{neta(y)} = F \cdot \text{sen}\, 20º - mg + F_n = F \cdot \text{sen}\, 20º - mg + (mg - F \cdot \text{sen}\, 20º) = 0 \end{cases}$$
$$W_{total} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta\vec{r} = F_{neta(x)} \cdot \Delta x = (180\ N \times \cos 20º) \times 5\ m = 845,7\ J$$
$$W_{total} = 845,7\ J \quad \begin{cases} W_{total} = E_{c(f)} = \frac{1}{2}mv_f^2 \\ v_f = \sqrt{\frac{2 \times W_{total}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 845,7\ J}{80\ kg}} = 4,6\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

**<u>Trabajo realizado por una fuerza variable</u>**:




En la figura de la izquierda está dibujada, en el eje de ordenadas, una fuerza F constante aplicada a una partícula en función de su posición x, representada sobre el eje de abscisas.

El trabajo realizado sobre la partícula que experimenta un desplazamiento está representado por el área bajo la recta fuerza-posición: $W_{sobre} = F_x \cdot \Delta x$.

Sin embargo, muchas fuerzas varían con el desplazamiento. Por ejemplo, un muelle ejerce una fuerza proporcional al desplazamiento si se alarga o se comprime. La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre un objeto también varía cuando el objeto se aleja o se acerca, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el centro de la Tierra y el objeto. Para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable, como la representada en la figura, debemos calcular el área bajo la curva fuerza-posición, que ahora no es rectangular.

Para calcular el área se considera que en desplazamientos muy pequeños la fuerza es constante, siendo el trabajo realizado el representado por el área de los rectángulos de base infinitesimal $W_i = F_x \cdot \Delta x_i$.

El trabajo total realizado por una fuerza variable será la suma de las áreas de los infinitos rectángulos, es decir

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_x \cdot \Delta x_i \equiv \text{área bajo la curva fuerza-posición}$$

En cada área del rectángulo $F_x \cdot \Delta x_i$, la fuerza es constante, y así el trabajo será igual al cambio en la energía cinética sobre aquel intervalo. El trabajo total realizado es la suma de las áreas sobre todos los intervalos, las cuales son iguales al cambio en la energía cinética sobre el intervalo completo. Por tanto el teorema trabajo-energía cinética, $W_{total} = \Delta E_c$, es válido para fuerzas variables y para fuerzas constantes.

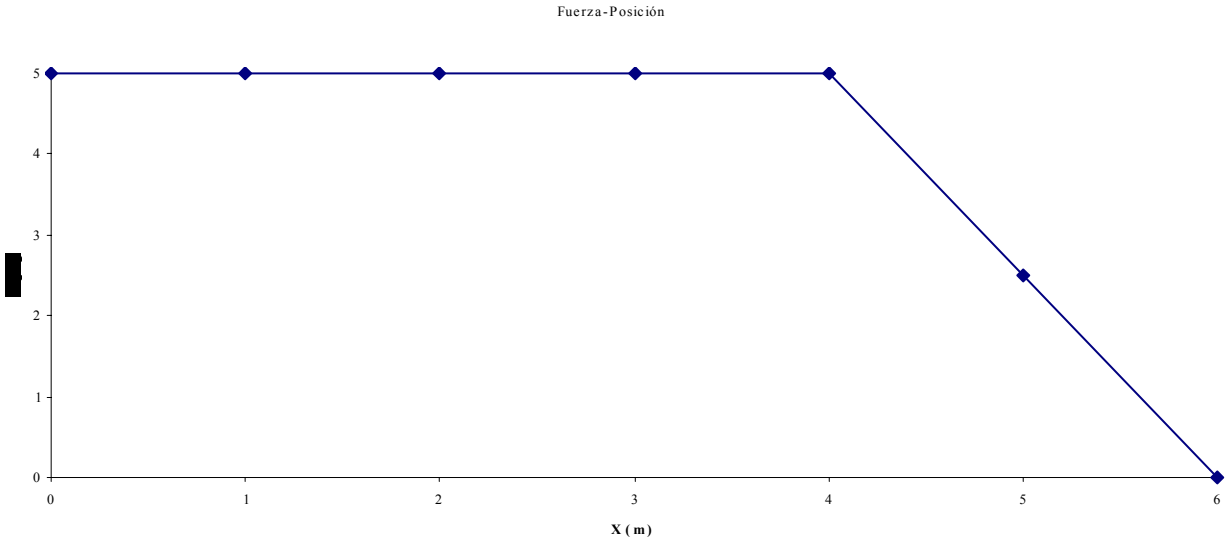
**Ejemplos de problemas de aplicación de trabajo de una fuerza variable**:

**1º)** Una fuerza F varía con el eje x como se expresa en el dibujo. Determina el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula cuando se mueve desde la posición 0 m hasta la posición 6 m.

Solución:

El trabajo total se determina si calculamos el área bajo la curva representada por la fuerza en función de la posición x. En la curva tenemos dos área diferenciadas, una desde la posición 0 m hasta 4 m, que es un rectángulo, y la otra desde 4 m hasta 6 m que es un triángulo.

$$W_{total} = (5\ \text{N} \times 4\ \text{m}) + \left(\frac{1}{2} \times 5\ \text{N} \times 2\ \text{m}\right) = 20\ \text{J} + 5\ \text{J} = 25\ \text{J}$$




**2º)** Un bloque de masa 4 kg situado sobre una mesa horizontal, por la que se puede deslizar sin rozamiento, está unido a un muelle, de constante k = 400 N/m. El muelle está inicialmente comprimido con el bloque en la posición -5 cm. Determina el trabajo realizado por el muelle sobre el bloque cuando este se mueve desde la posición -5 cm hasta su posición de equilibrio, y la velocidad del bloque en la posición de equilibrio.

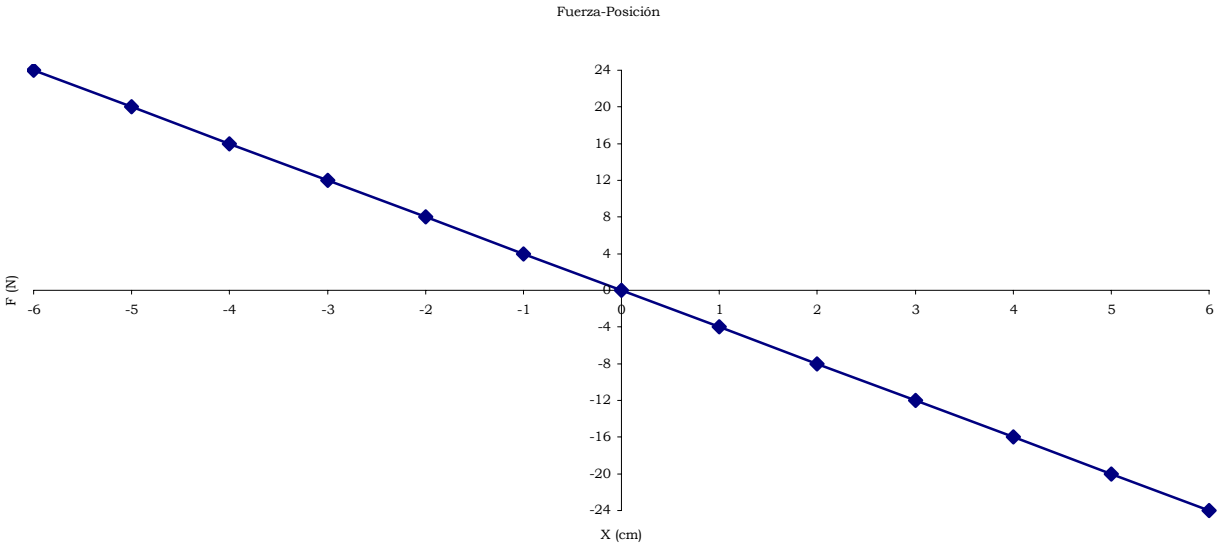
Solución:

El trabajo realizado sobre el bloque cuando se mueve desde una posición a otra es igual al área bajo la curva de la componente de la fuerza sobre el eje x frente al eje x entre los límites que calculemos. El trabajo realizado será igual al cambio en la energía cinética, que es exactamente la energía cinética final ya que la energía cinética inicial es cero.

El trabajo analíticamente: $W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = \int_{x_1}^{0} (-kx)\, dx = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} \times 400\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \times (-0{,}05\ \text{m})^2 = 0{,}5\ \text{J}$

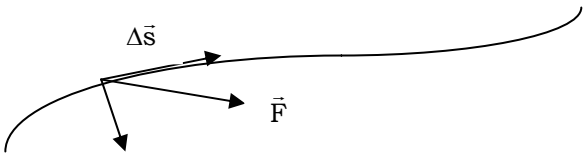
El trabajo gráficamente: $W = \frac{1}{2} \times 20\ \text{N} \times 0{,}05\ \text{m} = 0{,}5\ \text{J}$

$$W_{total} = 0,5\,J \quad \begin{cases} W_{total} = E_{c(f)} = \dfrac{1}{2}mv_f^2 \\ v_f = \sqrt{\dfrac{2\times W_{total}}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\times 0,5\,J}{4\,kg}} = 0,5\ \frac{m}{s} \end{cases}$$




**Trabajo y Energía en tres dimensiones**.-

La figura siguiente representa una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza $\vec{F}$ que hace que se mueva a lo largo de una curva en el espacio.




Consideremos un desplazamiento pequeño $\Delta\vec{s}$, en el que s es la distancia medida a lo largo de la curva. La fuerza $\vec{F}$ tiene dos componentes respecto al desplazamiento, la paralela $F_s$ y la perpendicular $F_n$. La componente perpendicular o normal $F_n$ proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que la partícula recorra la curva, y como es perpendicular al movimiento no contribuye al trabajo realizado sobre la partícula por la fuerza $\vec{F}$, por lo que el trabajo lo realiza la fuerza tangencial: $\Delta W = F_s \cdot \Delta s$. Para determinar el trabajo realizado cuando la partícula se mueve a lo largo de la curva desde un punto 1 hasta un punto 2, calculamos el producto $F_s \cdot \Delta s$ para cada elemento del camino y sumamos. En el límite de la suma de los desplazamientos elementales, la suma nos lleva a

$$\begin{cases} dW_{total} = \vec{F}\cdot d\vec{s} = m\vec{a}\cdot d\vec{s} = ma_t\,ds \\ dW_{total} = F\cos\phi\,ds = F_s\,ds \end{cases} \quad \begin{cases} F_s = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_s = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt} = mv\dfrac{dv}{ds} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dW_{total} = F_s\,ds = mv\dfrac{dv}{ds}ds = mv\,dv \\ W_{total} = \dfrac{1}{2}mv_2^2 - \dfrac{1}{2}mv_1^2 \end{cases}$$

**Ejemplos de problemas de aplicación de trabajo y energía en tres dimensiones**:

**1º)** Un trineo, de masa 100 kg, cae por una pendiente de 30º sin rozamiento durante 10 m. Determina realizado sobre el trineo y la velocidad cuando llegue al suelo.

Solución:

Sobre el trineo actúan dos fuerzas: el peso, que tiene dirección vertical hacia abajo, y la fuerza normal que es perpendicular a la superficie de la pendiente. La única fuerza que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria ya que la fuerza normal al ser perpendicular al desplazamiento su trabajo es cero.

$$W_{total} = F_s \cdot \Delta s = mg\,\text{sen}\,\alpha \cdot \Delta s = 100\ \text{kg} \times 9,8 \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \text{sen}\,30^\circ \times 10\ \text{m} = 4900\ \text{J}$$

$$W_{total} = E_{c(f)} \quad \begin{cases} mg\,\text{sen}\,\alpha \cdot \Delta s = \dfrac{1}{2} m v_f^2 \\ v_f = \sqrt{\dfrac{2mg\,\text{sen}\,\alpha \cdot \Delta s}{m}} = \sqrt{2g\,\text{sen}\,\alpha \cdot \Delta s} = \sqrt{2gh} = 9,89\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

**Potencia**.-

La potencia suministrada por una fuerza es **la rapidez con que la fuerza realiza trabajo**. Considera una partícula moviéndose con velocidad instantánea $\vec{v}$. En un corto intervalo de tiempo, dt, la partícula se ha desplazado $d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt$. El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ actuando sobre la partícula durante este intervalo de tiempo es $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$. La potencia entregada a la partícula es

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,.$$

En el SI la unidad de potencia es el watt (W): 1 W = 1 J/s.

**Ejemplo de problema de aplicación de potencia**:

**1º)** Usamos un pequeño motor para elevar objetos que pesan 800 N hasta una altura de 10 m en un tiempo de 20 s. Determina la potencia mínima que el motor debe producir.

Solución:

Consideramos que el objeto se eleva sin aceleración, por lo que la fuerza ejercida hacia arriba por el motor es igual al peso del cuerpo.

$$v_{objeto} = \frac{10\ \text{m}}{20\ \text{s}} = 0,5\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$W_{neto} = \vec{F}_{neta} \cdot \Delta \vec{d} \begin{cases} \vec{F}_{neta} = F_{motor} - P = 0 \\ F_{motor} = P = mg \end{cases} \quad \begin{cases} P_{motor} = \dfrac{W_{motor}}{t} = \dfrac{F_{motor} \cdot d}{t} = F_{motor} \cdot v_{objeto} = mgv \\ P_{motor} = 800\ \text{N} \times 0,5\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 400\ \text{W} \end{cases}$$

**Energía Potencial**.-

El trabajo total realizado sobre una partícula es igual al cambio en su energía cinética. Pero frecuentemente estamos interesados en el trabajo realizado **sobre un sistema** de dos o más partículas. A menudo, **el trabajo** realizado por fuerzas externas **sobre un sistema** no incrementa la energía cinética del sistema, y se almacena como **energía potencial**.

Si levantamos un objeto de masa m hasta una altura h, el trabajo que realizamos sobre el objeto es $W_{sobre} = F_{sobre} \cdot h = mg \cdot h$. La energía cinética del objeto no se incrementa porque la Tierra realiza trabajo negativo $W_{Tierra} = P \cdot h = -mg \cdot h$, y el trabajo total sobre el objeto es cero.

Ahora consideramos que el objeto y el planeta Tierra son un sistema de partículas, pero no nosotros. Las fuerzas externas sobre el sistema Tierra-objeto son: la atracción gravitatoria que ejercemos sobre la Tierra, w, la fuerza que nuestro pie ejerce sobre la Tierra, (w + mg), y la fuerza mg que ejercemos con nuestras manos sobre el objeto. Y despreciamos la fuerza gravitatoria que ejercemos sobre el objeto. El objeto se mueve pero la Tierra no, por lo que la única fuerza externa ejercida sobre el sistema que realiza trabajo es la fuerza que ejercemos sobre el objeto.

El trabajo total realizado sobre el sistema Tierra-objeto por fuerzas externas al sistema es **mgh**, este trabajo se almacena como energía potencial, que está asociado con la configuración del sistema Tierra-objeto.

Otro ejemplo de sistema es el formado por un objeto unido a un muelle soldado a un disparador. Si comprimimos el muelle, el trabajo que realizamos sobre el sistema se almacena como energía potencial en el sistema objeto-muelle. Su configuración ha cambiado porque el muelle se

ha comprimido. El muelle se comprime por dos fuerzas que son iguales y opuestas, la fuerza de empuje para comprimirlo y la fuerza del soporte disparador sobre el muelle.

**Fuerzas conservativas**:

Cuando un ascensor nos eleva hasta una altura h, el trabajo realizado por el ascensor sobre nosotros es mgh y el realizado por la gravedad es –mgh. Cuando bajamos desde la altura h el trabajo realizado por la gravedad es +mgh independientemente de la pendiente de bajada. El trabajo total hecho por la gravedad sobre nosotros durante el viaje de ida y vuelta es cero, independientemente del camino que recorramos. La fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra sobre nosotros se dice que es una fuerza conservativa.

$$\left\{W_{gravedad} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y}\right\}$$

$$\text{Objeto sube } y_f > y_i \quad \begin{cases} W_{gravedad} = F_g \cdot (y_f - y_i) \cdot \cos 180^o = -mg(y_f - y_i) = -mgh \\ W_{gravedad} = -mgy_f + mgy_i \end{cases}$$

$$\text{Objeto baja } y_f < y_i \quad \begin{cases} W_{gravedad} = F_g \cdot (y_f - y_i) \cdot \cos 0^o = mg(y_f - y_i) = mgh \\ W_{gravedad} = mgy_f - mgy_i \end{cases}$$

$$\left(W_{gravedad}\right)_{neto} = -mgh + mgh = 0$$

Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve describiendo un camino cerrado retornando a la posición inicial.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula es independiente del camino tomado cuando la partícula se mueve desde un punto a otro.

**Función Energía Potencial**:

Como el trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula no depende del camino o trayectoria, depende sólo de los puntos inicial y final, podemos usar esta propiedad para definir la función energía potencial $E_p$ que está asociada con una fuerza conservativa. Para ello consideramos que cuando descendemos de una altura el trabajo realizado por la gravedad decrece la energía potencial del sistema. En general, definimos la función energía potencial en base a que el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual al decrecimiento en la función energía potencial.

$$\left\{W_{gravedad} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y}\right\}$$

$$\text{Objeto sube } y_f > y_i \quad \left.\begin{cases} W_{gravedad} = F_g \cdot (y_f - y_i) \cdot \cos 180^o = -mg(y_f - y_i) \\ W_{gravedad} = -mgy_f + mgy_i = -E_{p_{(f)}} + E_{p_{(i)}} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} \end{cases}\right\} E_{p(gravitatoria)} = mgy$$

$$\text{Objeto baja } y_f < y_i \quad \left.\begin{cases} W_{gravedad} = F_g \cdot (y_f - y_i) \cdot \cos 0^o = mg(y_f - y_i) \\ W_{gravedad} = mgy_f - mgy_i = E_{p_{(f)}} - E_{p_{(i)}} = +\Delta E_{p(gravitatoria)} \end{cases}\right\} E_{p(gravitatoria)} = mgy$$

$$\left(W_{gravedad}\right)_{neto} = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + \Delta E_{p(gravitatoria)} = 0$$

$$W_{gravedad} = -\Delta E_{p(gravitatoria)}$$

**Ejemplos de funciones de energía potencial debidas a fuerzas conservativas:**

**1º)** La energía potencial gravitatoria asociada a la *fuerza gravitatoria*:

En las proximidades de la superficie terrestre:

$$\left.\begin{cases} \vec{F} = -G\dfrac{M_T m}{R_T^2}\vec{u}_r = -mg\vec{u}_r \\ W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -mg\,\vec{j} \cdot \Delta r_y\,\vec{j} = -mg \cdot \Delta r_y \end{cases}\right\} \quad \begin{cases} W = -\Delta E_{p(gravitatoria)} = -mg \cdot \Delta r_y \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = mg \cdot \Delta r_y \\ E_{p(gravitatoria)} = mgy \end{cases}$$

En puntos muy alejados de la superficie de la Tierra:

$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= -G\frac{Mm}{(R_T+h)^2}\vec{u}_r\\ W &= \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned}W &= -\Delta E_{p(\text{gravitatoria})}\\ E_{p(\text{gravitatoria})} &= -G\frac{Mm}{(R_T+h)}\end{aligned}\right.$$

**2º)** La energía potencial de un muelle asociada a la *fuerza que ejerce un muelle* al ser comprimido o estirado depende del desplazamiento que experimenta, conocida como ley de Hooke $\vec{F} = -k\cdot\Delta\vec{r}$, la fuerza del muelle es la fuerza ejercida **por el muelle** sobre un cuerpo y el desplazamiento se refiere a la posición de equilibrio, por lo que el muelle puede ser comprimido o alargado. El **trabajo** que realiza un muelle se invierte en incrementar la energía potencial del muelle:

$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= -k\cdot\Delta\vec{r}\\ W &= \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned}W &= -\left[\frac{1}{2}kr_f^2 - \frac{1}{2}kr_i^2\right] = -\Delta E_{p(\text{muelle})}\\ E_{p(\text{muelle})} &= \frac{1}{2}kr^2\end{aligned}\right.$$

**La Conservación de la Energía Mecánica.-**

La energía potencial de un sistema se define considerando que **el trabajo realizado por** una **fuerza conservativa** interna **sobre el sistema** es igual al **decrecimiento** en la **energía potencial** $W = -\Delta E_p$.

Si la fuerza conservativa es la única fuerza que realiza trabajo, el trabajo realizado también es igual al **incremento** en la energía cinética $W = \Delta E_c$.

Como el decrecimiento en energía potencial es igual al incremento en la energía cinética, la suma de la energía cinética y potencial no cambia, lo que es conocido como la **ley de conservación de la energía mecánica**.

$$\left.\begin{aligned}W &= \Delta E_c = -\Delta E_p\\ \Delta E_c + \Delta E_p &= 0\end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned}&\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta\left(E_c + E_p\right) = 0\\ &\left(E_c + E_p\right)_f - \left(E_c + E_p\right)_i = 0\\ &E_{c(f)} + E_{p(f)} = E_{c(i)} + E_{p(i)}\end{aligned}\right.$$

La energía mecánica de un cuerpo es la suma de la energía cinética y de la energía potencial. **Principio de conservación:** "*Si un cuerpo se encuentra en un campo de fuerzas conservativo la suma de la energía cinética y de la energía potencial es siempre constante*".

**La ley de conservación de la energía mecánica** de obtiene de las leyes de Newton, y **es una alternativa a las leyes de Newton**, de mucha utilidad, para solucionar los problemas en mecánica. Aunque el uso de la conservación de la energía es limitado porque casi siempre hay fuerzas no conservativas, como las fuerzas de fricción.

**Cuando las fuerzas de fricción están presentes la energía mecánica del sistema decrece**. Como la energía mecánica del sistema siempre decrece en la mayoría de los procesos, y no se conserva, no se consideró útil hasta el siglo XIX, cuando se descubrió que la desaparición de energía mecánica macroscópica está siempre acompañada por la aparición de algún otro tipo de energía, frecuentemente energía térmica, lo que viene indicado por un aumento de temperatura. Hoy en día conocemos, sobre la escala microscópica, que esta energía térmica consiste de energía cinética y energía potencial de las moléculas en el sistema.

**Trabajo debido a las fuerzas de fricción:**

Si además de las fuerzas **conservativas** hay fuerzas de fricción la energía mecánica no se conserva ya que aparece un trabajo de fricción que se pierde. *Las fuerzas de fricción tienen sentido opuesto al deseo del desplazamiento, luego el trabajo debido a estas fuerzas es siempre negativo*:

$$W_{\text{rozamiento}} = \vec{F}_{roz}\cdot\Delta\vec{r} < 0$$

$$W_{\text{neto}} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left(\vec{F}_{\text{cons}} + \vec{F}_{roz}\right)\cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_c\cdot\Delta\vec{r}\right) + \left(\vec{F}_{roz}\cdot\Delta\vec{r}\right) = W_{\text{cons}} + W_{roz} = -\Delta E_p + W_{roz}$$

$$W_{\text{neto}} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(\text{gravitatoria})} - \Delta E_{p(\text{muelle})} + W_{roz}$$

$$\Delta E_c + \Delta E_{p(\text{gravitatoria})} + \Delta E_{p(\text{muelle})} = W_{roz} < 0$$

La conservación de la Energía ha de incluir el Trabajo debido a las fuerzas de rozamiento. Si en el sistema intervienen varias fuerzas conservativas (elástica y gravitatoria) hay que considerarlas todas.

Existen otras formas de energía, como la energía química de nuestro cuerpo, la energía del sonido y la energía electromagnética. Si un sistema cambia su energía lo podemos comprobar por el aumento o disminución en energía que experimente el sistema. La observación experimental nos lleva a la ley de conservación de la energía, que es una de las leyes esenciales de toda la ciencia. Aunque la energía cambie desde una forma a otra nunca se crea ni se destruye.

Al principio analizaremos sistemas en los que la energía mecánica se conserva. Después se extiende el análisis para incluir energía térmica y química, con métodos específicos para tratar con sistemas que disipan energía, en donde se convierte energía mecánica de fricción cinética en energía térmica. Después la famosa relación de Einstein entre masa y energía y, por último, consideramos la cuantización de la energía, con el descubrimiento que la energía que cambia en un sistema no lo hace de forma continua sino en paquetes o cuantos.

**La Conservación de la Energía**.-

En el mundo macroscópico las fuerzas no conservativas están siempre presentes de alguna manera, las más frecuentes son las fuerzas de fricción, que hace que el sistema disminuya su energía mecánica. Sin embargo la disminución de la energía mecánica es igual al incremento en la energía térmica producida por las fuerzas de fricción.

Otro tipo de fuerza no conservativa es aquella que suponga una deformación de los objetos. Cuando doblamos un objeto el trabajo realizado sobre él en la deformación se disipa como energía térmica. Similarmente cuando una bola rebota en el suelo se calienta con el impacto, y la energía potencial inicial aparece como energía térmica. Si la energía térmica se suma a la energía mecánica, la energía total se conserva, aunque haya fuerzas de fricción o fuerzas deformación.

Otro tipo de fuerzas no conservativas se asocia con reacciones químicas. Cuando consideramos sistemas en los que las reacciones químicas tienen lugar, la suma de la energía mecánica y de la energía térmica no se conserva. Cuando empezamos a correr la energía interna química de nuestro músculo se convierte en cinética de nuestro cuerpo, y se produce energía térmica, y la suma de las tres permanece constante.

**Ejemplos de problemas del principio de conservación de la energía**:

**1º)** Sobre un objeto de masa 4 kg, colocado en una mesa horizontal, se aplica una fuerza horizontal de 25 N. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa es 0,35. Determina: a) el trabajo externo realizado sobre el sistema mesa-objeto; b) la energía disipada por el rozamiento; c) la energía cinética del objeto después de que haya sido empujado 3 m; d) la velocidad del objeto después de recorrer los 3 m.

Solución:

$$W_{sobre} = F_{ext} \cdot \Delta x = 25\ N \times 3\ m = 75\ J$$
$$W_{roz} = -f_{roz} \cdot \Delta x = -\mu_k mg \cdot \Delta x = -0,35 \times 4\ kg \times 9,8\ \tfrac{m}{s^2} \times 3\ m = -41,16\ J$$
$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{sobre} + W_{roz} = 75\ J - 41,16\ J = 33,84\ J$$
$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 33,84\ J}{4\ kg}} = 4,11\ \tfrac{m}{s}$$

**2º)** Un objeto de masa 40 kg se desliza por un plano inclinado de 30º, respecto de la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el objeto y el plano es de 0,2. Si el objeto parte del reposo desde la parte superior a una altura de 4 m sobre el suelo, determina la velocidad cuando llegue al suelo.

Solución:

Como el objeto parte del reposo en la parte superior, parte de su energía potencial se convierte en energía cinética y otra en energía térmica debida a la fricción. Elegimos el sistema formado por el objeto, el plano inclinado y la Tierra, luego el trabajo externo es cero, y el teorema trabajo-energía supone que la energía disipada por la fricción es igual al cambio en la energía mecánica.

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} \begin{cases} \Delta E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 - 0 \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 0 - mgh \\ W_{roz} = -f_{roz} \times \dfrac{h}{\operatorname{sen} 30^o} = -\mu_k mg \cos 30^o \times \dfrac{h}{\operatorname{sen} 30^o} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 = mgh - \mu_k mg \cos 30^o \times \dfrac{h}{\operatorname{sen} 30^o} \\ v^2 = 2gh\left(1 - \mu_k \cos 30^o \times \dfrac{1}{\operatorname{sen} 30^o}\right) \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{2 \times 9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 4\ m\left(1 - 0{,}2 \times \frac{\cos 30^o}{\operatorname{sen} 30^o}\right)} = 7{,}2\ \frac{m}{s}$$

**3º)** Un objeto, de masa 4 kg, está colgado por un hilo que pasa a través de una polea y que está unido a otro objeto, de masa 6 kg, que permanece en reposo sobre una mesa horizontal de coeficiente de fricción cinética $\mu_k$ = 0,2. El objeto de 6 kg está apoyado sobre un muelle que está comprimido en 30 cm, siendo su constante elástica k = 180 N/m. Determina la velocidad de los objetos después de que el muelle se halla soltado y el objeto de 4 kg haya recorrido una distancia de 40 cm.

Solución:

La velocidad de los dos objetos se obtiene a partir de su energía cinética final. El sistema se considera formado por la Tierra, la mesa horizontal, el muelle y los dos objetos. Por lo que el trabajo externo es cero y el teorema trabajo-energía implica que la energía disipada por fricción es igual al cambio en la energía mecánica. Elegimos que el objeto de 4 kg se mueve en el eje OY siendo el origen la posición inicial (y = 0)

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} + W_{roz}$$

$$\text{Datos} \begin{cases} m_1 = 6\ kg \\ m_2 = 4\ kg \\ \Delta s = 0{,}40\ m \\ \Delta x = 0{,}30\ m \\ k = 180\ \frac{N}{m} \\ \mu_k = 0{,}2 \end{cases} \begin{cases} \Delta E_c = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - 0 \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = -m_2 g \Delta s - 0 = -4\ kg \times 9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 0{,}40\ m = -15{,}68\ J \\ \Delta E_{p(muelle)} = 0 - \dfrac{1}{2}k\Delta x^2 = -\dfrac{1}{2} \times 180\ \frac{N}{m} \times (0{,}30\ m)^2 = -8{,}1\ J \\ W_{roz} = -f_{roz}\Delta s = -\mu_k m_1 g \Delta s = -0{,}2 \times 6\ kg \times 9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 0{,}40\ m = -4{,}704\ J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} + W_{roz} \\ \Delta E_c = 15{,}68\ J + 8{,}1\ J - 4{,}704\ J = 19{,}076\ J \\ \Delta E_c = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 19{,}076\ J \end{cases} \quad v = \sqrt{\frac{19{,}076\ J}{\frac{1}{2}(6\ kg + 4\ kg)}} = 1{,}95\ \frac{m}{s}$$

**Problemas propuestos de Trabajo y Energía**:

**1)** Un automóvil de 1200 kg está subiendo una pendiente de inclinación 5º. La fuerza de fricción tiene de magnitud 500 N. Si la longitud de la pendiente es de 300 m, ¿cuál será la magnitud de la fuerza que lo hace subir? sabiendo que el trabajo neto hecho por todas las fuerzas actuantes sobre el coche es de +150.000 J. [2025 N]

**2)** Un avión, de masa 6000 kg, está volando inclinado en un ángulo 10 grados hacia abajo durante una distancia de 1700 m. Sobre el avión actúan cuatro fuerzas: su peso, la fuerza ascendente que actúa perpendicular a la dirección del avión, la fuerza de los motores (de magnitud 18.000 N) y la fuerza de la resistencia del aire opuesta a la dirección del movimiento del avión. El trabajo neto realizado por estas cuatro fuerzas es $2{,}9\cdot10^7$ J. Calcula: a) el trabajo hecho por la resistencia del aire, y b) la magnitud de la fuerza de la resistencia del aire. [$-1{,}896\cdot10^7$ J y -11.151,7 N]

**3)** La frenada de un coche tiene 65 m de longitud. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera es 0,80. ¿Qué velocidad llevaba el coche antes de aplicar los frenos?. [31,9 m/s]

**4)** Una nave espacial viaja a través del espacio vacío con una velocidad de 11.000 m/s, siendo su masa de 50.000 kg. Suponemos que no actúan fuerzas sobre la nave excepto aquellas generadas por su motor. El motor ejerce una fuerza constante de 400 kN, que es paralela al desplazamiento, y si ésta se mantiene durante un desplazamiento de 2.500 km, determina la velocidad final de la nave. [12.688,6 m/s]

**5)** Un esquiador de 58 kg está bajando por una pendiente de 25 grados. La fuerza de fricción cinética, que es opuesta a su movimiento descendente, tiene una magnitud de 70 N. Si consideramos la velocidad del esquiador, en la parte superior, es de 3,6 m/s e ignoramos la resistencia del aire, determina la velocidad cuando ha recorrido 57 m. [19 m/s]

**6)** Un gimnasta de 48,0 kg salta verticalmente hacia arriba desde un trampolín. El gimnasta sale del trampolín a una altura de 1,20 m y alcanza una altura máxima de 4,80 m, siempre con relación al suelo. Si ignoramos la resistencia del aire, determina: a) la velocidad inicial con la que el gimnasta sale del trampolín y el trabajo debido a la fuerza de la gravedad; b) la velocidad del gimnasta, al volver a caer, a una altura de 3,50 m, así como el trabajo debido a la fuerza de la gravedad en la caída. [a) -1693 J; 8,40 m/s; b) 612 J; 5,05 m/s]

**7)** La montaña rusa más alta del mundo tiene una caída vertical de 59,3 m. Si consideramos que la velocidad en el punto más alto es cero y que la fricción es prácticamente nula, calcula la velocidad de los viajeros en el punto más bajo de la trayectoria. Posteriormente compara el resultado obtenido con el obtenido en la experiencia en que la velocidad de los viajeros en la parte más baja es de 32,2 m/s, que es menor que la calculada teóricamente. Con estos datos calcula cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción sobre un vagón de 55,0 kg. [34 m/s; 3.449,6 J]

**8)** Calcular el trabajo neto realizado al arrastrar un bloque de 80 kg, sobre un plano horizontal, aplicándole una fuerza de 400 N durante una distancia de 15 m si: a) la fuerza aplicada es horizontal y no existe rozamiento entre el bloque y el plano; b) la fuerza aplicada forma un ángulo de 60º con la horizontal y no existe rozamiento entre el bloque y el plano; c) la fuerza aplicada es horizontal y existe rozamiento entre el bloque y el plano siendo $\mu = 0{,}2$; d) la fuerza forma un ángulo de 60º con la horizontal y existe rozamiento entre el bloque y el plano siendo $\mu = 0{,}2$. [a) 6.000 J; b) 3.000 J; c) 3.648 J; d) 1687,2 J]

**9)** Un bloque de 5 kg desliza por una superficie horizontal lisa con una velocidad de 4 m/s y choca con un resorte de masa despreciable y constante elástica 800 N/m, en equilibrio y con el otro extremo fijo. Calcular: a) cuánto se comprime el resorte; b) desde qué altura debería caer el bloque sobre el resorte, colocado verticalmente, para producir la misma compresión. [a) 0,316 m; b) 0,816 m].

**10)** Un bloque de 10 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con la horizontal, con una velocidad de 10 m/s. El bloque vuelve al punto de partida con una velocidad de 5 m/s. Calcula: a) el trabajo de rozamiento total, en subir y bajar; b) la longitud que recorre en subir; c) el coeficiente de rozamiento con el plano; d) la deformación máxima y final de un resorte de constante elástica 500 N/m, colocado en dicho punto de partida y con el que choca el bloque al volver. [a) -375 J; b) 6,38 m; c) $\mu = 0{,}35$; d) 0,747 m y 0,0386 m]

**11)** Una bola pequeña de metal es lanzada por un plano inclinado desde una altura sobre el suelo de 3,00 m. Al final del plano, siguiendo un camino curvado, es proyectado verticalmente hacia

arriba hasta una altura de 4,00 m sobre el suelo. Si ignoramos la fricción y la resistencia del aire, encuentra la velocidad inicial de la bola. [4,43 m/s]

**12)** Un cohete de 3 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con suficiente velocidad inicial para alcanzar una altura máxima de 100 m. Si la resistencia del aire realiza un trabajo de -800 J sobre el cohete, ¿qué altura alcanzaría el cohete sin resistencia del aire?. [127,5 m]

**13)** Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es $\mu = 0,4$. Calcular: a) longitud que recorre hacia arriba el bloque, hasta detenerse; b) velocidad del bloque al volver al punto de lanzamiento. [a) 6,0 m; b) 4,3 m/s]

**14)** Un bloque de 2,0 kg se deja caer desde una altura de 40 cm sobre un muelle colocado verticalmente. La constante elástica del muelle es de 1960 $N \cdot m^{-1}$. Calcula la distancia máxima que se comprime el muelle y la distancia de equilibrio. Dato: $g = 9,8\ m \cdot s^{-2}$. [0,10 m; 0,010 m]

**Electricidad**

- Introducción. Carga eléctrica: Cuantización de la carga y Conservación de la carga.
- Conductores y aislantes. Cargando por inducción.
- Ley de Coulomb. Fuerza ejercida por un sistema de cargas. Ejemplos de problemas de aplicación.
- El campo eléctrico. Definición operativa del campo eléctrico. Campo eléctrico debido a una carga puntual Q y campo eléctrico debido a una distribución de cargas puntuales. Ejemplos de problemas de aplicación. Dipolos Eléctricos.
- Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos. Ejemplos de problemas de aplicación.
- Energía potencial electrostática. Diferencia de potencial. Potencial Eléctrico.
- Líneas del campo eléctrico. Las reglas para dibujar las líneas del campo eléctrico. Potencial y líneas del campo eléctrico. Superficies equipotenciales.
- Energía electrostática y capacidad eléctrica. Problemas de aplicación.
- Capacidad eléctrica. Condensadores. Condensador de armaduras paralelas. Energía almacenada en un condensador cargado. Problemas de ejemplo.
- Corriente eléctrica. Resistencia y Ley de Ohm. La energía en los circuitos eléctricos. Fuerza electromotriz y baterías. Combinación de resistencias en un circuito: Resistencias en serie y en paralelo. Circuitos multimalla: reglas de Kirchhoff.
- Problemas propuestos de Electricidad

**Introducción**:

En nuestra vida diaria somos muy dependientes de la electricidad, sin embargo hace cien años existían sólo unas pocas lámparas eléctricas. El estudio de la electricidad empezó en la antiguaos Griegos, que observaron que después de frotar el ámbar atrae pequeños objetos como pajas o plumas. De hecho la palabra "eléctrico" procede de la palabra griega para el ámbar, electrón.

Empezaremos estudiando las cargas en reposo, que constituye la electrostática. Después de introducir el concepto de carga eléctrica, hablaremos de los conductores y aislantes. Estudiaremos la Ley de Coulomb, que nos da la fuerza ejercida por una carga eléctrica sobre otra. Después introduciremos el campo eléctrico y demostraremos como puede describirse por las líneas del campo eléctrico que nos indican la magnitud y dirección del campo.

**Carga eléctrica**.-

Supongamos que tenemos una varilla de plástico frotada con un trozo de piel y la suspendemos de una cuerda de tal forma que pueda girar libremente. Ahora traemos a su proximidad una segunda varilla de plástico igualmente frotada con piel. Se observa que las varillas se repelen. Los mismos resultados se observan si usamos dos varillas de vidrio frotadas con seda. Pero se observa que las varillas se atraen si ponemos la de plástico, frotada con piel, próxima a la varilla de vidrio frotada con seda.

El frotamiento de la varilla le causa que ella se cargue eléctricamente. Si repetimos el experimento con varios materiales, encontramos que todos los objetos cargados caen en uno de los dos grupos. Benjamín Franklin explicó esto por un modelo: cada objeto tiene una cantidad normal de electricidad que se puede transferir de uno a otro cuando están en contacto. Esto permite que un objeto tenga exceso de carga y el otro objeto deficiencia en la misma cantidad como el exceso. Franklin describió las cargas resultantes con signos más o menos, eligiendo que positiva sea la carga adquirida por una varilla de vidrio cuando se frota con un trozo de seda. El trozo de seda adquiere carga negativa en igual magnitud.

Hoy conocemos que cuando el vidrio se frota con seda, se transfieren electrones desde el vidrio a la seda. Los electrones son los que tienen la carga negativa.

**Cuantización de la carga**: La materia está constituida de átomos que son eléctricamente neutros. Cada átomo tiene un núcleo diminuto que contiene protones y neutrones. Los protones están cargados positivamente, mientras los neutrones no tienen carga. El número de protones en el núcleo es el número atómico Z del elemento. Alrededor del núcleo hay un número igual de electrones cargados negativamente, lo que hace que el átomo tenga una carga neta cero. El electrón tiene una masa que es unas 2000 veces inferior que la del protón, aunque las cargas son exactamente iguales en magnitud. La carga del electrón se llama la unidad de carga fundamental. La carga de un electrón (-e) o protón (+e) es una propiedad intrínseca de la partícula, como la masa y el espín.

Todas las cargas observadas son múltiplos de la unidad de carga fundamental e. Por lo que la carga está cuantizada. Cualquier carga, Q, en la naturaleza se puede expresar como $Q = \pm Ne$, donde N es un entero.

**Conservación de la carga**: Cuando los objetos son frotados, uno de ellos se deja con un exceso de electrones y está cargado negativamente; el otro objeto se deja sin electrones y está cargado positivamente. La carga neta de los dos objetos permanece constante, es decir, se conserva la carga. La ley de conservación de la carga es una ley fundamental de la naturaleza. En determinados procesos de interacción se crean electrones o son aniquilados. Sin embargo, en todos ellos se produce o se destruye igual cantidad de carga positiva y negativa, por lo que la carga neta del Universo permanece constante.

En el Sistema Internacional la unidad de carga es el coulomb, que se define en términos de la unidad de corriente eléctrica. El coulomb, C, es la cantidad de carga que fluye a través de un alambre en un segun-

do cuando la corriente en el alambre es de un amperio. La unidad fundamental de carga eléctrica e es $1{,}60\cdot10^{-19}$ C.

**Conductores y aislantes**.-

En muchos materiales como el Cu y otros metales, algunos de los electrones se pueden mover libremente por todo el material. Estos materiales se llaman **conductores**. En otros materiales, como la madera o el vidrio, todos los electrones están unidos a los átomos enlazados y ninguno puede moverse libremente. Estos materiales se llaman **aislantes**.

En un átomo de Cu hay 29 electrones que están enlazados al núcleo. Los electrones más externos están unidos más débilmente que los internos por dos razones: los electrones más externos están más lejos del núcleo y sienten la fuerza repulsiva de los electrones internos. Cuando tenemos una pieza de cobre hay un gran número de átomos unidos, y el resultado es que la unión de los electrones en cada átomo se reduce por la interacción con los átomos próximos. Y uno o más de los electrones externos, en cada átomo, no se une fuertemente y se puede mover libremente a través de toda la pieza de metal, como una molécula de gas se puede mover por el interior del recipiente. El número de electrones libres depende de metal, pero suele ser uno por átomo.

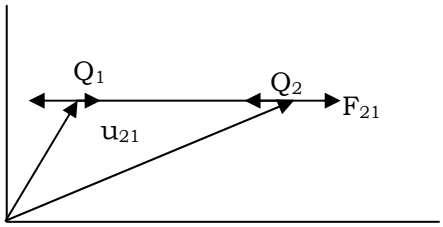
**Cargando por inducción**: La conservación de la carga se ilustra por un sencillo método de cargar un conductor llamado **cargando por inducción**. Dos esferas metálicas sin carga se ponen en contacto. Cuando una varilla cargada se coloca próxima a una de las dos esferas, los electrones libres fluyen desde una esfera a otra, hacia una varilla cargada positivamente o alejándose de una varilla cargada negativamente. La varilla cargada positivamente atrae los electrones cargados negativamente, y la esfera más próxima a la varilla adquiere electrones desde la esfera más alejada. Esto produce que la esfera próxima a la varilla tenga una carga neta negativa y la más alejada tenga igual carga neta pero positiva. Un conductor que tiene cargas opuestas separadas se dice que está polarizado. Si las esferas están se separan antes de que la varilla se quite tendrán la misma cantidad de carga pero opuesta.

Para muchas aplicaciones la Tierra se considera como un conductor infinitamente grande con bastante abastecimiento de carga libre. Cuando una varilla cargada positivamente se coloca próxima a un conductor, le induce una separación de cargas, las negativas se desplazan próximas a la varilla y las negativas en la posición opuesta. Si el conductor se conecta a la Tierra, mediante un hilo, los electrones del suelo neutralizan la carga positiva de la parte opuesta a la varilla del conductor, y el resultado es que el conductor se queda cargado negativamente.

**Ley de Coulomb**.-

Charles Augusto Coulomb (1736-1806) realizó una serie de experimentos para determinar la interacción entre dos cargas puntuales y llegó a la siguiente expresión, conocida como **ley de Coulomb**: "La interacción eléctrica entre dos partículas cargadas, en reposo o en movimiento relativo muy lento, es directamente proporcional al producto del valor de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, y su dirección es a lo largo de la línea que une las dos cargas. La interacción depende siempre del medio". Sean dos cargas positivas: $Q_1$ situada en el punto $\vec{r}_1\left(r_{1x};r_{1y}\right)$, y $Q_2$ en el punto $\vec{r}_2\left(r_{2x};r_{2y}\right)$.

La distancia que separa las dos cargas es: $\left|\vec{r}_{21}\right| = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{\left(r_{2x} - r_{1x}\right)^2 + \left(r_{2y} - r_{1y}\right)^2}$.




La fuerza repulsiva $F_{21}$, aplicada sobre $Q_2$, es la que ejerce la carga $Q_1$ sobre la carga $Q_2$, es decir, la fuerza que siente $Q_2$ debida a $Q_1$. De igual forma, la fuerza $F_{12}$, aplicada sobre $Q_1$ es debida a la carga $Q_2$. Las dos fuerzas son iguales y de sentido opuesto $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

$$\vec{F}_{21} = K_e\frac{Q_1Q_2}{r_{21}^2}\vec{u}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_1Q_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} \qquad \left\{\vec{u}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{\left|\vec{r}_{21}\right|} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} = \frac{\left(r_{2x} - r_{1x}\right)\vec{i} + \left(r_{2y} - r_{1y}\right)\vec{j}}{\sqrt{\left(r_{2x} - r_{1x}\right)^2 + \left(r_{2y} - r_{1y}\right)^2}}\right\}$$

$$\vec{F}_{12} = K_e\frac{Q_2Q_1}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \qquad \left\{\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|} = \frac{\left(r_{1x} - r_{2x}\right)\vec{i} + \left(r_{1y} - r_{2y}\right)\vec{j}}{\sqrt{\left(r_{1x} - r_{2x}\right)^2 + \left(r_{1y} - r_{2y}\right)^2}}\right\}$$

Las propiedades eléctricas del medio que se expresan por la constante $K_e = 8{,}99\cdot10^9\ Nm^2C^{-2}$.

Siendo $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ un parámetro llamado permitividad. Su valor es igual al producto de la permitividad del vacío por la constante dieléctrica del medio.

**Fuerza ejercida por un sistema de cargas**.-

En un sistema constituido por más de dos cargas, cada carga ejerce una fuerza sobre cada otra, que viene dada por la ley de Coulomb. La fuerza neta sobre cualquier carga es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre aquella carga por todas las otras cargas del sistema. Esto es lo que se conoce como el **principio de superposición de las fuerzas**.

**Ejemplos de problemas de aplicación**:

1) El átomo de hidrógeno está constituido por un protón y un electrón. La magnitud de la carga del protón, que es positiva, es igual a la del electrón $q_e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C. El electrón está separado del protón por una distancia promedio de $5{,}3\cdot10^{-11}$ m. Calcula la fuerza electrostática ejercida por el protón sobre el electrón.

Respuesta:

$$F_e = K_e\frac{q_p q_e}{r^2} = 8{,}99\cdot10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2}\frac{1{,}6\cdot10^{-19}C\times\left(-1{,}6\cdot10^{-19}C\right)}{\left(5{,}3\cdot10^{-11}\ m\right)^2} = -8{,}19\cdot10^{-8}\ N$$

2) Calcula la relación entre la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria ejercida por el protón sobre el electrón. Sabemos que las masas del protón y del electrón son: $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg. La carga del protón es positiva y de igual valor a la del electrón: $q_e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C. Siendo su distancia promedio de $5{,}3\cdot10^{-11}$ m.

Respuesta:

$$\left.\begin{cases} F_e = K_e\dfrac{q_p q_e}{r^2} \\ F_g = -G\dfrac{m_p m_e}{r^2} \end{cases}\right\} \frac{F_e}{F_g} = \frac{K_e q_p q_e}{-G m_p m_e} = \frac{8{,}99\cdot10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2}\times1{,}6\cdot10^{-19}C\times\left(-1{,}6\cdot10^{-19}C\right)}{6{,}67\cdot10^{-11}\ \tfrac{Nm^2}{kg^2}\times1{,}67\cdot10^{-27}\ kg\times9{,}11\cdot10^{-31}\ kg} = 2{,}27\cdot10^{39}$$

3) Un sistema formado por tres cargas: $q_1 = 4$ nC en el origen del plano OXY, $q_2 = -5$ nC en el punto (2;0) m y $q_3 = 1$ nC en el punto (3; 0) m. Calcula la fuerza neta sobre $q_3$ debida a las cargas $q_1$ y $q_2$.

Respuesta:

$$\vec{F}_{3(neta)} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = K_e\frac{q_1 q_3}{r_{31}^2}\vec{u}_{31} + K_e\frac{q_2 q_3}{r_{32}^2}\vec{u}_{32}$$

$$\vec{F}_{31} = K_e\frac{q_1 q_3}{r_{31}^2}\vec{u}_{31}\left\{\begin{array}{l}\vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = 3\ m\ \vec{i} \\ r_{31} = 3\ m \\ \vec{u}_{31} = \dfrac{\vec{r}_{31}}{r_{31}} = 1\vec{i}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{F}_{31} = 8{,}99\cdot10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{4\cdot10^{-9}C\times1\cdot10^{-9}C}{(3\ m)^2}\left(1\vec{i}\right) \\ \vec{F}_{31} = 4\cdot10^{-9}\ N\ \vec{i}\end{array}\right.$$

---

$$\vec{F}_{32} = K_e\frac{q_2 q_3}{r_{32}^2}\vec{u}_{32}\left\{\begin{array}{l}\vec{r}_{32} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = 3\ m\ \vec{i} - 2\ m\ \vec{i} = 1\ m\ \vec{i} \\ r_{32} = 1\ m \\ \vec{u}_{32} = \dfrac{\vec{r}_{32}}{r_{32}} = 1\vec{i}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{F}_{32} = 8{,}99\cdot10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2}\dfrac{-5\cdot10^{-9}C\times1\cdot10^{-9}C}{(1\ m)^2}\left(1\vec{i}\right) \\ \vec{F}_{32} = -4{,}5\cdot10^{-8}\ N\ \vec{i}\end{array}\right.$$

$$\vec{F}_{3(neta)} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = 4\cdot10^{-9}\ N\ \vec{i} - 4{,}5\cdot10^{-8}\ N\ \vec{i} = -4{,}1\cdot10^{-8}\ N\ \vec{i}$$

4) Un sistema formado por tres cargas: $q_1 = 1$ nC en el origen del plano OXY, $q_2 = 2$ nC en el punto (2;0) m y $q_3 = -3$ nC en el punto (2; 2) m. Calcula la fuerza neta sobre $q_1$, módulo y dirección, debida a las cargas $q_2$ y $q_3$.

Respuesta:

$$\vec{F}_{1(neta)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = K_e\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} + K_e\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{13}$$

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12} \begin{cases} \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -2 \text{ m } \vec{i} \\ r_{12} = 2 \text{ m} \\ \vec{u}_{12} = \dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -1\,\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{12} = 8{,}99 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \dfrac{1 \cdot 10^{-9}\text{C} \times 2 \cdot 10^{-9}\text{C}}{(2 \text{ m})^2}\left(-1\,\vec{i}\right) \\ \vec{F}_{12} = -4{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ N } \vec{i} \end{cases}$$

---

$$\vec{F}_{13} = K_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \vec{u}_{13} \begin{cases} \vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = -2 \text{ m } \vec{i} - 2 \text{ m } \vec{j} \\ r_{13} = \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ m} = \sqrt{8} \text{ m} \\ \vec{u}_{13} = \dfrac{\vec{r}_{13}}{r_{13}} = -\dfrac{2}{\sqrt{8}}\vec{i} - \dfrac{2}{\sqrt{8}}\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{13} = 8{,}99 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \dfrac{1 \cdot 10^{-9}\text{C} \times \left(-3 \cdot 10^{-9}\text{C}\right)}{8 \text{ m}^2}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{8}}\vec{i} - \dfrac{2}{\sqrt{8}}\vec{j}\right) \\ \vec{F}_{13} = 2{,}38 \cdot 10^{-9} \text{ N } \vec{i} + 2{,}38 \cdot 10^{-9} \text{ N } \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{1(\text{neta})} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = -4{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ N } \vec{i} + \left(2{,}38 \cdot 10^{-9} \text{ N } \vec{i} + 2{,}38 \cdot 10^{-9} \text{ N } \vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{1(\text{neta})} = -2{,}12 \cdot 10^{-9} \text{ N } \vec{i} + 2{,}38 \cdot 10^{-9} \text{ N } \vec{j}$$

$$\left|\vec{F}_{1(\text{neta})}\right| = \sqrt{\left(2{,}12 \cdot 10^{-9}\right)^2 + \left(2{,}38 \cdot 10^{-9}\right)^2} \text{ N} = 3{,}19 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_{1y(\text{neta})}}{F_{1x(\text{neta})}} = \arctan \frac{2{,}38 \cdot 10^{-9} \text{ N}}{-2{,}12 \cdot 10^{-9} \text{ N}} = 131{,}7^\circ$$

**El campo eléctrico**.-

La fuerza ejercida por una carga sobre otra es un ejemplo de una acción a distancia de una fuerza, que es similar a la fuerza gravitatoria ejercida por una masa sobre otra.

La idea de acción a distancia es un problema conceptual difícil. ¿Cuál es el mecanismo por el que una partícula puede ejercer una fuerza sobre otra cuando ha de cruzar el espacio vacío entre ellas?. Suponga que una partícula cargada, colocada en cualquier punto, de repente se mueve, ¿la fuerza que ejerce sobre otra partícula cambia instantáneamente?.

Para eludir el problema de acción a distancia, se introduce el concepto de **campo eléctrico**. Una carga eléctrica produce un campo eléctrico, E, por todo el espacio que la rodea, y este campo es el que ejerce la fuerza sobre la otra carga. La fuerza sobre la segunda carga la ejerce el campo existente en la posición de la segunda carga. El campo se propaga a través del espacio con la velocidad de la luz, c. Por lo que si una carga se mueve bruscamente, la fuerza que ella ejerce sobre otra carga, a una distancia r, no cambia hasta un tiempo posterior que es r/c.

**Definición operativa del campo eléctrico**: En una zona del espacio, en la que existe un sistema formado por varias cargas eléctricas, existe un campo eléctrico. En cualquier punto del espacio se determina el valor del campo eléctrico colocando una carga testigo $q_0$ sobre la que el campo eléctrico ejercerá una fuerza. La fuerza neta, sobre $q_0$, es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre $q_0$ por cada una de las otras cargas, que constituyen el sistema. Como cada una de las fuerzas es proporcional a $q_0$, la fuerza neta será proporcional a $q_0$. El campo eléctrico E en un punto es:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

El límite de que la carga $q_0$ tienda a cero se introduce para indicar que la carga testigo no influye en el comportamiento de las fuentes del campo, lo que las hace independientes de la presencia de la carga testigo. Esta definición es válida sólo para procesos macroscópicos donde las cargas fuentes del campo son superiores a la carga testigo. Para procesos microscópicos no podemos definir el campo en términos de sus efectos, sino que debe ser descrito en términos de sus fuentes.

El campo eléctrico describe el estado o la condición del espacio debido al sistema de cargas puntuales. Moviendo la carga testigo $q_0$ desde un punto a otro podemos hallar $\vec{E}$ en todos los puntos del espacio, excepto en cualquier punto ocupado por una carga q. El campo eléctrico es una función vectorial de la posición. La fuerza ejercida sobre una carga testigo en cualquier punto se relaciona con el campo eléctrico: $\vec{F} = q_0\vec{E}$ .

**Campo eléctrico debido a una carga puntual Q**: Considera que colocamos una carga testigo positiva, $q_0$, en algún punto a una distancia r, desde la carga Q. La fuerza sobre $q_0$ y el campo eléctrico en el punto debido a la carga Q es:

$$\vec{F} = K_e \frac{Qq_0}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0} = K_e \frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

**Campo eléctrico debido a una distribución de cargas puntuales** ($Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_n$), para calcular el campo eléctrico en un punto del espacio aplicamos el **Principio de Superposición**: "El campo electrostático, producido por un conjunto discreto de cargas puntuales, en un punto del campo, es la suma vectorial de los campos electrostáticos debidos a cada una de las cargas

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots = K_e \frac{Q_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1} + K_e \frac{Q_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} K_e \frac{Q_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i}$$

**Ejemplos de problemas de aplicación**:

1) Determina la fuerza que experimenta un electrón y la aceleración que siente cuando se coloca en un punto del campo eléctrico cuyo valor es $E_x = 2 \cdot 10^5\ N \cdot C^{-1}$. Datos: $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg,

Respuesta:

$$\vec{F} = q_e\vec{E} = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \times 2 \cdot 10^5\ \tfrac{\text{N}}{\text{C}}\ \vec{i} = -3{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{N}\ \vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q_e\vec{E}}{m_e} = \frac{-3{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{N}\ \vec{i}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 3{,}5 \cdot 10^{16}\ \tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\ \vec{i}$$

2) Tenemos un sistema formado por dos cargas. Una $Q_1$ = +8 nC, situada en el origen de coordenadas, y la otra $Q_2$ = +12 nC situada en el punto x = 4 m. Determina el campo eléctrico en los puntos $P_1$ (7; 0) m, $P_2$ (3; 0) m y $P_3$ (0; 3) m

Respuesta:

$$P_1(7;0):\quad \vec{E}_{P_1} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K_e \frac{Q_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1} + K_e \frac{Q_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2} \quad \left\{\begin{array}{l} Q_1\,(0;0)\ \text{m} \\ \vec{r}_1 = 7\ \text{m}\,\vec{i} - 0\ \text{m}\,\vec{i} = 7\ \text{m}\,\vec{i} \\ \vec{u}_{r_1} = \dfrac{\vec{r}_1}{r_1} = \dfrac{7\ \text{m}\,\vec{i}}{7\ \text{m}} = 1\,\vec{i} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} Q_2\,(4;0)\ \text{m} \\ \vec{r}_2 = 7\ \text{m}\,\vec{i} - 4\ \text{m}\,\vec{i} = 3\ \text{m}\,\vec{i} \\ \vec{u}_{r_2} = \dfrac{\vec{r}_2}{r_2} = \dfrac{3\ \text{m}\,\vec{i}}{3\ \text{m}} = 1\,\vec{i} \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = K_e \dfrac{Q_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \tfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \dfrac{8 \cdot 10^{-9}\text{C}}{(7\ \text{m})^2} \times 1\,\vec{i} = 1{,}47\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} \\ \vec{E}_2 = K_e \dfrac{Q_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \tfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \dfrac{12 \cdot 10^{-9}\text{C}}{(3\ \text{m})^2} \times 1\,\vec{i} = 12\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{E}_{P_1} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 1{,}47\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} + 12\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} = 13{,}47\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i}$$

$$P_2(3;0):\quad \vec{E}_{P_2} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K_e \frac{Q_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1} + K_e \frac{Q_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2} \quad \left\{\begin{array}{l} Q_1\,(0;0)\ \text{m} \\ \vec{r}_1 = 3\ \text{m}\,\vec{i} - 0\ \text{m}\,\vec{i} = 3\ \text{m}\,\vec{i} \\ \vec{u}_{r_1} = \dfrac{\vec{r}_1}{r_1} = \dfrac{3\ \text{m}\,\vec{i}}{3\ \text{m}} = 1\,\vec{i} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} Q_2\,(4;0)\ \text{m} \\ \vec{r}_2 = 3\ \text{m}\,\vec{i} - 4\ \text{m}\,\vec{i} = -1\ \text{m}\,\vec{i} \\ \vec{u}_{r_2} = \dfrac{\vec{r}_2}{r_2} = \dfrac{-1\ \text{m}\,\vec{i}}{1\ \text{m}} = -1\,\vec{i} \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = K_e \dfrac{Q_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \tfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \dfrac{8 \cdot 10^{-9}\text{C}}{(3\ \text{m})^2} \times 1\,\vec{i} = 8\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} \\ \vec{E}_2 = K_e \dfrac{Q_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \tfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \dfrac{12 \cdot 10^{-9}\text{C}}{(1\ \text{m})^2} \times \left(-1\,\vec{i}\right) = -107{,}88\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{E}_{P_2} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 8\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} - 107{,}88\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i} = -99{,}88\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i}$$

$$P_3(0;3):\quad \vec{E}_{P_3}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=K_e\frac{Q_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1}+K_e\frac{Q_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2}\quad \left\{\begin{array}{l} Q_1\,(0;0)\ \text{m}\\ \vec{r}_1=3\ \text{m}\,\vec{j}\\ \vec{u}_{r_1}=\dfrac{\vec{r}_1}{r_1}=\dfrac{3\ \text{m}\,\vec{j}}{3\ \text{m}}=1\,\vec{j}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} Q_2\,(4;0)\ \text{m}\\ \vec{r}_2=\left(3\ \text{m}\,\vec{j}\right)-\left(4\ \text{m}\,\vec{i}\right)=-4\ \text{m}\,\vec{i}+3\ \text{m}\,\vec{j}\\ \vec{u}_{r_2}=\dfrac{\vec{r}_2}{r_2}=\dfrac{-4\ \text{m}\,\vec{i}+3\ \text{m}\,\vec{j}}{\sqrt{4^2+3^2}\ \text{m}}=-\dfrac{4}{5}\,\vec{i}+\dfrac{3}{5}\,\vec{j}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{E}_1=K_e\dfrac{Q_1}{r_1^2}\vec{u}_{r_1}=8{,}99\cdot10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\dfrac{8\cdot10^{-9}\text{C}}{(3\ \text{m})^2}\times1\,\vec{j}=8\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{j}\\ \vec{E}_2=K_e\dfrac{Q_2}{r_2^2}\vec{u}_{r_2}=8{,}99\cdot10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\dfrac{12\cdot10^{-9}\text{C}}{(5\ \text{m})^2}\times\left(-\dfrac{4}{5}\,\vec{i}+\dfrac{3}{5}\,\vec{j}\right)=-3{,}45\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i}+2{,}6\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{j}\end{array}\right.$$

$$\vec{E}_{P_3}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=8\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{j}-3{,}45\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i}+2{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{j}=-3{,}45\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{i}+10{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\vec{j}\quad \left\{\begin{array}{l}\left|\vec{E}_{P_3}\right|=\sqrt{(-3{,}45)^2+(10{,}6)^2}\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}=11{,}15\ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}\\ \alpha=\arctan\dfrac{10{,}6}{-3{,}45}=108^\text{o}\end{array}\right.$$

3) Considera el sistema formado por dos cargas. Una carga +q está en el punto (a; 0) y la otra carga –q en el punto (-a; 0). Determina el campo eléctrico en cualquier punto sobre el eje x que cumpla que x > a. Posteriormente considera el campo eléctrico para puntos en los que x >> a.

Respuesta:

$$\left\{\vec{E}_P=\vec{E}_+ +\vec{E}_-\right\}\quad \left\{\begin{array}{l} P(x;0)\\ q_+\,(a;0)\ \text{m}\\ q_-\,(-a;0)\ \text{m}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{r}_+=(x-a)\,\vec{i}\\ \vec{u}_{r_+}=\dfrac{\vec{r}_+}{|\vec{r}_+|}=\dfrac{(x-a)\,\vec{i}}{|(x-a)|}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\vec{r}_-=\left[x-(-a)\right]\vec{i}=(x+a)\,\vec{i}\\ \vec{u}_{r_-}=\dfrac{\vec{r}_-}{|\vec{r}_-|}=\dfrac{(x+a)\,\vec{i}}{|(x+a)|}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{E}_+=K_e\dfrac{q_+}{|r_+^3|}\vec{r}_+=+\dfrac{K_eq}{|x-a|^3}(x-a)\,\vec{i}\\ \vec{E}_-=K_e\dfrac{q_-}{|r_-^3|}\vec{r}_-=-\dfrac{K_eq}{|x+a|^3}(x+a)\,\vec{i}\end{array}\right\}\quad \vec{E}_P=K_eq\left[\frac{(x-a)}{|x-a|^3}-\frac{(x+a)}{|x+a|^3}\right]\vec{i}$$

$$x>a\quad \left\{\vec{E}_P=K_eq\left[\frac{(x-a)}{|x-a|^3}-\frac{(x+a)}{|x+a|^3}\right]\vec{i}=K_eq\left[\frac{1}{|x-a|^2}-\frac{1}{|x+a|^2}\right]\vec{i}=K_eq\frac{|x+a|^2-|x-a|^2}{|x-a|^2|x+a|^2}\,\vec{i}=K_eq\frac{4ax}{|x^2-a^2|^2}\,\vec{i}\right.$$

$$x\gg a\quad \left\{\vec{E}_P=K_eq\frac{4ax}{|x^2-a^2|^2}\,\vec{i}=K_eq\frac{4a}{x^3}\,\vec{i}\right.$$

**<u>Dipolos Eléctricos</u>**: Un sistema de dos cargas iguales y opuestas, q, separadas por una pequeña distancia, d, se llama un dipolo eléctrico. Su intensidad y orientación se describen por la magnitud momento dipolar eléctrico, que es un vector que se dirige desde la carga negativa hacia la carga positiva y tiene de magnitud el producto $\vec{p}=q\cdot\vec{d}$.

En términos del momento dipolar, el campo eléctrico sobre el eje del dipolo, en un punto a gran distancia sobre el eje x, en sentido de alejamiento de la dirección del momento dipolar, tiene de magnitud:

$$E=\frac{4K_eqa}{|x|^3}=\frac{2K_eq2a}{|x|^3}=\frac{2K_ep}{|x|^3}$$

En cualquier punto alejado de un dipolo, el campo eléctrico es proporcional al momento dipolar y decrece con el cubo de la distancia.

Cuando un sistema tiene una carga neta, el campo eléctrico decrece a largas distancias como $r^{-2}$. En un sistema con carga neta cero, el campo eléctrico decrece más rápidamente con la distancia. En el caso de un dipolo eléctrico el campo decrece con $r^{-3}$.

**<u>Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos</u>**.-

Cuando una partícula cargada se sitúa en un campo eléctrico, experimenta una fuerza eléctrica. Si la fuerza eléctrica es la única fuerza significativa que actúa sobre la partícula, la partícula, de masa m, experimenta una aceleración igual a:

$$\vec{F}_e = +q\vec{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \longrightarrow \\ \vec{F}_e = q\vec{E} \longrightarrow \\ \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} \longrightarrow \end{array} \right\} \qquad \vec{F}_e = -q\vec{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \longrightarrow \\ \vec{F}_e = -q\vec{E} \longleftarrow \\ \vec{a} = -\frac{q}{m}\vec{E} \longleftarrow \end{array} \right\}$$

Si el campo eléctrico se conoce podemos determinar la relación q/m midiendo la aceleración. Este hecho fue usado por Thomson en 1987 para demostrar la existencia de los electrones y medir la relación entre su carga y masa. Ejemplos de aparatos que se basan en el movimiento de los electrones en campos eléctricos son los osciloscopios, los monitores de los computadores y los tubos de televisión.

**Ejemplos de problemas de aplicación**:

1) Un electrón ($q_e$ = -1,6·10$^{-19}$ C; $m_e$ = 9,1·10$^{-31}$ kg) es proyectado al interior de un campo eléctrico uniforme, $E_x$ = 1000 N·C$^{-1}$, con una velocidad inicial $v_{0x}$ = 2·10$^6$ m·s$^{-1}$, en la dirección del campo. Calcula la distancia que recorrerá hasta que momentáneamente alcance la velocidad cero y el tiempo transcurrido.

Respuesta:

Como el electrón tiene carga negativa

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ t = \dfrac{v - v_0}{a} \end{array} \right\} \quad \left\{ \vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m_e} = \frac{q_e\vec{E}}{m_e} = \frac{-1,6\cdot10^{-19}\,C}{9,1\cdot10^{-31}\,kg} \times 1000\,\tfrac{N}{C}\,\vec{i} = -1,76\cdot10^{14}\,\tfrac{m}{s^2}\,\vec{i} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a} = \dfrac{0 - \left(2\cdot10^6\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\times\left(-1,76\cdot10^{14}\,\frac{m}{s^2}\right)} = 0,0114\,m \\ t = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{0 - 2\cdot10^6\,\frac{m}{s}}{-1,76\cdot10^{14}\,\frac{m}{s^2}} = 1,14\cdot10^{-8}\,s \end{array} \right.$$

**Energía potencial electrostática:**

Una carga eléctrica q colocada en un campo electrostático experimenta una fuerza eléctrica que viene dada por $\vec{F}_e = q\vec{E}$.

Si una carga Q es el origen del campo electrostático y la carga q se mueve, debido a la fuerza eléctrica, desde un punto $P_1$ hasta un punto $P_2$. La fuerza eléctrica debida a Q no es constante a lo largo del recorrido, luego el trabajo que realiza sobre q es:

$$dW_{e(por\ el\ campo)} = \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = K_e\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = K_e\frac{Qq}{r^2}\cdot dr$$

$$W_{e(por)} = \left[-K_e\frac{Qq}{r}\right]_1^2 = \left[-K_e\frac{Qq}{r_2} - \left(-K_e\frac{Qq}{r_1}\right)\right] = -\left[K_e\frac{Qq}{r_2} - K_e\frac{Qq}{r_1}\right]$$

Si la carga q se mueve describiendo una trayectoria cerrada, es decir, sale del punto P y vuelve al mismo punto, el trabajo neto es cero:

$$W_{e(por)} = -\left[K_e\frac{Qq}{r_1} - K_e\frac{Qq}{r_1}\right] = 0$$

Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve describiendo un camino cerrado retornando a la posición inicial. Al ser **la fuerza electrostática conservativa** podemos definir en cada punto de un campo electrostático, en el que coloquemos una carga q, **una magnitud escalar llamada energía potencial del campo electrostático** asociada a la carga.

$$W_{e(por)} = -\left[K_e\frac{Qq}{r_2} - K_e\frac{Qq}{r_1}\right] = -\Delta E_{p(e)} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{e(por)} = -\Delta E_{p(e)} \\ E_{p(e)} = K_e\dfrac{Qq}{r} \end{array} \right.$$

**Diferencia de potencial. Potencial Eléctrico**.-

La intensidad del campo electrostático creado por una carga Q, en un punto del espacio, depende del vector de posición de dicho punto:

$$\vec{E} = K_e\frac{Q}{|\vec{r}|^2}\vec{u}_r = K_e\frac{Q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

**El campo electrostático es un campo conservativo** ya que el trabajo realizado por la fuerza electrostática para trasladar una carga no depende de la trayectoria elegida sino de los puntos inicial y final.

$$\left\{dW_{e(por)} = \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = q_0\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dE_{p(e)}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} q_0\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dE_{p(e)} = q_0 dV_e \\ dE_{p(e)} = q_0 dV_e \\ \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV_e \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} W_{e(por)} = -\Delta E_{p(e)} = -q_0\Delta V_e \\ \Delta V_e = \dfrac{\Delta E_{p(e)}}{q_0} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -dV_e = \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ -dV_e = \vec{E} \cdot d\vec{r} = K_e\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = K_e\dfrac{Q}{r^2}dr \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} -\Delta V_e = \left[-K_e\dfrac{Q}{r}\right]_1^2 = -K_e\dfrac{Q}{r_2} + K_e\dfrac{Q}{r_1} = -\left[K_e\dfrac{Q}{r_2} - K_e\dfrac{Q}{r_1}\right] = -\left[V_2 - V_1\right] \\ V = K_e\dfrac{Q}{r} \end{array}\right.$$

Si colocamos una carga testigo $q_0$ en un campo eléctrico, su energía potencial es proporcional a $q_0$. La energía potencial por unidad de carga es una función de la posición de la carga en el espacio y se llama potencial eléctrico. La variación de energía potencial electrostática al cambiar de posición la carga $q_0$ es igual al producto del valor de la carga $q_0$ por la variación del potencial electrostático entre esos dos puntos.

La diferencia de potencial ($V_2$-$V_1$) entre dos puntos $P_2$ y $P_1$ es el negativo del trabajo realizado, por unidad de carga, *por el campo eléctrico* sobre una carga testigo positiva cuando se mueve desde un punto $P_1$ a otro $P_2$. También es ($V_2$-$V_1$) el trabajo positivo, por unidad de carga, que debemos hacer *contra el campo eléctrico* para mover la carga desde $P_1$ a $P_2$.

$$\left\{\begin{array}{l} dW_{e(por\text{-}campo)} = \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = q_0\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dE_{p(e)} = -q_0 dV_e \\ dW_{contra\text{-}campo} = \vec{F}_{aplicada} \cdot d\vec{r} = dE_{p(e)} \end{array}\right\} \left\{\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\Delta E_p}{q_0} = -\frac{W_{por\text{-}campo}}{q_0} = \frac{W_{contra\text{-}campo}}{q_0}\right.$$

**Unidades**: Como el potencial eléctrico es la energía potencial por unidad de carga, la unidad en el SI para el potencial y la diferencia de potencial es joule/coulomb, $J \cdot C^{-1}$, llamada volt V.

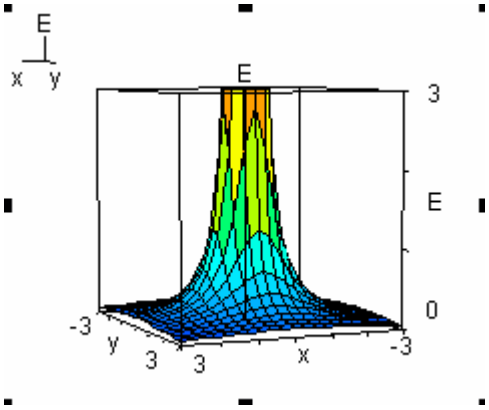
La diferencia de potencial entre dos puntos, medida en voltios, se llama también el voltaje. Una batería de coche tiene 12 V, el terminal positivo tiene un potencial 12 V superior que el terminal negativo.

**<u>Líneas del campo eléctrico</u>**.-

El campo eléctrico se puede representar dibujando líneas que nos indican su dirección. En cualquier punto, el vector campo $\vec{E}$ es tangente a las líneas. Las líneas del campo eléctrico se llaman también líneas de fuerza porque nos demuestran la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga testigo positiva. En cualquier punto próximo a una carga positiva, el campo eléctrico apunta radial en sentido de alejamiento desde la carga. De manera similar, las líneas del campo eléctrico convergen hacia un punto ocupado por una carga negativa.

El **campo eléctrico** producido por una carga, positiva o negativa, de magnitud 1/9 nC situada en el origen de coordenadas, tiene el valor siguiente:

$$\left\{\vec{E} = K_e\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r = K_eQ\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right\} \left\{\begin{array}{l} \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \\ |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ K_e = 9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \\ Q = \frac{1}{9}10^{-9}\,C \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \vec{E} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{9}10^{-9}\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \dfrac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}{\left|x^2 + y^2\right|^{3/2}} = \dfrac{x}{\left|x^2 + y^2\right|^{3/2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\left|x^2 + y^2\right|^{3/2}}\vec{j} \\ E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\dfrac{x^2}{\left[x^2 + y^2\right]^3} + \dfrac{y^2}{\left[x^2 + y^2\right]^3}} \end{array}\right.$$



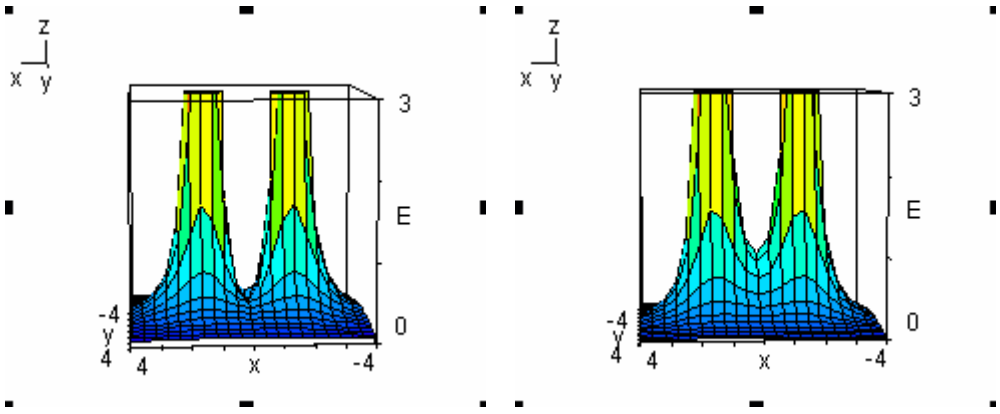

El Campo eléctrico, sobre los puntos del plano XY, producido por dos cargas situadas en el eje x, una en el punto (-a; 0) y la otra en el punto (+a; 0):

$$\vec{E}_P = \vec{E}_- + \vec{E}_+ \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{E}_- = K_e \dfrac{Q_-}{|\vec{r}_-|^3}\vec{r}_- \\ \vec{E}_+ = K_e \dfrac{Q_+}{|\vec{r}_+|^3}\vec{r}_+ \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} P(x;y)\left\{\begin{array}{l} Q_- \ (-a;0)\ m \\ Q_+ \ (a;0)\ m \end{array}\right\} \\ \vec{r}_- = \left[x-(-a)\right]\vec{i}+(y-0)\vec{j} \\ \vec{r}_+ = (x-a)\,\vec{i}+y\,\vec{j} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} |\vec{r}_-|^3 = \left|(x+a)^2+y^2\right|^{3/2} \\ |\vec{r}_+|^3 = \left|(x-a)^2+y^2\right|^{3/2} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E}_- = K_e \dfrac{Q_-}{|\vec{r}_-|^3}\vec{r}_- = \dfrac{K_e Q_-}{\left|(x+a)^2+y^2\right|^{3/2}}(x+a)\,\vec{i}+y\,\vec{j} = \dfrac{K_e Q_-(x+a)}{\left|(x+a)^2+y^2\right|^{3/2}}\,\vec{i}+\dfrac{K_e Q_- y}{\left|(x+a)^2+y^2\right|^{3/2}}\,\vec{j} \\ \vec{E}_+ = K_e \dfrac{Q_+}{|\vec{r}_+|^3}\vec{r}_+ = \dfrac{K_e Q_+}{\left|(x-a)^2+y^2\right|^{3/2}}(x-a)\,\vec{i}+y\,\vec{j} = \dfrac{K_e Q_+(x-a)}{\left|(x-a)^2+y^2\right|^{3/2}}\,\vec{i}+\dfrac{K_e Q_+ y}{\left|(x-a)^2+y^2\right|^{3/2}}\,\vec{j} \end{array}\right.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+ = \left[\frac{K_e Q_-(x+a)}{\left|(x+a)^2+y^2\right|^{3/2}} + \frac{K_e Q_+(x-a)}{\left|(x-a)^2+y^2\right|^{3/2}}\right]\vec{i} + \left[\frac{K_e Q_- y}{\left|(x+a)^2+y^2\right|^{3/2}} + \frac{K_e Q_+ y}{\left|(x-a)^2+y^2\right|^{3/2}}\right]\vec{j}$$

Representación del campo eléctrico producido por dos cargas situadas en el eje x; (-1,5 m; 0) y a (+1,5 m; 0). Las dos positivas y una positiva y otra negativa.




Las reglas para dibujar las líneas del campo eléctrico son:

1. Las líneas del campo eléctrico comienzan sobre las cargas positivas y terminan sobre las cargas negativas.
2. Las líneas de dibujan simétricamente entrando y saliendo de un carga aislada.
3. El número de líneas que salen de una carga positiva o que entran en una carga negativa es proporcional a la magnitud de la carga.
4. La densidad de las líneas, el número de líneas por unidad de área perpendicular a las líneas, en cualquier punto es proporcional a la magnitud del campo en aquel punto.
5. A grandes distancias desde un sistema de cargas, las líneas del campo son radiales y están igualmente espaciadas, como si vinieran desde una carga puntual igual a la carga neta del sistema.
6. Las líneas del campo no se cruzan. Si dos líneas del campo se cruzan, indicaría dos direcciones para E en el punto de intersección.

**Potencial y líneas del campo eléctrico**: Al colocar una carga positiva $q_0$ en un campo eléctrico y dejarla en libertad, siente la fuerza eléctrica y acelera en la dirección del campo. Como la energía cinética de la carga se incrementa, su energía potencial eléctrica disminuye, de la misma forma que una masa sufre la caída hacia la región en la que disminuye la energía potencial gravitatoria.

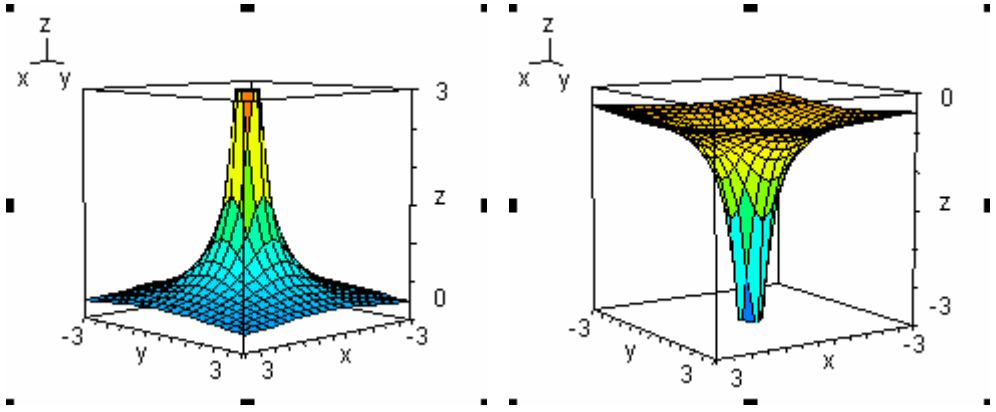
Resumiendo: El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga positiva disminuye la energía potencial electrostática. Por tanto, las líneas del campo eléctrico apuntan en la dirección en la que decrece el potencial eléctrico.

**Potencial electrostático de una distribución de cargas puntuales:** Si tenemos una distribución de cargas puntuales ($Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, …, $Q_n$), el potencial electrostático en un punto es la suma de los potenciales debidos a cada una de las cargas

$$V_e = V_1 + V_2 + \ldots = K_e\frac{Q_1}{r_1} + K_e\frac{Q_2}{r_2} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} K_e\frac{Q_i}{r_i}$$

**Potencial electrostático** de una carga, positiva o negativa, situada en el origen de coordenadas y de valor absoluto 1/9 nC:

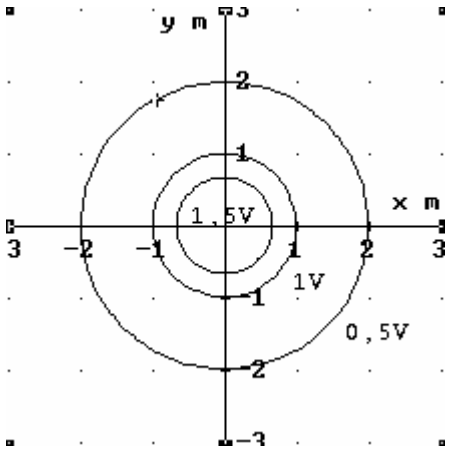
$$\left.\begin{array}{l} Q\,(0;0)\ \text{m} \\ P\,(x;y) \\ \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \\ |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \quad V_P = K_e \frac{Q}{|\vec{r}|} = K_e \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \left\{\begin{array}{l} V_+ = 9\cdot 10^9 \dfrac{\frac{1}{9}10^{-9}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ V_- = 9\cdot 10^9 \dfrac{-\frac{1}{9}10^{-9}}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} V_+ = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ V_- = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$$




**Superficies equipotenciales**.-

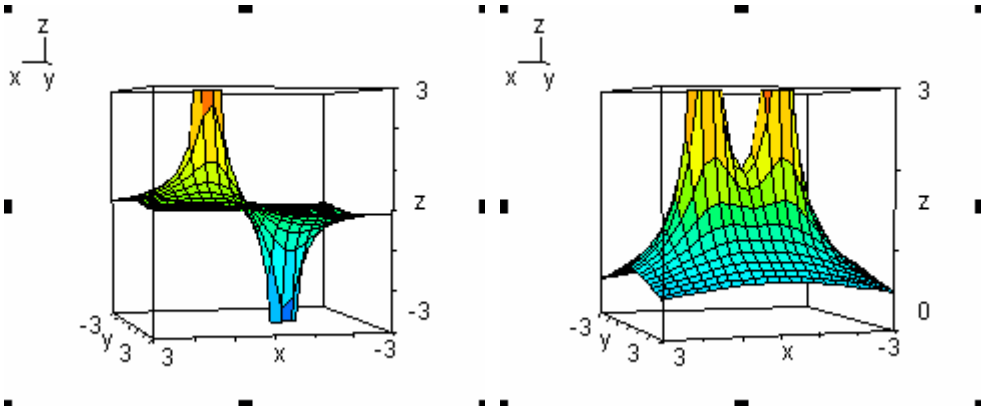
**Sobre una superficie equipotencial** el potencial es constante, el cambio en el potencial V cuando una carga testigo experimenta un desplazamiento $d\vec{r}$ paralelo a la superficie es $dV_e = -\vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ . Por tanto, las líneas del campo eléctrico que emanan de la superficie equipotencial deben ser perpendiculares a la superficie.

En la figura siguiente están representadas las superficies equipotenciales de una carga, situada en el origen, de valor absoluto 1/9 nC:

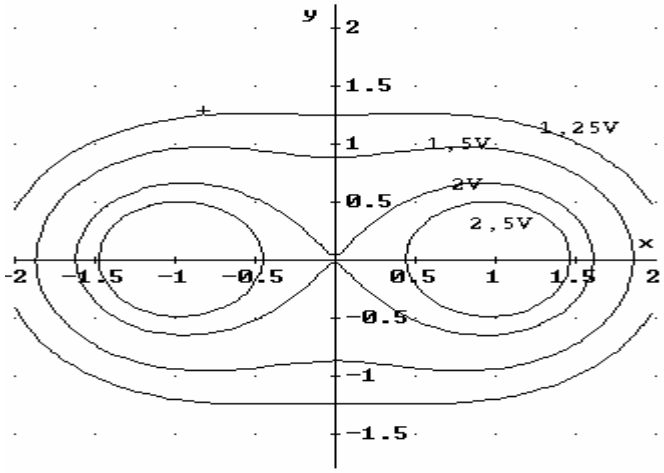



**Potencial electrostático** de dos cargas de valor absoluto 1/9 nC situadas en el eje x. En primer lugar, una negativa en el punto -1 m y la otra positiva en el punto +1 m. En segundo lugar las dos positivas:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P(x;y) \\ Q_1\,(-1;0)\ \text{m} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} P(x;y) \\ Q_2\,(1;0)\ \text{m} \end{array}\right\} \\ \vec{r}_1 = (x+1)\,\vec{i} + y\,\vec{j} \\ \vec{r}_2 = (x-1)\,\vec{i} + y\,\vec{j} \\ V_1 = K_e \dfrac{Q_1}{r_1} = K_e \dfrac{Q_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \\ V_2 = K_e \dfrac{Q_2}{r_2} = K_e \dfrac{Q_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} V_P = V_1 + V_2 = K_e \dfrac{Q_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + K_e \dfrac{Q_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \\ V_P = V_1 + V_2 = 9\cdot 10^9 \dfrac{\left(-\frac{1}{9}10^{-9}\right)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + 9\cdot 10^9 \dfrac{\frac{1}{9}10^{-9}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \\ V_P = -\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \end{array}\right.$$

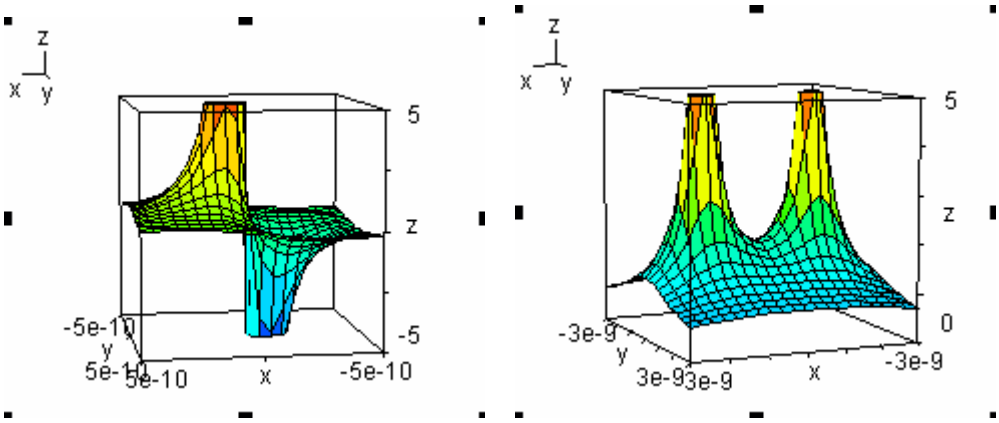



**Superficie equipotencial** de dos cargas positivas de valor absoluto 1/9 nC situadas en el eje x, una en el punto -1 m y la otra en el punto 1 m:




**Potencial electrostático** de un electrón y un protón situados sobre el eje x a una distancia de 100 pm. Y **potencial electrostático** de dos protones situados sobre el eje x a una distancia de 3 nm:

$$\begin{cases} V_{ep} = V_e + V_p = -9\cdot10^9 \dfrac{1,6\cdot10^{-19}}{\sqrt{\left(x+50\cdot10^{-12}\right)^2+y^2}} + 9\cdot10^9 \dfrac{1,6\cdot10^{-19}}{\sqrt{\left(x-50\cdot10^{-12}\right)^2+y^2}} \\ V_{pp} = V_p + V_p = 9\cdot10^9 \dfrac{1,6\cdot10^{-19}}{\sqrt{\left(x+1,5\cdot10^{-9}\right)^2+y^2}} + 9\cdot10^9 \dfrac{1,6\cdot10^{-19}}{\sqrt{\left(x-1,5\cdot10^{-9}\right)^2+y^2}} \end{cases}$$




**<u>Energía electrostática y capacidad eléctrica</u>**.-

Cuando traemos una carga puntual $q_0$ desde una zona alejada a una región donde hay otras cargas debemos hacer un trabajo contra el campo eléctrico creado por las otras cargas. El trabajo realizado se almacena como energía potencial electrostática, por lo que la energía potencial electrostática de un sistema de cargas es el trabajo total necesario para ensamblar el sistema.

Cuando la carga se coloca sobre un conductor aislado, el potencial del conductor se incrementa. La relación de la carga al potencial se llama **capacidad eléctrica del conductor**. Un dispositivo útil para almacenar carga y energía es el condensador, que consiste en dos conductores, próximos en el espacio pero aislados entre sí.

$$\begin{cases} W_{\text{contra-campo}} = q_0\Delta V = q_0\left(V_f - V_i\right) = \Delta E_p \\ W_{\text{por-campo}} = -\Delta E_p \end{cases}$$

Suponemos que tenemos una carga puntual $q_1$, situada en la posición $r_1$, el potencial en el punto $r_2$, siendo $\left|\vec{r}_2\right| = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$, es $V_2 = K_e\dfrac{q_1}{r_2}$.

Si traemos una segunda carga $q_2$ desde una distancia infinita a la posición $r_2$, debemos realizar un trabajo contra el campo eléctrico:

$$W_{2(\text{contra-campo})} = q_2\Delta V = q_2\left(V_{21} - V_\infty\right) = q_2\left(V_{21} - 0\right) = q_2K_e\frac{q_1}{r_{21}} = K_e\frac{q_2q_1}{r_{21}}.$$

Si traemos una tercera carga $q_3$ desde una distancia infinita a la posición $r_3$, debemos realizar un trabajo contra el campo eléctrico producido por $q_1$ y $q_2$:

$$W_{3(\text{contra-campo})} = \Delta E_p = q_3\left(V - 0\right) = q_3V = q_3\left(V_{31} + V_{32}\right) = q_3\left(K_e\frac{q_1}{r_{31}} + K_e\frac{q_2}{r_{32}}\right) = K_e\frac{q_3q_1}{r_{31}} + K_e\frac{q_3q_2}{r_{32}}$$

El trabajo total requerido para ensamblar las tres cargas es la energía potencial del sistema de tres cargas:

$$W_{\text{total(contra-campo)}} = W_2 + W_3 = q_2V_{21} + q_3\left(V_{31} + V_{32}\right) = q_2V_{21} + q_3V_{31} + q_3V_{32}$$
$$W_{\text{total(contra-campo)}} = \Delta E_p = q_2V_{21} + q_3V_{31} + q_3V_{32}$$

La energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para traer las cargas desde una separación infinita a sus posiciones finales.

$$E_p = q_2V_{21} + q_3V_{31} + q_3V_{32} = q_2K_e\frac{q_1}{r_{21}} + q_3K_e\frac{q_1}{r_{31}} + q_3K_e\frac{q_2}{r_{32}} = K_e\frac{q_2q_1}{r_{21}} + K_e\frac{q_3q_1}{r_{31}} + K_e\frac{q_3q_2}{r_{32}}$$

$$E_p = K_e\frac{q_2q_1}{r_{21}} + K_e\frac{q_3q_1}{r_{31}} + K_e\frac{q_3q_2}{r_{32}} = E_{p(12)} + E_{p(13)} + E_{p(23)}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left(E_{p(12)} + E_{p(13)} + E_{p(23)} + E_{p(21)} + E_{p(31)} + E_{p(32)}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(E_{p(12)} + E_{p(13)}\right) + \left(E_{p(23)} + E_{p(21)}\right) + \left(E_{p(31)} + E_{p(32)}\right)\right]$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left[q_1\left(K_e\frac{q_2}{r_{12}} + K_e\frac{q_3}{r_{13}}\right) + q_2\left(K_e\frac{q_1}{r_{21}} + K_e\frac{q_3}{r_{23}}\right) + q_3\left(K_e\frac{q_1}{r_{31}} + K_e\frac{q_2}{r_{32}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iV_i$$

Se demuestra que la energía potencial electrostática de un sistema de n cargas puntuales es $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iV_i$, donde $V_i$ es el potencial en la localización de la carga $q_i$ debido a todas las otras cargas. La ecuación anterior describe también la energía potencial electrostática de una distribución de carga continua. Si consideramos un conductor esférico de radio R, y la esfera tiene una carga q, su potencial relativo al potencial cero, V = 0; en el infinito es $V = K_e{\cdot}q/R$. El trabajo necesario para traer una cantidad de carga adicional dq desde el infinito al conductor es $V{\cdot}dq$. Este trabajo es igual al incremento en la energía potencial del conductor $dE_p$. La energía potencial total $E_p$ se obtiene considerando que la carga añadida va desde cero hasta alcanzar el valor Q, siendo $V = K_e{\cdot}Q/R$ el potencial sobre la superficie de la esfera cargada.

$$V_{\text{esfera}} = K_e\frac{q}{R} \quad \begin{cases} dW_{\text{sobre}} = Vdq = K_e\dfrac{q}{R}dq = dE_p \\ E_p = K_e\dfrac{Q^2}{2R} = \dfrac{1}{2}QV \end{cases}$$

Aunque la ecuación anterior se ha obtenido para un conductor esférico es válida para cualquier conductor. El potencial de cualquier conductor es proporcional a su carga q, por lo que $V = k{\cdot}q$, siendo k una constante. El trabajo necesario para traer una carga adicional, dq, desde el infinito al conductor es $V{\cdot}dq = k{\cdot}q{\cdot}dq$; y el trabajo total necesario para colocar una carga Q sobre el conductor es $\frac{1}{2}k{\cdot}Q^2 = \frac{1}{2}QV$. Si tenemos una serie de n conductores siendo $V_i$ el potencial del conductor i que lleva una carga $Q_i$, la energía potencial electrostática es $E_p = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Q_iV_i$.

**Problemas de aplicación**:

1) Considera los puntos A, B, C y D que están en los extremos de un cuadrado de lado d. Calcula el trabajo necesario para colocar una carga positiva q en cada extremo del cuadrado.

Respuesta:

Para colocar la primera carga en el punto A no se realiza trabajo ya que el potencial en ese punto es cero cuando las otras tres cargas están en el infinito: $W_A = 0$

Para colocar la segunda carga en el punto B el trabajo requerido es $W_B = q \cdot V_B$, siendo $V_B$ el potencial en B debido a la primera carga en A a una distancia d:

$$W_B = qV_B = q\frac{K_e q}{d} = \frac{K_e q^2}{d}.$$

Para colocar la tercera carga en el punto C el trabajo requerido es $W_C = q \cdot V_C$, siendo $V_C$ el potencial en C debido a la carga q en A (a la distancia $2^{½} \cdot d$) y a la carga q en B (a la distancia d):

$$W_C = qV_C = q\left(V_{C,A} + V_{C,B}\right) = q\left(\frac{K_e q}{\sqrt{2}d} + \frac{K_e q}{d}\right) = \frac{K_e q^2}{\sqrt{2}d} + \frac{K_e q^2}{d}$$

Para colocar la cuarta carga en el punto D el trabajo requerido es $W_D = q \cdot V_D$, siendo $V_D$ el potencial en D debido a la carga q en A (a la distancia d), a la carga q en B (a la distancia $2^{½} \cdot d$) y a la carga q en C (a la distancia d):

$$W_D = qV_D = q\left(V_{D,A} + V_{D,B} + V_{D,C}\right) = q\left(\frac{K_e q}{d} + \frac{K_e q}{\sqrt{2}d} + \frac{K_e q}{d}\right) = \frac{2K_e q^2}{d} + \frac{K_e q^2}{\sqrt{2}d}$$

El trabajo total será igual:

$$W_{total} = W_A + W_B + W_C + W_D = 0 + \left(\frac{K_e q^2}{d}\right) + \left(\frac{K_e q^2}{\sqrt{2}d} + \frac{K_e q^2}{d}\right) + \left(\frac{2K_e q^2}{d} + \frac{K_e q^2}{\sqrt{2}d}\right)$$

$$W_{total} = 4\frac{K_e q^2}{d} + 2\frac{K_e q^2}{\sqrt{2}d} = \left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\frac{K_e q^2}{d}$$

Utilizando la ecuación: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$

$$W_{total} = E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i = \frac{1}{2}q_A V_{A,BCD} + \frac{1}{2}q_B V_{B,CDA} + \frac{1}{2}q_C V_{C,DAB} + \frac{1}{2}q_D V_{D,ABC}$$

$$W_{total} = E_p = 4\frac{1}{2}q\left(\frac{K_e q}{d} + \frac{K_e q}{d} + \frac{K_e q}{\sqrt{2}d}\right) = 4\frac{K_e q^2}{d} + 2\frac{K_e q^2}{\sqrt{2}d} = \left(4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\frac{K_e q^2}{d}$$

**Capacidad eléctrica**.-

El potencial (relativo a potencial cero en el infinito) de un conductor aislado llevando una carga Q es proporcional a la carga Q, y depende del tamaño y forma del conductor. En general, mientras mayor es el conductor, mayor es la cantidad de carga que puede transportar para un potencial dado. Por ejemplo, el potencial de un conductor esférico de radio R transportando una carga Q es $V = K_e \cdot Q/R$. La relación de la carga Q al potencial V de un conductor aislado se llama su capacidad eléctrica C: $C = Q/V$.

La capacidad eléctrica es una medida de la capacidad de almacenar carga para una diferencia de potencial dada. Como el potencial es siempre proporcional a la carga esta relación no depende de cualquier magnitud Q ó V, sino sólo de la forma y tamaño del conductor.

Consideremos una esfera conductora, de radio R, que contiene una carga $Q_{libre}$ y rodeada del vacío, en primer lugar, y de un dieléctrico, $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, posteriormente. La relación entre la carga $Q_{libre}$ y el **potencial eléctrico**, en cada caso, en la superficie de la esfera conductora es constante e independiente de la carga libre

$$\left\{V_0 = \frac{Q_{libre}}{4\pi\varepsilon_0 R}\right\} \quad C_0 = \frac{Q_{libre}}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$\left\{V = \frac{Q_{libre}}{4\pi\varepsilon R}\right\} \quad C = \frac{Q_{libre}}{V} = 4\pi\varepsilon R = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R$$

La unidad de capacidad eléctrica es el farad (F) en honor de Michael Faraday: 1 F = 1 C/V. La constante $\varepsilon_0$ es la permitividad del vacío cuyo valor es $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

**Condensadores**.-

Un sistema de dos conductores, llamados armaduras, que llevan cargas iguales pero opuestas se llama condensador. Un condensador se carga usualmente por la transferencia de una carga Q desde un conductor a otro, quedando uno de los conductores con una carga +Q y el otro con una carga –Q. La capacidad del condensador se define por Q/V, donde Q es la magnitud de la carga sobre cualquier conductor y V es la magnitud de la diferencia de potencial entre los conductores. Para calcular la capacidad, colocamos cargas iguales y opuestas sobre los conductores y determinamos la diferencia de potencial, para lo que hemos de obtener primero el campo eléctrico entre ellos (V = E·d).

**Condensador de armaduras paralelas**: Es un condensador formado por dos conductores planos paralelos, de área A, cada uno, separados una distancia d y cargados con +Q y -Q. La capacidad del sistema depende de si hay entre los conductores hay vacío $\varepsilon_0$ o un dieléctrico $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ :

$$E_0 = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0}\left\{C_0 = \frac{Q_{libre}}{\Delta V_0} = \frac{\sigma_{libre}\cdot A}{E_0\cdot d} = \varepsilon_0\frac{A}{d}\right.$$

$$E = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon}\quad\left\{C = \frac{Q_{libre}}{\Delta V} = \frac{\sigma_{libre}\cdot A}{E\cdot d} = \varepsilon\frac{A}{d} = \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d} = \varepsilon_r C_0\right.$$

Al ser la constante dieléctrica de un medio $\varepsilon_r$ mayor que uno, si se introduce un dieléctrico entre las armaduras de un condensador observamos tres efectos: a) disminuye el campo eléctrico en su interior respecto del vacío ($E < E_0$); b) disminuye la diferencia de potencial entre las armaduras ($V < V_0$), y c) aumenta la capacidad del condensador ($C > C_0$).

**Energía almacenada en un condensador cargado:** Cuando un condensador se está cargando, se transfiere carga positiva desde el conductor cargado negativamente al conductor cargado positivamente. Por lo que debe realizarse trabajo para cargar un condensador. Este trabajo se almacena como energía potencial electrostática.

Cargar un conductor requiere gastar energía debido a que hay que vencer la repulsión entre las cargas y, por tanto, hay que hacer un trabajo sobre el sistema. Éste trabajo se manifiesta en el incremento de la energía potencial del conductor. Supongamos que, en un instante dado, una carga q' se ha transferido desde un plato a otro. La diferencia de potencial V' entre los platos en ese instante será q'/C. Si un incremento extra de carga dq' se transfiere entonces el incremento de trabajo necesario será

$$W_{contra-campo} = \Delta E_{p(e)}\quad\begin{cases} dW = V'dq' = \dfrac{q'}{C}dq' \\ W_{contra} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2}QV \end{cases}$$

**Problemas de ejemplo**:

1) Un condensador de 15 μF se carga a 60 V. Determina la energía almacenada.

Respuesta:

$$W_{contra-campo} = \Delta E_{p(e)}$$

$$W_{contra} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\times 15\cdot 10^{-6}\,\text{F}\times(60\,\text{V})^2 = 0{,}027\ \text{J}$$

2) Un condensador de armaduras paralelas tiene las armaduras cuadradas de lado 10 cm y separadas 1 mm. Calcula la capacidad de este condensador. Si este condensador se carga a 12 V determina la carga que se transfiere de un armadura a otra.

Respuesta:

$$C_0 = \frac{Q_{libre}}{\Delta V_0} = \varepsilon_0\frac{A}{d} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{\text{F}}{\text{m}}\times\frac{(0{,}1\ \text{m})^2}{0{,}001\ \text{m}} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{F}$$

$$Q_{libre} = C_0\cdot\Delta V_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{F}\times 12\ \text{V} = 1{,}06\cdot 10^{-10}\ \text{C}$$

**Asociación de condensadores: serie y paralelo.-** Los condensadores en un circuito se pueden combinar de distintas formas, las más sencillas son en serie y en paralelo. Ahora vamos a calcular el condensador equivalente a una combinación determinada, es decir, la capacidad de un único condensador que tenga la misma capacidad que la combinación dada de condensadores.

**Serie:** Consideremos dos condensadores de distinta capacidad, $C_1$ y $C_2$, conectados en serie a una batería, que mantiene una diferencia de potencial V que cruza los terminales de la combinación en serie. Esto produce las diferencias de potenciales $V_1$ y $V_2$ en los condensadores $C_1$ y $C_2$. Al estar en serie la carga de cada uno es la misma, pero como tienen distinta capacidad la diferencia de potencial entre los extremos de cada uno es distinta. Luego el condensador equivalente a los dos ha de tener la misma carga de cualquiera de ellos y la

diferencia de potencial entre sus extremos ha de ser igual a la suma de las diferencias de potencial de cada uno

$$\Delta V_{total} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad \left\{ \frac{Q_{total}}{C_{total}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}} \right\} \quad \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}}$$

**Paralelo:** Consideremos dos condensadores de distinta capacidad, $C_1$ y $C_2$, conectados en paralelo a una batería. Los terminales de la batería están conectados a los platos de los dos condensadores. Como la batería mantiene una diferencia de potencial V entre los terminales, aplica la misma diferencia de potencial V a cada condensador. Al estar en paralelo la diferencia de potencial entre los extremos de cada uno es la misma, pero como tienen distinta capacidad la carga sobre cada uno es distinta. Luego el condensador equivalente a los dos ha de tener la misma carga de los dos y la diferencia de potencial entre sus extremos ha de ser igual a la de cada uno.

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 \quad \left\{ C_{eq}\Delta V = C_1\Delta V + C_2\Delta V \right\} \quad C_{eq} = C_1 + C_2$$

**Corriente eléctrica**.-

La corriente eléctrica se define como la velocidad del flujo de cargas eléctricas a través de un área perpendicular. Por convención la dirección de la corriente se considera la dirección del flujo de la carga positiva. Esta convención se estableció antes de que se conociera que los electrones libres son las partículas que se mueven en un alambre conductor. Por lo que los electrones se mueven en la dirección opuesta a la dirección de la corriente. En un acelerador que produce un chorro de protones, la dirección del movimiento de los protones cargados positivamente se produce en la dirección de la corriente.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

La unidad de corriente eléctrica es el ampere (A): 1 A = 1 C/s.

En un alambre, por el que pasa la corriente, el movimiento de los electrones es muy complejo. Cuando no hay campo eléctrico en el alambre, los electrones libres se mueven en direcciones al azar con velocidades del orden de $10^6$ m/s. Aunque los vectores velocidad de los electrones se orientan al azar, su velocidad promedio es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico un electrón experimenta una aceleración debida a la fuerza y adquiere una velocidad adicional en la dirección opuesta al campo. Sin embargo, la energía cinética adquirida se disipa rápidamente por las colisiones con la red de iones del alambre y el electrón es, de nuevo, acelerado contra el campo. El resultado neto de esta aceleración y disipación de energía, de forma repetida, es que el electrón tiene una velocidad promedio pequeña llamada su **velocidad a la deriva** opuesta al campo eléctrico.

Sea **n** el número de partículas libres transportadoras de carga por unidad de volumen, en un alambre conductor de sección A. Llamamos n la **densidad** de transportadores de carga y consideramos que cada partícula lleva una carga q y se mueve con una velocidad a la deriva $v_d$. En un intervalo de tiempo $\Delta t$ todas las partículas en el volumen $Av_d\Delta t$ pasan a través del elemento de área. El número de partículas en este volumen es $nAv_d\Delta t$, y la carga total es $\Delta Q = nqAv_d\Delta t$. La corriente es $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d$.

**Resistencia y Ley de Ohm**.-

La corriente en un conductor tiene su origen en un campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del conductor, que ejerce una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre las cargas libres. En equilibrio electrostático, el campo eléctrico debe ser cero dentro de un conductor, pero cuando un conductor transporta una corriente no se encuentra en equilibrio electrostático y la carga libre se mueve a la deriva por el conductor conducida por el campo eléctrico. El campo eléctrico nos da la dirección de la fuerza sobre una carga positiva y la dirección de la corriente.

Si consideramos un alambre conductor de longitud $\Delta r$ y de sección de área A por la que pasa una corriente I. El campo eléctrico apunta en la dirección en la que disminuye el potencial. Considerando que la longitud es tan pequeña que podemos considerar que el campo eléctrico es constante:

$$dV_e = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \begin{cases} V_a > V_b \\ V_a - V_b = E \cdot \Delta r \end{cases}$$

La relación del descenso de potencial (potencial decreciente) dividido por la corriente se llama **resistencia** del segmento: $R = \frac{V_a - V_b}{I}$

La unidad de resistencia se llama ohm (1 $\Omega$ = 1V/A)

Para muchos materiales, la resistencia no depende del descenso de potencial o de la corriente. Estos materiales incluyen muchos metales y se llaman materiales óhmicos. Para estos materiales óhmicos el descenso de potencial que cruza un segmento es proporcional a la corriente.

$V_a - V_b = IR \quad (R = cte)$.

Para los materiales no-óhmicos, la resistencia depende de la corriente I, por lo que V no es proporcional a I. Para los materiales óhmicos la relación entre la corriente y el voltaje, I-V, es lineal y para los materiales no-óhmicos la relación es no lineal. Por lo que la ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza, como las leyes de Newton, es una descripción empírica de una propiedad compartida por muchos materiales.

La resistencia de un alambre conductor se comprueba que es proporcional a la longitud del alambre e inversamente proporcional al área de la sección del alambre $R = \rho \frac{L}{A}$, donde la constante de proporcionalidad es la resistividad del material conductor. La resistividad depende del material y de la temperatura, los metales tienen menos resistividad y a bajas temperaturas disminuye. Los alambres eléctricos se venden en tamaños estándar, el diámetro de la sección circular se indica por un número.

**La energía en los circuitos eléctricos**.-

Cuando se aplica un campo eléctrico en un conductor, los electrones libres se aceleran en un intervalo de tiempo pequeño, con lo que se incrementa su energía cinética; pero debido a las colisiones de los electrones con la red de iones del conductor, esta energía adicional cinética rápidamente se convierte en energía térmica. El incremento en energía térmica en un conductor se llama calor de Joule.

Si consideramos un segmento del alambre de longitud L, siendo el área de la sección perpendicular A. En un intervalo de tiempo, la cantidad de carga que entra en el segmento, por la parte de potencial $V_1$, es la misma cantidad de carga saliente, por la parte de potencial $V_2$. El efecto es como si la misma carga que entra en el segmento a un potencial alto $V_1$ sale a un potencial bajo $V_2$ ($V_1 > V_2$). El cambio en la energía potencial de la carga pasando a través del segmento es: $\Delta E_p = \Delta Q(V_2 - V_1) = -\Delta Q(V_1 - V_2)$. La energía potencial disminuye en este segmento del alambre $-\Delta E_p = \Delta Q(V_1 - V_2)$, siendo la velocidad de pérdida de energía la potencia disipada

$$\frac{-\Delta E_p}{\Delta t} = \frac{\Delta Q(V_1 - V_2)}{\Delta t} = I(V_1 - V_2)$$
$$P = I(V_1 - V_2)$$

**Fuerza electromotriz y baterías**.-

Para mantener una corriente eléctrica en un conductor hemos de suministrar energía eléctrica. Un aparato que suministra energía eléctrica se llama fuente de fem (fuerza electromotriz). Ejemplo de fuente es una batería, que convierte energía química en energía eléctrica, y un generador, que transforma energía mecánica en energía eléctrica. Una **fuente de fem** realiza trabajo sobre la carga al pasar a través de ella, cambiando la energía potencial de la carga. El trabajo por unidad de carga se llama **fem** de la fuente **E**. La unidad de fem es el volt, la misma que la unidad de diferencia de potencial.

Una **batería ideal** es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre dos terminales, independientemente de la velocidad de flujo de carga entre ellos. La diferencia entre los terminales de una **batería ideal** es igual en magnitud a la fem de la batería.

Un circuito sencillo está formado por una resistencia R conectada a una batería ideal. La batería se representa por dos barras, la más larga es el positivo y la menor el negativo. La resistencia se representa por una línea quebrada. Las líneas rectas nos indican el alambre conectando la resistencia a la batería. La fuente de fem mantiene una diferencia de potencial constante igual a la fem E de la batería. La diferencia de potencial en los extremos de la resistencia es igual en magnitud a la fem, y la corriente en la resistencia es igual a I = E/R.

La dirección de la corriente en el circuito exterior va desde el terminal positivo (a más potencial) al terminal negativo (a menos potencial). Dentro de la fuente de fem, la carga fluye desde una región a bajo potencial a otra a alto potencial, por lo que gana energía potencial. Cuando la carga Q fluye a través de la fuente de fem E, su energía potencial se incrementa por la cantidad Q·E. La carga entonces fluye pasando a través de la resistencia donde la energía potencial se transforma en energía térmica. La velocidad a la que la fuente de fem suministra energía es la potencia P = Q·E/t = I·E. La potencia suministrada por la fuente de fem es igual a la disipada por la resistencia.

Una fuente de fem podemos pensar que es una bomba de carga que bombea la carga desde una región de baja energía potencial eléctrica a una región de alta energía potencial eléctrica.

En una **batería real** la diferencia de potencial que cruza los terminales de la batería, llamada el **voltaje terminal**, no es simplemente igual a la fem de la batería. Consideremos un circuito sencillo con una batería y una resistencia. Si variamos la corriente variando la resistencia R y medimos el voltaje terminal nos

encontramos que decrece lentamente cuando la corriente se incrementa, como si hubiera una pequeña resistencia dentro de la batería. Por lo que podemos considerar que una batería real está formada por una batería ideal de fem E más una pequeña resistencia r, llamada la **resistencia interna** de la batería. El circuito formado por una batería real y una resistencia tendría una resistencia interna siendo el voltaje terminal $V_a - V_b = E - I\cdot r$. La caída de potencial que cruza la resistencia R es $I\cdot R = V_a - V_b = E - I\cdot r$

$$I = \frac{E}{R + r}$$

**Combinación de resistencias en un circuito**.-

El análisis de un circuito, con varias resistencias, se puede simplificar considerando que todas ellas equivalen a una o dos, por las que pasa la misma corriente y con la misma caída de potencial.

**Resistencias en serie**: Cuando dos o más resistencias están conectadas en serie, por ellas pasa la misma corriente. La caída de potencial que cruza cada una de ellas es I·R. por lo que la caída de potencial que las cruza a todas es la suma de la caída de potencial que cruza a cada una:

$$V_a - V_b = IR_1 + IR_2 + \ldots = I\left(R_1 + R_2 + \ldots\right) = IR_{eq}$$

**Resistencias en paralelo**: Dos resistencias que están conectadas en paralelo las cruza la misma diferencia de potencial. Las resistencias están conectadas a los mismos extremos por alambres. La corriente que pasa por cada una de ellas resulta de la separación de la corriente total, siendo esta la suma de las corrientes individuales

$$\left.\begin{aligned} &I = I_1 + I_2 \\ &V_a - V_b = I_1R_1 = I_2R_2 \\ &V_a - V_b = IR_{eq} \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} &I = \frac{V_a - V_b}{R_{eq}} = I_1 + I_2 = \frac{V_a - V_b}{R_1} + \frac{V_a - V_b}{R_2} \\ &\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{aligned}\right.$$

**Circuitos multimalla: reglas de Kirchhoff.**.-

Al recorrer cualquier malla de un circuito cerrado, la suma algebraica de los cambios de potencial debe ser igual a cero.

En cualquier nudo en un circuito donde la corriente puede dividirse, la suma de las corrientes que entran debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del nudo.

**Problemas propuestos de Electricidad**

**1)** Un objeto pequeño tiene una masa de $2{,}0\cdot10^{-3}$ kg y una carga negativa de $-2{,}5\cdot10^{-5}$ C. Está situado en un cierto lugar donde hay un campo eléctrico. Cuando se libera, el objeto experimenta una aceleración de 3,5 km/s$^2$ en la dirección del eje positivo OX (+X). Determina la dirección y la magnitud del campo eléctrico. [$2{,}8\cdot10^5$N/C en dirección -OX]

**2)** Tenemos tres cargas puntuales con los siguientes valores y posiciones en el espacio: $+3{,}0\cdot10^{-6}$ C, $-4{,}0\cdot10^{-6}$ C y $-7{,}0\cdot10^{-6}$ C, situadas respectivamente en los puntos de coordenadas, en metros, (0;0), (-0,20;0) y (0,15;0). Determina la magnitud y la dirección de la fuerza electrostática neta sobre la carga primera. [5,7 N en + OX]

**3)** Dos cargas positivas, de $16\cdot10^{-6}$ C y $4{,}0\cdot10^{-6}$ C, están separadas por una distancia de 3,0 m. Encuentra el punto sobre la línea entre las cargas donde el campo electrostático es cero. [a 1 m de la menor]

**4)** Un triángulo equilátero tiene de lado 0,15 m y en sus extremos tres cargas. La primera de $-9{,}0\cdot10^{-6}$ C, en el vértice superior, la segunda de $+8{,}0\cdot10^{-6}$ C, en el vértice inferior izquierdo, y la tercera de $-2{,}0\cdot10^{-6}$ C, en el vértice inferior derecho. Encuentra la magnitud y dirección de la fuerza electrostática neta ejercida sobre la última carga. [6,4 N dirigida a 233,4º del eje de la base OX]

**5)** Un agente físico mueve una carga positiva de $1{,}8\cdot10^{-4}$ C, a una velocidad constante, desde un punto A hasta un punto B y realiza un trabajo de $5{,}8\cdot10^{-3}$ J sobre la carga. Calcula: a) ¿cuál es la diferencia de energía potencial eléctrica de la carga en los dos puntos?; b) la diferencia de potencial entre los dos puntos, y c) ¿cuál punto está a un potencial mayor?. [a) $5{,}8\cdot10^{-3}$ J; b) 32,2 V; c) el punto B]

**6)** El ánodo, que es el terminal positivo, de un tubo de Rayos X, está a un potencial de 125 kV con respecto al cátodo, que es el terminal negativo. Calcula: a) el trabajo que se realiza sobre un electrón que es acelerado desde el cátodo a el ánodo; b) la energía cinética que tiene el electrón cuando llega al ánodo, si el electrón estaba inicialmente en reposo. [$2{,}0\cdot10^{-14}$ J]

**7**) Dos cargas eléctricas están fijas en un lugar del espacio a una distancia d. Una tercera carga está fija en la línea que une las cargas primeras a una distancia d a la derecha de una de ellas. La tercera carga es elegida de tal forma que la energía potencial del grupo es cero, esto es, la energía potencial tiene el mismo valor como si las tres cargas estuvieran muy separadas. Determina el valor de la tercera carga asumiendo que: a)

las dos cargas primeras son iguales y tienen de valor q; b) las dos cargas primeras son de distinto signo pero de igual valor q. [a) -(2/3)q; b) -2q]

**8)** La capacidad de un condensador vacío es de $1{,}2\cdot10^{-6}$ F. El condensador se conecta a una batería de 12 V y se carga totalmente. Con el condensador conectado a la batería, una barra de material dieléctrico se introduce entre los platos del condensador. El resultado es que desde la batería fluye hacia los platos una carga adicional de $2{,}6\cdot10^{-5}$ C. ¿Cuál es la constante dieléctrica del material?. [2,8]

**9)** La gran mayoría de los teclados de los computadores aplican la idea de capacidad. Así las teclas son condensadores de capacidad variable en función de su pulsación. Cuando la tecla se pulsa los platos se acercan y aumentan la capacidad. Sin pulsar la distancia es de 5,00 mm y al pulsar pasa a 0,150 mm. El área de los platos es de 0,95 $cm^2$ y el condensador tiene un dieléctrico cuya constante dieléctrica vale 3,50. Determina el cambio en la capacidad que es detectado por el computador. [19,0 pF]

**10)** ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los platos de un condensador de 3,3 F que almacena suficiente energía como para dar luz a una lámpara de 75 W durante 1 minuto?. [52,2 V]

**Problemas de Corriente Eléctrica**:

**1)** Una batería de coche tiene una valoración de 220 amperios·hora (220 A·h). Esta valoración es una indicación de la carga total que la batería puede proporcionar a un circuito antes de acabarse. a) ¿Cuál es la carga total que la batería puede proporcionar?; b) determina la corriente máxima que la batería puede proporcionar en 38 minutos. [792 kC; 347,368 A]

**2)** El filamento de una bombilla tiene una resistencia de 192 Ω. Si está operando a 120V ¿cuánta energía es dada a la bombilla en 45 minutos?. [202,5 kJ]

**3)** El encendedor de cigarrillos de un coche es una resistencia que cuando se activa se conecta a la batería de 12 V. Suponemos que el encendedor disipa 33 W de potencia. Encuentra: a) la resistencia del encendedor; b) la corriente que el encendedor saca desde la batería. [a) 4,4 Ω; b) 2,8 A]

**4)** Tres resistencias de 25 Ω, 45 Ω y 75 Ω, están conectadas en serie, y una corriente de 0,51 A pasa a través de ellas. Determina: a) la resistencia equivalente de las tres; b) la diferencia de potencial entre los extremos de las tres resistencias. [a) 145 Ω; b) 74 V]

**5)** Tres resistencias, de valores 5 Ω, 30 Ω y 15 Ω, están conectadas en serie a los extremos de una batería. Los valores máximos de potencia son, respectivamente, de 20W, 10W y 10W. Calcula: a) ¿cuál es el mayor voltaje que la batería puede dar sin que arda una de las resistencias?; b) ¿cuánta potencia da la batería al circuito?. [a) 29 V; b) 16,8 W]

**6)** Una batería de un coche con 12 V de fem y una resistencia interna de 0,040 Ω se está cargando con una intensidad de corriente de 50 A. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los terminales?. b) ¿Cuál es la velocidad con la que la energía está siendo disipada como calor en la batería?. c) ¿Cuál es la velocidad con la que la energía está siendo convertida en energía química?. d) ¿Cuáles son las respuestas a) y b) cuando la batería está suministrando 50 A al motor de arranque?. [a) 14 V; b) 100 W; c) 600 W; d) 10 V y 100 W]

**7)** Consideremos un circuito eléctrico constituido de dos mallas, tres ramas y dos nudos. En una rama hay dos resistencias iguales de 1,7 Ω, cada una, y una batería de $V_1$=2,1 V. En la rama central o común a las dos mallas hay una resistencia de 3,5 Ω y una batería de $V_2$=6,3 V. En la otra rama hay dos resistencias iguales de 1,7 Ω, cada una, y una batería de $V_2$=6,3 V. Si las baterías están colocadas de tal forma que sus terminales positivos se conectan los tres. Calcula: a) las intensidades por las tres ramas del circuito; b) la diferencia de potencial entre los nudos del circuito. [a) $I_1$=0,82 A, $I_2$=0,40 A, $I_3$=0,42 A; b) 4,9 V]

**Índice de "La materia y las reacciones químicas"**


- Introducción.
- Propiedades físicas y químicas de las sustancias.
- Clasificación de la materia.
- Primeras leyes de la Química: las leyes ponderales.
- Teoría atómica de Dalton.
- Ley de los volúmenes de combinación de Gay-Lussac.
- Discordancia entre la ley de los volúmenes de combinación y la hipótesis de Dalton.
- Principio de Avogadro.
- Escala de pesos atómicos.
- La Tabla Periódica de los elementos químicos.
- Conceptos de mol, número de Avogadro y constante de Avogadro.
- Concepto de masa atómica relativa de un isótopo. Definición de peso atómico. Masa atómica molar. El peso molecular.
- Fórmula empírica de un compuesto y fórmula molecular.
- Estequiometría de las reacciones químicas. Ecuación fundamental de la estequiometría.
- Composición de las disoluciones.
- Ecuación de estado de los gases. Presión parcial de un gas en una mezcla.
- Unidades de presión y energía
- Nomenclatura y formulación química de los compuestos inorgánicos: Combinaciones binarias del H y del O; Metal-no metal y no metal-no metal; Ácidos inorgánicos; Iones: cationes y aniones; Peróxidos, hiperóxidos y ozónidos; Hidróxidos; Sales de ácidos inorgánicos
- Cuestiones y problemas propuestos. Ejemplos propuestos de formulación y nomenclatura inorgánica


**Introducción**.-

La Química es la rama de la Ciencia relacionada con el estudio de la **materia** y los **cambios** que pueda experimentar. El origen de la materia está en las estrellas ya que estas son la fuente de los elementos químicos.

Por materia entendemos todo aquello que tiene masa y ocupa espacio. La materia no incluye la luz o conceptos abstractos como la belleza porque no ocupan espacio y no tienen masa. Observamos que la materia es distinta y decimos que hay distintos tipos de materia o que hay distintos tipos de sustancias. El agua pura es un tipo de sustancia. Reconocemos los distintos tipos de sustancias por sus propiedades distintas o características.

**Propiedades físicas y químicas de las sustancias**.-

**Propiedad física**: es una característica que observamos o medimos sin cambiar la identidad de la sustancia. Por ejemplo, tres propiedades físicas del oro son: el color amarillo, conducir la electricidad y fundir a 1063ºC.

**Ejemplos de propiedades físicas**: estado físico (sólido, líquido, gas y vapor que es mezcla de líquido y gas), cambio de estado (fusión y congelación, vaporización y condensación, sublimación y deposición)

**Propiedad química**: es una característica que observamos o medimos sólo cambiando la identidad de la sustancia. Por ejemplo, se observa que el gas natural, constituido por metano principalmente, arde para producir los compuestos dióxido de carbono y agua, acompañada de desprendimiento de energía. La propiedad química de combustión del metano, que es la reacción química con el oxígeno, se observa cambiando la identidad del metano y obteniendo nuevas sustancias.

**Ejemplos de propiedades químicas**: cambios químicos (formación de una sustancia a partir de otra como la extracción de metales, la producción de fibras sintéticas y fármacos).

**Clasificación de la materia**.-

La materia que observamos se considera formada por **mezclas y sustancias**:

— **Mezclas heterogéneas**: Compuestas de dos o más componentes y de dos o más fases (mezcla de sal-arena, la leche bajo el microscopio es una mezcla de agregados de moléculas grasas flotando en el líquido).

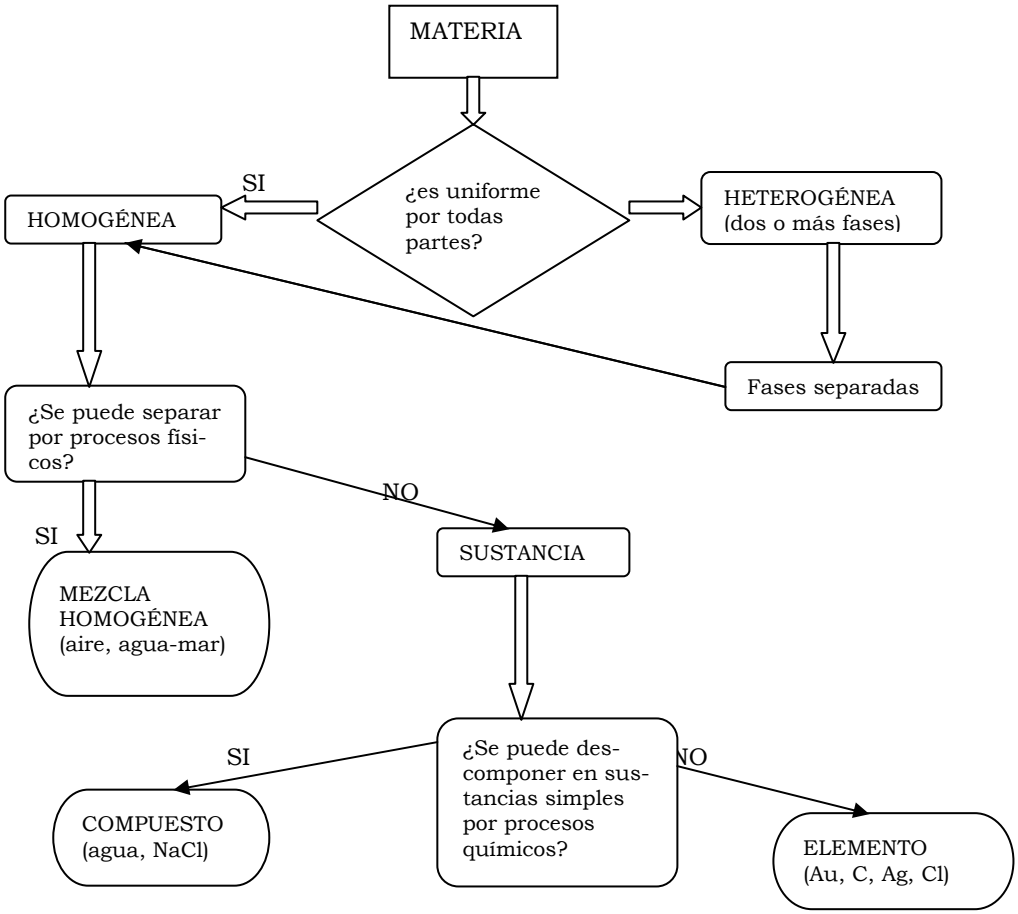
— **Mezclas homogéneas**: Compuestas de dos o más componentes y de fase simple. Por ejemplo, el aire compuesto de $O_2$ y $N_2$, el agua de mar de agua y sales disueltas, el latón de cobre y cinc. En general, una disolución es una mezcla homogénea.

Las **mezclas** son de composición variable y pueden separarse por técnicas físicas (filtración, destilación, cristalización, centrifugación y cromatografía). Se caracterizan porque durante el cambio de estado tienen temperatura variable.

Las **sustancias** son de composición fija, no pueden separarse por técnicas físicas sino por técnicas químicas (electrólisis, oxidación, reducción). La **sustancia** es un tipo sencillo de materia como el agua ($H_2O$),

el cloruro de sodio (NaCl), el hierro (Fe) y el cinc (Zn). Durante el cambio de estado físico las sustancias tienen la temperatura constante. Las sustancias se clasifican en:

- **Elementos**: son las sustancias puras más sencillas y no pueden descomponerse usando técnicas químicas.
- **Compuestos**: son combinaciones específicas de elementos que pueden descomponerse o separarse en elementos usando técnicas químicas.




**Primeras leyes de la Química: las leyes ponderales**.-

**Ley de Conservación de la masa**: (Lavoisier en 1774) "*En toda reacción o cambio químico la masa de los reactivos es igual a la masa de los productos de la reacción*".

**Ley de las proporciones definidas**: (Proust 1808) "*En un compuesto químico las proporciones entre las masas de los elementos que lo constituyen son siempre constantes, independiente del origen del compuesto o de su modo de preparación*".

Por ejemplo, el bromo (Br) reacciona con el magnesio (Mg) para dar el compuesto bromuro de magnesio, siendo la proporción de 6,57 g de Br con 1,00 g de Mg. Luego si mezclamos, para reaccionar, 10 g de Br con 2,0 g de Mg, tendremos después de la reacción 11,52 g de bromuro de magnesio (los diez gramos de Br reaccionarán con sólo 1,52 g de magnesio) y quedarán 0,48 g de magnesio sin reaccionar.

$$10\,\text{g Br} \times \frac{1{,}00\,\text{g Mg}}{6{,}57\,\text{g Br}} = 1{,}52\,\text{g Mg}$$

**Ley de las proporciones múltiples**: (Dalton 1766-1825) "*Cuando dos elementos se combinan para formar más de un compuesto, las diferentes masas de uno de ellos que se combina con una masa fija del otro se encuentran siempre en la relación de números enteros sencillos*".

Por ejemplo, se conocen dos óxidos de cromo, en uno de ellos la proporción es de (1,084 g de Cr)/(1 g de O) y en el otro la proporción es de (2,167 g de Cr)/(1 g de O). Luego en los dos compuestos la relación entre las masas de Cr que se combinan con 1 g de O es de 2.

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{2{,}167\,\text{g Cr}}{1{,}0\,\text{g O}} \\ \dfrac{1{,}084\,\text{g Cr}}{1{,}0\,\text{g O}}\end{matrix}\right\} \quad \frac{\dfrac{2{,}167\,\text{g Cr}}{1{,}0\,\text{g O}}}{\dfrac{1{,}084\,\text{g Cr}}{1{,}0\,\text{g O}}} = \frac{2{,}167\,\text{g Cr}}{1{,}084\,\text{g Cr}} = 2$$

**Ley de las proporciones recíprocas**: (Richter 1762-1807) "*Las masas de elementos diferentes que se combinan con una misma masa de un tercer elemento son las masas relativas de aquellos elementos cuando se combinan entre sí o bien múltiplos o submúltiplos de estas masas*".

Por ejemplo, se sabe que un óxido de cloro tiene un 18,41% de O, que un óxido de cinc tiene un 80,34% de Zn y que un cloruro de cinc tiene un 52,03% de Cl. Demuestra que se cumple la ley de las proporciones recíprocas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{óxido de cloro con 18,41\% de O}\left\{\dfrac{(100-18,41)\,\text{g Cl}}{18,41\,\text{g O}}=\dfrac{4,431\,\text{g Cl}}{1\,\text{g O}}\right\}\\ \text{óxido de cinc con 80,34\% de Zn}\left\{\dfrac{80,34\,\text{g Zn}}{(100-80,34)\,\text{g O}}=\dfrac{4,080\,\text{g Zn}}{1\,\text{g O}}\right\}\end{array}\right\}\quad \frac{\dfrac{4,431\,\text{g Cl}}{1\,\text{g O}}}{\dfrac{4,080\,\text{g Zn}}{1\,\text{g O}}}=\frac{1,080\,\text{g Cl}}{1\,\text{g Zn}}$$

$$\text{cloruro de cinc con 52,03\% de Cl}\left\{\frac{52,03\,\text{g Cl}}{(100-52,03)\,\text{g Zn}}=\frac{1,080\,\text{g Cl}}{1\,\text{g Zn}}\right\}$$

**Teoría atómica de Dalton**.-

Enunciada en 1805 y fue la primera hipótesis sobre la existencia de los átomos como últimas partículas de la materia. Hasta finales del siglo XIX no se pudo comprobar la existencia real de los átomos y pasó a ser una teoría. Postulados:

1) *Todos los elementos están constituidos por pequeñas partículas llamadas átomos que son indivisibles e indestructibles.*
2) *Los átomos de un mismo elemento son todos iguales en masa y en todas las demás propiedades.*
3) *Los átomos de los distintos elementos tienen su masa distinta y sus propiedades.*
4) *Los compuestos se forman por la unión de átomos de los correspondientes elementos en una relación numérica sencilla. Los "átomos-compuestos" de un determinado compuesto son idénticos en masa y en todas las demás propiedades.*

Sin embargo, Dalton no dispuso de evidencias experimentales para establecer la relación entre los átomos de un llamado "átomo-compuesto". Para resolverlo utilizó la más sencilla que es la 1:1 con lo que la fórmula del agua sería, según Dalton, HO y la fórmula del amoniaco NH.

Nuevos descubrimientos han llevado a modificar casi todos los postulados de la teoría original de Dalton. Se descubrieron los electrones en 1897, se estableció el átomo nuclear en 1905, se descubrieron los isótopos que son átomos que tienen el mismo número atómico pero diferente masa atómica y se descubrieron los nucleones (protones y neutrones), siendo el número atómico Z el número de protones y el número másico A que es el número total de nucleones A=Z+N.

Los isótopos de los elementos se representan ${}^{A}_{Z}X$, siendo X el símbolo del elemento químico. Por ejemplo, el oxígeno tiene tres isótopos que se representan: ${}^{16}_{8}O$; ${}^{17}_{8}O$; ${}^{18}_{8}O$.

La abundancia natural de un isótopo es su abundancia en una muestra de un material existente en la naturaleza. Hasta 1980 la comprobación de la existencia de los átomos se ha realizado por métodos indirectos. En este año dos científicos suizos Binnig y Rohrer desarrollaron el microscopio de efecto túnel con el que se consiguió visualizar los átomos, determinando su tamaño y la distancia entre ellos, por lo que recibieron el premio Nobel en 1986.

**Ley de los volúmenes de combinación de Gay-Lussac**.-

Enunciada por Gay-Lussac a principios del siglo XIX y al poco tiempo de que Dalton publicase su hipótesis atómica. Históricamente tuvo mucha importancia ya que puso en cuestión la hipótesis atómica de Dalton, pero el problema fue resuelto satisfactoriamente por Avogadro en 1811. Enunciado: *"Cuando dos gases reaccionan químicamente, a presión y temperatura constantes, los volúmenes de los reactivos y de los productos de la reacción están en una relación de números enteros sencillos".*

Por ejemplo, a una presión y temperatura constantes, superior a 100ºC, se observan experimentalmente los siguientes procesos:

2 $cm^3$ de hidrógeno + 1 $cm^3$ de oxígeno $\rightarrow$ 2 $cm^3$ de vapor de agua

1 $cm^3$ de nitrógeno + 3 $cm^3$ hidrógeno $\rightarrow$ 2 $cm^3$ de amoniaco

**Discordancia entre la ley de los volúmenes de combinación y la hipótesis de Dalton**:

La hipótesis de Dalton dice que las últimas partículas con existencia independiente en los gases son los átomos. Si aplicamos la hipótesis de Dalton a la ley de los volúmenes de combinación obliga a suponer que volúmenes iguales de todos los gases en las mismas condiciones de presión y temperatura contienen igual número de átomos. Es decir, 2 volúmenes de hidrógeno tendrán el doble número de átomos que 1 volumen de oxígeno. Por lo que las reacciones de formación de agua y de amoniaco se podrían expresar desde la hipótesis atómica de Dalton como:

2 cm³ de hidrógeno + 1 cm³ de oxígeno → 2 cm³ de vapor de agua
2 H + 1 O → 2 HO

1 cm³ de nitrógeno + 3 cm³ hidrógeno → 2 cm³ de amoniaco
1 N + 3 H → 2 NH

Por tanto, tomando la hipótesis de Dalton como base, para explicar los experimentos que conducen a la ley de los volúmenes de combinación, no se cumpliría la ley de conservación de la masa, ya que se obtienen más átomos de O ó de N que reaccionan.

**Principio de Avogadro**.-

Para resolver esta discordancia entre la ley de los volúmenes de combinación y la hipótesis atómica de Dalton, en 1811 Amadeo **Avogadro** planteó la hipótesis siguiente, que contiene tres postulados:

1) *Las últimas partículas de los gases con existencia independiente no son los átomos sino las moléculas.*
2) *Las moléculas de los elementos químicos, que sean gases, consisten en agregados de uno o más átomos idénticos, mientras que las moléculas de los compuestos consisten en agregados de dos o más átomos diferentes.*
3) ***Bajo las mismas condiciones de presión y temperatura volúmenes iguales de gases diferentes contienen igual número de partículas o moléculas**.*

Con la hipótesis de Avogadro se puede explicar la ley de los volúmenes de combinación para la formación del agua y del amoniaco:

2 cm³ de hidrógeno + 1 cm³ de oxígeno → 2 cm³ de vapor de agua
$2\ H_2 + 1\ O_2 \rightarrow 2\ H_2O$

1 cm³ de nitrógeno + 3 cm³ hidrógeno → 2 cm³ de amoniaco
$1\ N_2 + 3\ H_2 \rightarrow 2\ NH_3$

**Escala de pesos atómicos**.-

En el siglo XIX no era posible determinar, de forma absoluta, la masa de los átomos. Pero como resultado de la ley de las proporciones definidas, aplicada a los compuestos, se podía determinar el valor de las masas atómicas relativas entre los elementos que constituyen el compuesto. Por ello, en **1801 Dalton** eligió como patrón el H, por ser el elemento más ligero, al que le dio el valor de 1, y a partir de él se estableció la escala de pesos atómicos relativos al H. En **1903** una Comisión Internacional tomó como patrón el O, ya que éste se combina con todos los elementos y forma compuestos más estables y para no alterar los valores de la tabla se le dio al patrón O el valor 16. Pero en 1919 se descubrieron los isótopos, que son átomos de un mismo elemento químico con distinta masa. Así, el oxígeno natural está constituido por tres isótopos que en una muestra natural tienen una abundancia distinta (99,762% en $^{16}O$; 0,038% en $^{17}O$ y 0,200% en $^{18}O$). Por lo que en **1961** se acordó tomar como patrón el isótopo más abundante del carbono que es el carbono-12 ($^{12}C$). Al $^{12}C$ se le asignó el valor exacto de 12 veces la unidad de masa atómica ( 1 u = $1{,}6605\times10^{-24}$ g). Por lo que *el peso atómico de un elemento químico es la relación entre su masa atómica -la media ponderada de las masas atómicas de sus isótopos- y la unidad de masa atómica.*

**La Tabla Periódica de los elementos químicos**:

| 1 | | | | | | | | | | | | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 H 1.0079 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | 2 He 4.0026 |
| 3 Li 6.941 | 4 Be 9.0122 | | | | | | | | | | | 5 B 10.811 | 6 C 12.011 | 7 N 14.007 | 8 O 15.999 | 9 F 18.998 | 10 Ne 20.180 |
| 11 Na 22.990 | 12 Mg 24.305 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 Al 26.982 | 14 Si 28.086 | 15 P 30.974 | 16 S 32.066 | 17 Cl 35.453 | 18 Ar 39.948 |
| 19 K 39.098 | 20 Ca 40.078 | 21 Sc 44.956 | 22 Ti 47.867 | 23 V 50.942 | 24 Cr 51.996 | 25 Mn 54.938 | 26 Fe 55.845 | 27 Co 58.933 | 28 Ni 58.693 | 29 Cu 63.546 | 30 Zn 65.39 | 31 Ga 69.723 | 32 Ge 72.61 | 33 As 74.922 | 34 Se 78.96 | 35 Br 79.904 | 36 Kr 83.80 |
| 37 Rb 85.468 | 38 Sr 87.62 | 39 Y 88.906 | 40 Zr 91.224 | 41 Nb 92.906 | 42 Mo 95.94 | 43 Tc (98) | 44 Ru 101.07 | 45 Rh 102.91 | 46 Pd 106.42 | 47 Ag 107.87 | 48 Cd 112.41 | 49 In 114.82 | 50 Sn 118.71 | 51 Sb 121.76 | 52 Te 127.60 | 53 I 126.90 | 54 Xe 131.29 |
| 55 Cs 132.91 | 56 Ba 137.33 | 57-71 * | 72 Hf 178.49 | 73 Ta 180.95 | 74 W 183.84 | 75 Re 186.21 | 76 Os 190.23 | 77 Ir 192.22 | 78 Pt 195.08 | 79 Au 196.97 | 80 Hg 200.59 | 81 Tl 204.38 | 82 Pb 207.2 | 83 Bi 208.98 | 84 Po (209) | 85 At (210) | 86 Rn (222) |
| 87 Fr (223) | 88 Ra (226) | 89-103 # | 104 Rf (261) | 105 Db (262) | 106 Sg (263) | 107 Bh (264) | 108 Hs (265) | 109 Mt (268) | 110 Uun (269) | 111 Uuu (272) | 112 Uub (269) | | 114 Uuq ‡ | | 116 Uuh ‡ | | 118 Uuo ‡ |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * Lanthanide series | 57 La 138.91 | 58 Ce 140.12 | 59 Pr 140.91 | 60 Nd 144.24 | 61 Pm (145) | 62 Sm 150.36 | 63 Eu 151.96 | 64 Gd 157.25 | 65 Tb 158.93 | 66 Dy 162.50 | 67 Ho 164.93 | 68 Er 167.26 | 69 Tm 168.93 | 70 Yb 173.04 | 71 Lu 174.97 |
| # Actinide series | 89 Ac (227) | 90 Th 232.04 | 91 Pa 231.04 | 92 U 238.03 | 93 Np (237) | 94 Pu (244) | 95 Am (243) | 96 Cm (247) | 97 Bk (247) | 98 Cf (251) | 99 Es (252) | 100 Fm (257) | 101 Md (258) | 102 No (259) | 103 Lr (262) |

La tabla periódica está constituida por 18 columnas. Los elementos se dividen en metales (a la izquierda), no metales ( a la derecha) y metaloides (Si, Ge, As, Sb, Te, Po). Los metales alcalinos son los elementos del grupo 1, los alcalinotérreos los del grupo 2, los gases nobles los del grupo 18, los halógenos los del grupo 17, los metales de transición los de los grupos 3 al 12.

Son elementos nuevos Rf Rutherfodium, Db Dubnium, Sg Seaborgium, Bh Bohrium, Hs Hassium y Mt Meitneium.

**Conceptos de mol, número de Avogadro y constante de Avogadro**.-

**Mol**: es una unidad fundamental del sistema internacional de unidades (S.I.) y es la unidad de la magnitud fundamental llamada "cantidad de sustancia". En el SI de unidades, las unidades kg y m se usan para expresar propiedades como la masa y la longitud. Las recomendaciones oficiales nos dicen que el mol expresa la "cantidad" de sustancia presente en una muestra. La "cantidad" de sustancia de un sistema es una magnitud ligada al número de entidades elementales del sistema. Es decir, es una magnitud propia de una visión atómico-molecular de la materia. Así, dos muestras de materia tienen igual "cantidad" de sustancia cuando tienen igual número de átomos o de moléculas, aunque las masas sean distintas. Los químicos se han opuesto a adoptar el término "cantidad" de sustancia y prefieren hablar del "número de moles" de sustancia.

**Definición de mol en el SI**: *"Un mol es la cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales, es decir, átomos, moléculas, iones, etc., como átomos hay en 0,012 kg del isótopo de Carbono-12".*Es decir, un mol es el número de átomos que hay en 0,012 kg de carbono-12.

**Número de Avogadro**: Es el número de entidades elementales que contiene 1 mol. Las determinaciones más recientes le dan el valor de $N_0 = 6{,}02205\times10^{23}$. El número es adimensional.

**Constante de Avogadro**: $\mathbf{N_A = 6{,}02205\cdot10^{23}\ mol^{-1}}$. Es una constante que nos da la proporcionalidad entre el número de entidades elementales de un sistema **N** y la "cantidad" de sustancia **n**, o número de moles de sustancia del mismo. $N = n \times N_A$

Definición de **unidad de masa atómica** (**u**): *"La unidad de masa atómica es la doceava* $\frac{1}{12}$ *parte de la masa de un átomo de Carbono-12"*

$$1\,u = \frac{1}{12}m_{\left(^{12}_{6}C\right)} = \frac{1}{12}\frac{0{,}012\,kg}{N_0} = \frac{1}{12}\frac{12\,g}{N_0} = \frac{1}{N_0}\,g = \frac{1}{6{,}022\cdot10^{23}}\,g = 1{,}66\cdot10^{-24}\,g$$

**Concepto de masa atómica relativa de un isótopo**: $A_r = \frac{m_a}{1\,u} = \frac{m_a}{\frac{1}{12}m_{\left(^{12}_{6}C\right)}}$

Ahora bien, como una muestra de un determinado elemento químico, tomado desde una fuente natural, está formado por una mezcla de sus isótopos que tienen masas distintas, se necesita conocer la masa atómica media "ponderada" de todos los isótopos presentes y no las masas de los isótopos individuales.

Definición de **media ponderada**: *"es el resultado de multiplicar cada uno de los números de un conjunto por un valor particular llamado su peso, sumar las cantidades así obtenidas, y dividir esa suma por la suma de todos los pesos".*

El oxígeno natural está constituido por tres isótopos cuyas características se determinaron en el espectrómetro de masas:

- → $^{16}O$ de masa atómica 15,99491u y abundancia isotópica 99,762%.
- → $^{17}O$ de masa atómica 16,99913u y abundancia isotópica 0,038%.
- → $^{18}O$ de masa atómica 17,99916u y abundancia isotópica 0,200%.

La masa atómica media ponderada de los isótopos del oxígeno $^{16}O$, $^{18}O$ y $^{17}O$:

$$15{,}99491\,u\times\frac{99{,}762}{100}+16{,}99913\,u\times\frac{0{,}038}{100}+17{,}99916\,u\times\frac{0{,}200}{100}=15{,}9993\,u$$

El elemento químico hidrógeno tiene tres isótopos:

- → $^{1}H$ de masa atómica 1,008u y abundancia isotópica 99,985%.
- → $^{2}H$ de masa atómica 2,014u y abundancia isotópica 0,015%.
- → $^{3}H$ de masa atómica 3,016u y abundancia isotópica nula por ser de corta vida.

La masa atómica media ponderada del elemento químico hidrógeno será:

$$1{,}008\,u\times\frac{99{,}985}{100}+2{,}014\,u\times\frac{0{,}015}{100}=1{,}008\,u$$

El cloro natural está constituido por dos isótopos:

- → $^{35}Cl$ de masa atómica 34,968852·u y porcentaje de abundancia 75,77%.
- → $^{37}Cl$ de masa atómica 36,965903·u y abundancia isotópica 24,23%.

Por lo que la masa atómica media ponderada de los isótopos del cloro $^{35}Cl$ y $^{37}Cl$:

$$34,968852\,\text{u}\times\frac{75,77}{100}+36,965903\,\text{u}\times\frac{24,23}{100}=35,452737\,\text{u}$$

La **masa atómica de un elemento químico**, que tiene dos o más isótopos, es igual a la suma de los productos de la masa atómica de cada isótopo por su abundancia natural.

Por tanto, **la masa atómica de un elemento químico es la media ponderada de las masas de sus isótopos basada en la combinación isotópica natural**.

**Definición de peso atómico**:

*"El peso atómico de un elemento químico es la relación entre su masa atómica -la media ponderada de las masas atómicas de sus isótopos- y la unidad de masa atómica. Es decir, el peso atómico es la masa atómica media relativa". Luego el peso atómico es un número adimensional.*

$$\text{Pa}=\frac{\text{m}_{\text{a(ponderada)}}}{1\,\text{u}}$$

**Masa atómica molar**: *"Es la masa de un mol de átomos de un elemento químico"*. Por tanto, es el producto de la masa atómica ponderada de un elemento por la constante de Avogadro y equivale al peso atómico del elemento en unidades g/mol:

$$\text{M.a.}=\text{m}_{\text{a(ponderada)}}\times\text{N}_\text{A}=\text{Pa}\times1\,\text{u}\times\text{N}_\text{A}=\text{Pa}\times\frac{1}{\text{N}_0}\times\text{N}_\text{A}=\text{Pa}\left(\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right)$$

**Relación** entre la masa **m** de un elemento químico, la cantidad de sustancia **n** del elemento y el número **N** de átomos

$$\text{n}_{(\text{mol})}=\frac{\text{m}_{(\text{g})}}{\text{Pa}_{(\text{g/mol})}}\quad\left\{\text{N}_{(\text{átomos})}=\text{n}_{(\text{mol})}\times\text{N}_{\text{A}\,(\text{átomos/mol})}=\frac{\text{m}_{(\text{g})}}{\text{Pa}_{(\text{g/mol})}}\times\text{N}_{\text{A}\,(\text{átomos/mol})}\right\}$$

**El peso molecular** de un compuesto químico determinado es la suma de los pesos atómicos de los elementos que formen el compuesto multiplicados por su coeficiente estequiométrico.

**Fórmula empírica de un compuesto y fórmula molecular**.-

La **fórmula empírica** nos muestra los números relativos de átomos de cada elemento en un compuesto químico expresados por los símbolos químicos de los elementos. En un compuesto, los números relativos de los átomos de cada elemento se escriben como subíndices en los símbolos químicos de los elementos. Por ejemplo, la fórmula empírica $P_2O_5$ nos indica que los átomos están presentes en la relación 2:5. Una fórmula empírica se escribe siempre en términos de números enteros, es decir, $P_2O_5$ y no $PO_{2,5}$.

Para determinar la **fórmula empírica**, hemos de seguir los siguientes pasos: 1º) tomamos una masa determinada del compuesto; 2º) determinamos las masas de los elementos químicos que forman el compuesto; 3º) calculamos el número de moles de cada elemento químico; 4º) obtenemos la relación, en números enteros, entre los elementos que constituyen el compuesto.

**Ejemplo:** Determina la fórmula empírica de un compuesto si en 4,28 g del mismo hay 1,44 g de Cu; 0,64 g de N y el resto O.

$$\left.\begin{array}{l}1,44\text{ g Cu}\;\Rightarrow\;1,44\text{ g Cu}\times\dfrac{1\text{ mol Cu}}{63,5\text{ g Cu}}=0,0227\text{ mol Cu}\\[2ex]0,64\text{ g N}\;\Rightarrow\;0,64\text{ g N}\times\dfrac{1\text{ mol N}}{14\text{ g N}}=0,0457\text{ mol N}\\[2ex](4,28-1,44-0,64)\text{ g O}=2,2\text{ g O}\;\Rightarrow\;2,2\text{ g O}\times\dfrac{1\text{ mol O}}{16\text{ g O}}=0,1375\text{ mol O}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\text{Cu}_{0,0227}\text{N}_{0,0457}\text{O}_{0,1375}\\[1ex]\text{Cu}_{\frac{0,0227}{0,0227}}\text{N}_{\frac{0,0457}{0,0227}}\text{O}_{\frac{0,1375}{0,0227}}\\[1ex]\text{Cu}_1\text{N}_2\text{O}_6\\[1ex]\text{Cu}(\text{NO}_3)_2\end{array}\right.$$

La **fórmula molecular** nos indica el número real de átomos de cada elemento presentes en una molécula. La glucosa tiene de fórmula empírica $CH_2O$, que nos indica que los átomos de carbono, hidrógeno y oxígeno están en la relación 1:2.1. Su **fórmula molecular** es $C_6H_{12}O_6$ que nos indica que cada molécula contiene 6 átomos de carbono, 12 átomos de hidrógeno y 6 átomos de oxígeno. La **fórmula molecular** es un múltiplo de la fórmula empírica, y para obtener la fórmula molecular debemos conocer el peso molecular del compuesto y ver cuantas unidades de fórmula empírica necesitamos contar.

**Ejemplo:** Determina la fórmula molecular de la vitamina C sabiendo que su peso molecular es 176 y que su fórmula empírica es $C_3H_4O_3$.

El peso molecular del compuesto es un múltiplo de la fórmula empírica: $(C_3H_4O_3)_n$

$176 = [3\times12+4\times1+3\times16]\cdot n = 88\cdot n$; siendo n = 2 y la fórmula molecular $(C_3H_4O_3)_2 \rightarrow C_6H_8O_6$.

**Estequiometría de las reacciones químicas**.-

Las reacciones químicas se representan mediante ecuaciones en las que se relacionan los reactivos y los productos mediante unos coeficientes que relacionan la cantidad de sustancia que reacciona o que se produce.

Consideremos la reacción química: $a\,A + b\,B \rightleftarrows c\,C + d\,D$. Las letras A y B representan las sustancias llamadas reactivos y las letras C y D las sustancias llamadas productos de la reacción. Las letras minúsculas a, b, c y d representan los coeficientes estequiométricos de la reacción. Que son números adimensionales y se utilizan para que la ecuación química cumpla la ley de conservación de la masa y la ley de conservación de la carga.

La determinación de los coeficientes estequiométricos en las ecuaciones químicas se puede hacer por el método algebraico. En éste método, se indican los coeficientes estequiométricos de los reactivos y de los productos por símbolos algebraicos, y estos se determinan por el uso de condiciones de conservación para los elementos en la ecuación química.

**Ejemplo**: Calcula los coeficientes de la ecuación: $a\,CH_{4(g)} + b\,O_{2(g)} \rightleftarrows c\,CO_{2(g)} + d\,H_2O_{(l)}$

Escribimos las ecuaciones de conservación de todos los elementos químicos:
- Conservación del elemento C: a = c
- Conservación del elemento H: 4·a = 2·d
- Conservación del elemento O: 2·b = 2·c + d

Resolvemos el sistema de ecuaciones, que tiene 4 incógnitas (a,b,c,d) y 3 ecuaciones (C,H,O), dándole un valor a una incógnita. Por ejemplo, si consideramos que a=1, entonces c=1, b=2, d = 2; luego el resultado será

$$CH_{4(g)} + 2\,O_{2(g)} \rightleftarrows CO_{2(g)} + 2\,H_2O_{(l)}$$

Sin embargo, no todas las ecuaciones químicas pueden ser totalmente resueltas por la técnica algebraica. Así: $a\,KMnO_4 + b\,H_2O_2 + c\,H_2SO_4 \rightleftarrows d\,K_2SO_4 + e\,MnSO_4 + f\,H_2O + g\,O_2$. En esta última ecuación química tenemos que intervienen 5 elementos (K, Mn, O, H, S), por lo que tendremos 5 ecuaciones independientes en el balance. Y, sin embargo, hay 7 coeficientes estequiométricos (a, b, c, d, e, f, g) lo que supone 7 incógnitas. Por lo que no puede ser totalmente resuelta por la técnica algebraica.

Para que una ecuación química pueda ser resuelta totalmente por la técnica algebraica es que el número de ecuaciones independientes del balance elemental tenga una menos que el de incógnitas. La interpretación convencional de las ecuaciones químicas, cuando el número de reactantes y productos excede el número de ecuaciones independientes en dos, o más, es que la ecuación como aparece escrita no representa una única reacción y es la suma de dos o más reacciones simultáneas que toman parte.

**Ecuación fundamental de la estequiometría**:

Nos da la relación entre los reactivos y los productos de una reacción química.

Sea la reacción: $\nu_A\,A + \nu_B\,B \rightleftarrows \nu_C\,C + \nu_D\,D$. Los reactivos, A y B, y los productos, C y D, vienen precedidos de sus respectivos coeficientes estequiométricos, $\nu_A, \nu_B, \nu_C, \nu_D$ (números adimensionales). Conforme se van transformando los reactivos en productos disminuye la cantidad de sustancia de los primeros y aumenta la de los segundos. Si definimos una cantidad extensiva, $\xi$, llamada la **extensión de la reacción**, se relaciona con los moles de los reactivos y de los productos de la siguiente forma:

$$\text{Reactivos:}\quad \left\{\begin{matrix} n_A = n_{A_0} - \nu_A\xi \\ n_B = n_{B_0} - \nu_B\xi \end{matrix}\right\} \quad \left\{\xi = -\frac{\Delta n_A}{\nu_A} = -\frac{\Delta n_B}{\nu_B}\right\}$$

$$\text{Productos:}\quad \left\{\begin{matrix} n_C = n_{C_0} + \nu_C\xi \\ n_D = n_{D_0} + \nu_D\xi \end{matrix}\right\} \quad \left\{\xi = \frac{\Delta n_C}{\nu_C} = \frac{\Delta n_D}{\nu_D}\right\}$$

Al ser los coeficientes estequiométricos, $\nu_A, \nu_B, \nu_C, \nu_D$, adimensionales la extensión de la reacción, $\xi$**,** tiene unidad de mol, la cual varía desde 0 hasta un valor máximo impuesto por la estequiometría de la reacción. Por ejemplo, si los números de moles iniciales de A y B son iguales a los coeficientes estequiométricos entonces varía desde 0 a 1 mol. Si $\xi$ varia desde 0 hasta 1 mol se denomina **grado de avance de la reacción**. Cuando el grado de avance de la reacción es 1 mol, han reaccionado cantidades de sustancia numéricamente iguales a los coeficientes estequiométricos de la ecuación química, y se dice que ha tenido lugar **un mol de reacción**. Así, 1 mol de reacción es la transformación de 1 mol del sistema reactivo $(\nu_A\,A + \nu_B\,B)$ en 1 mol del sistema producto $(\nu_C\,C + \nu_D\,D)$.

**Composición de las disoluciones**.-

**Concentración**: "cantidad de sustancia de soluto contenida en una unidad de volumen de disolución". Utilizándose el genérico de "composición de la disolución" para referirse a los diversos modos de expresar la composición de las disoluciones: concentración (antes molaridad), molalidad y fracción molar.

$$\left\{\text{concentración:}\quad C\left(\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}\right)=\frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}}\right\}\quad\left\{\text{fracción molar:}\quad \chi_i=\frac{n_i}{n_{\text{total}}}\right\}$$

$$\left\{\text{molalidad:}\quad m\left(\frac{\text{mol}}{\text{kg}}\right)=\frac{n_{\text{soluto}}}{m_{\text{disolvente}}}\right\}\qquad\left\{\begin{array}{l}\%\text{peso}=\dfrac{m_{\text{soluto}}}{m_{\text{disolución}}}\\ \%\text{volumen}=\dfrac{m_{\text{soluto}}}{100\,\text{mL}_{\text{disolución}}}\end{array}\right\}$$

**Ejemplo**: Una disolución de ácido sulfúrico tiene una densidad de 1,84 g/mL y un porcentaje en peso del 96%. Calcula la concentración, en mol/L, la fracción molar y la molalidad de la disolución. Dato: Pm ($H_2SO_4$) = 98 g·mol$^{-1}$.

$$96\%\text{ en peso}=\frac{96\text{ g }H_2SO_4}{100\text{ g disolución}}$$

$$C\left(\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}\right)=\frac{n_{\text{soluto}}}{V_{\text{disolución}}}=\frac{\dfrac{m_{\text{soluto}}}{Pm_{\text{soluto}}}}{\dfrac{m_{\text{disolución}}}{d}}=\frac{\dfrac{96\text{ g }H_2SO_4}{98\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}}}{\dfrac{100\text{ g}}{1840\text{ g}\cdot\text{L}^{-1}}}=18{,}0\,\frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$\chi_{H_2SO_4}=\frac{n_{H_2SO_4}}{n_{H_2SO_4}+n_{H_2O}}=\frac{\dfrac{96\text{ g }H_2SO_4}{98\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}}}{\dfrac{96\text{ g }H_2SO_4}{98\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}}+\dfrac{4\text{ g }H_2O}{18\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}}}=0{,}82$$

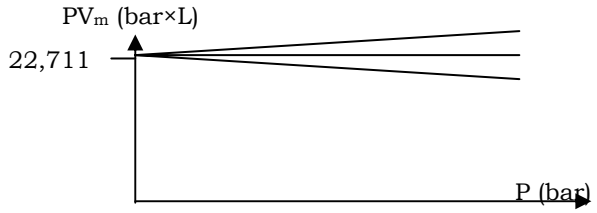
$$m\left(\frac{\text{mol}}{\text{kg}}\right)=\frac{n_{\text{soluto}}}{m_{\text{disolvente}}}=\frac{\dfrac{m_{\text{soluto}}}{Pm_{\text{soluto}}}}{m_{\text{disolvente}}}=\frac{\dfrac{96\text{ g }H_2SO_4}{98\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}}}{4\cdot10^{-3}\text{ kg}}=245\,\frac{\text{mol}}{\text{kg}}$$

**Ecuación de estado de los gases**.-

Cuando el gas se comporta idealmente su presión tiende a cero, y se obtiene que a la temperatura de 0ºC (273,15 K) el producto P×$V_{molar}$ converge hasta el valor 22,711 bar×L/mol:

$$\text{Si}\quad p\to 0\quad\left\{(pV_m)_{T=273{,}15\text{ K}}\to 22{,}711\,\frac{\text{bar}\cdot\text{L}}{\text{mol}}\right\}\quad\left\{R=\frac{pV_m}{T}=\frac{22{,}711\,\frac{\text{bar}\cdot\text{L}}{\text{mol}}}{273{,}15\text{ K}}=0{,}083145\,\frac{\text{bar}\cdot\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{K}}\right\}$$

$$\begin{cases}pV_m=RT\\ pV=nRT\end{cases}$$




**Presión parcial de una gas en una mezcla de gases**:

La presión parcial de un gas i en una mezcla de gases se puede determinar de dos formas: a) mediante el producto de la fracción molar del gas por la presión total de la mezcla; b) mediante la ecuación $p_i$=$n_i$RT/V.

**Ley de Dalton de las presiones parciales**: *"La presión total de una mezcla de gases es la suma de las presiones parciales de cada gas que constituye la mezcla".*

$$P_t=\frac{n_tRT}{V}=\frac{(n_1+n_2+\ldots)RT}{V}=\frac{n_1RT}{V}+\frac{n_2RT}{V}+\ldots=p_1+p_2+\ldots$$

$$\begin{cases}p_i=\dfrac{n_iRT}{V}=\dfrac{n_i}{n_t}\dfrac{n_tRT}{V}=\dfrac{n_i}{n_t}P_t=\chi_iP_t\\ P_t=\chi_1P_t+\chi_2P_t+\ldots=(\chi_1+\chi_2+\ldots)P_t\end{cases}$$

**Unidades de presión y energía:**

**Presión** 760 mm Hg = 1 atm = $d_{Hg}$×g·h = 101.325 Pa = 1,01325 bar.

**Energía**: 1 J = 1 Pa×1m$^3$ = 10$^{-5}$ bar×10$^3$ dm$^3$ = 10$^{-2}$ bar×L

**Constante de los gases**:

R = 8,3144 J/(mol×K) = 0,083144 bar×L/(mol×K) = 0,082 atm×L×mol$^{-1}$×K$^{-1}$

## NOMENCLATURA Y FORMULACIÓN QUÍMICA DE LOS COMPUESTOS INORGÁNICOS

- Combinaciones binarias del H y del O
- Metal-no metal y no metal-no metal
- Ácidos inorgánicos
- Iones: cationes y aniones
- Peróxidos, hiperóxidos y ozónidos.
- Hidróxidos
- Sales de ácidos inorgánicos

**Introducción:**

Para aprender correctamente y de la forma más rápida la nomenclatura y formulación química son imprescindibles los siguientes puntos

1º) Saber los **símbolos** de todos los elementos químicos de la Tabla Periódica.
2º) Saber los elementos que están incluidos en los **18 grupos** de la Tabla Periódica.
3º) Localizar cualquier **elemento químico** en su **grupo** correspondiente.
4º) Saber qué elementos son **metales** y cuáles son **no metales**.
5º) Conocer el **significado** y los **números de oxidación** de los elementos químicos.

**Concepto de número de oxidación:**

**Definición**: "El número de oxidación de un elemento es un concepto empírico definido como **la carga iónica efectiva** obtenida por exagerar el desplazamiento de los electrones en un enlace covalente y suponiendo que la transferencia es completa.

*Ejemplo*: El compuesto cloruro de hidrógeno o ácido clorhídrico HCl está formado por los átomos H y Cl unidos mediante un par de electrones, uno procedente del H y el otro del Cl. Se representa electrónicamente por **H:Cl**, y el Cl atrae a los electrones de enlace con más intensidad que el H, debido a que tiene una carga nuclear mayor (Z=17) que el H (Z=1). El resultado es que estos se desplazan hacia el Cl. Es decir, hay un desplazamiento parcial de los electrones hacia el átomo de Cl. Este fenómeno lo representamos mediante $H^+Cl^-$ y decimos que el número de oxidación del H es **+1** y que el número de oxidación del Cl es **-1**.

Hay que tener presente que

- ✓ El número de oxidación de los elementos químicos en los compuestos no tiene por qué ser siempre el mismo.
- ✓ El número de oxidación de un elemento químico, en un determinado compuesto, se asigna aplicando las reglas que vamos a ver posteriormente. Las reglas, se basan en las ideas que los químicos han desarrollado sobre el proceso que siguen los átomos en las moléculas compartiendo sus electrones.

**Las reglas se aplican en el orden dado y debemos parar cuando se halla obtenido el número de oxidación**, ya que una regla posterior podría contradecir una anterior.

Las reglas llevan implícitos los dos puntos siguientes:

1. El número de oxidación de una sustancia elemental o elemento químico es cero.
2. El número de oxidación de un ion monoatómico es igual al número de carga del ion.

**Reglas para asignar el número de oxidación**:

1) La suma de los números de oxidación de todos los átomos, en las especies químicas, es igual a su carga total.

2) Los átomos en su forma elemental tienen un número de oxidación 0.

3) Para los elementos: a) del grupo 1 (I) tienen número de oxidación +1; b) del grupo 2 (II) tienen número de oxidación +2; c) del grupo 13 (excepto el B) tienen número de oxidación +3 para iones $M^{3+}$; d) del grupo 14 (excepto C y Si) tienen número de oxidación +4 para $M^{4+}$ y +2 para $M^{2+}$.

4) Para el H el número de oxidación es +1 en su combinación con los no metales y -1 en su combinación con metales.

5) Para el F el número de oxidación es -1 en todos sus compuestos.

6) Para el O los números de oxidación son: a) -2 a menos que se combine con el F; b) -1 en los peróxidos $(O_2)^{2-}$; c) -½ en superóxidos $(O_2)^{1-}$; d) -1/3 en ozónidos $(O_3)^{1-}$.

El número de oxidación del carbono en los compuestos formados por la unión de varios átomos de C se determina de la siguiente forma: el C es cero respecto a otro C, negativo respecto al H y positivo respecto a los grupos que contengan O y N. Así, el H tiene un número de oxidación +1, el O tiene -2 y en los peróxidos -1, el N tiene -3 en aminas y +3 en nitrocompuestos.

Números de oxidación por grupos de la Tabla Periódica:

| 1 | 2 |
|---|---|
| $_1$H:+1,-1 | $_4$Be:+2 |

| | |
|---|---|
| $_{3}$Li:+1 | $_{12}$Mg:+2 |
| $_{11}$Na:+1 | $_{20}$Ca:+2 |
| $_{19}$K:+1 | $_{38}$Sr:+2 |
| $_{37}$Rb:+1 | $_{56}$Ba:+2 |
| $_{55}$Cs:+1 | $_{88}$Ra:+2 |
| $_{87}$Fr:+1 | |

| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $_{21}$Sc:+3 | $_{22}$Ti:+4,+3 | $_{23}$V:+5,+4,+3,+2 | $_{24}$Cr:+6,+3,2 | $_{25}$Mn:+7,+6,+4,+3,+2, | $_{26}$Fe:+6,+3,+2 | $_{27}$Co:+3,+2 | $_{28}$Ni:+3,+2 |
| $_{39}$Y:+3 | $_{40}$Zr:+4 | $_{41}$Nb:+5,+3 | $_{42}$Mo:+6,+3,+2 | $_{43}$Tc:+7 | $_{44}$Ru:+4,+3 | $_{45}$Rh:+3,+1 | $_{46}$Pd:+4,+2 |
| $_{57}$La:+3 | $_{72}$Hf:+4 | $_{73}$Ta:+5 | $_{74}$W:+6,+5,+3,+2 | $_{75}$Re:+7,+6,+4,+2 | $_{76}$Os:+4,+3 | $_{77}$Ir:+4,+1 | $_{78}$Pt::+4,+2 |
| $_{89}$Ac:+3 | | | | | | | |

| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $_{29}$Cu:+2,+1 | $_{30}$Zn:+2 | $_{5}$B:+3 | $_{6}$C:+4,-4 | $_{7}$N:+5,+4,+3,+2,-3 | $_{8}$O:-2,-1 | $_{9}$F:-1 |
| $_{47}$Ag:+2,+1 | $_{48}$Cd:+2 | $_{13}$Al:+3 | $_{14}$Si:+4,-4 | $_{15}$P:+5,+3,-3 | $_{16}$S:+6,+4,+2,-2 | $_{17}$Cl:+7,+5,+3,+1,-1 |
| $_{79}$Au:+3,+1 | $_{80}$Hg:+2,+1 | $_{31}$Ga:+3 | $_{32}$Ge:+4 | $_{33}$As:+5,+3,-3 | $_{34}$Se:+6,+4,-2 | $_{35}$Br:+7,+5,+3,+1,-1 |
| | | $_{49}$In:+3 | $_{50}$Sn:+4,+2 | $_{51}$Sb:+5,+3,-3 | $_{52}$Te:+6,+4,-2 | $_{53}$I:+7,+5,+1,-1 |
| | | $_{81}$Tl:+3,+1 | $_{82}$Pb:+4,+2 | $_{83}$Bi:+5,+3 | $_{84}$Po:+6,+4,+2 | $_{85}$At:+7,+5,+3,+1,-1 |

**Representación de las fórmulas**: En los compuestos binarios, la fórmula del compuesto está formada por dos elementos, y se escribe como se encuentran en la Tabla Periódica de los Elementos, es decir, a la izquierda el que tiene número de oxidación positivo y a la derecha el negativo.

**Combinaciones binarias del hidrógeno**.-

Son las combinaciones del H con otro elemento de la tabla periódica. Se dividen en tres tipos: hidrácidos, hidrógeno con otros no metales y hidruros metálicos

**Hidrácidos:** combinaciones del H con los elementos no metálicos F, Cl, Br, I, S, Se y Te.

| | | |
|---|---|---|
| HF | fluoruro de hidrógeno | ácido fluorhídrico |
| HCl | cloruro de hidrógeno | ácido clorhídrico |
| HBr | bromuro de hidrógeno | ácido bromhídrico |
| HI | yoduro de hidrógeno | ácido yodhídrico |
| $H_2S$ | sulfuro de hidrógeno | ácido sulfhídrico |
| $H_2Se$ | seleniuro de hidrógeno | ácido selenhídrico |
| $H_2Te$ | telururo de hidrógeno | ácido telurhídrico |

**Hidrógeno con otros no metales**:

| | | |
|---|---|---|
| $NH_3$ | amoniaco | trihidruro de nitrógeno |
| $PH_3$ | fosfina | trihidruro de fósforo |
| $AsH_3$ | arsina | trihidruro de arsénico |
| $SbH_3$ | estibina | trihidruro de antimonio |
| $CH_4$ | metano | |
| $SiH_4$ | silano | |

**Hidruros metálicos**:

| | |
|---|---|
| LiH | hidruro de litio |
| NaH | hidruro de sodio |
| KH | hidruro de potasio |
| $BeH_2$ | hidruro de berilio |
| $MgH_2$ | hidruro de magnesio |
| $CaH_2$ | hidruro de calcio |
| $AlH_3$ | hidruro de aluminio |
| $GaH_3$ | hidruro de galio |
| $GeH_4$ | hidruro de germanio |

$SnH_4$ hidruro de estaño
$PbH_4$ hidruro de plomo

Los hidruros de los metales de transición, preferentemente los de los grupos IIIB (grupo del Sc ó 3) a VIII (grupo del Ni ó 10), difieren bastante de los hidruros anteriores. La mayoría de ellos más que tratarse de verdaderos hidruros suelen ser compuestos de oclusión del H dentro de las redes metálicas y no llegan a tener una composición estequiométrica razonable, a excepción de algunos casos como el $UH_3$.

**Combinaciones binarias del oxígeno.-** El oxígeno es un elemento químico que se combina con casi todos los elementos de la tabla periódica. El número de oxidación del O en los óxidos es -2 (excepto con el F que es +2) y en los peróxidos es -1. ($CaO$ ; $BaO_2$ ; $OF_2$). Sus combinaciones binarias se conocen con el nombre de óxidos y se formulan escribiendo el oxígeno a la derecha de la fórmula.

| **Fórmula** | **Nombre sistemático** | **Nombre según Stock** |
|---|---|---|
| $Li_2O$ | óxido de litio | óxido de litio |
| $K_2O$ | óxido de potasio | óxido de potasio |
| $MgO$ | óxido de magnesio | óxido de magnesio |
| $CaO$ | óxido de calcio | óxido de calcio |
| $Sc_2O_3$ | trióxido de diescandio | óxido de escandio(III) |
| $TiO_2$ | dióxido de titanio | óxido de titanio(IV) |
| $V_2O_5$ | pentóxido de divanadio | óxido de vanadio(V) |
| $Cr_2O_3$ | trióxido de dicromo | óxido de cromo(III) |
| $CrO_3$ | trióxido de cromo | óxido de cromo(VI) |
| $MnO$ | óxido de manganeso | óxido de manganeso(II) |
| $MnO_2$ | dióxido de manganeso | óxido de manganeso(IV) |
| $FeO$ | óxido de hierro | óxido de hierro(II) |
| $Fe_2O_3$ | trióxido de dihierro | óxido de hierro(III) |
| $CoO$ | óxido de cobalto | óxido de cobalto(II) |
| $Co_2O_3$ | trióxido de dicobalto | óxido de cobalto(III) |
| $Cu_2O$ | óxido de dicobre | óxido de cobre(I) |
| $CuO$ | óxido de cobre | óxido de cobre(II) |
| $B_2O_3$ | óxido de boro | óxido de boro |
| $CO$ | óxido de carbono | óxido de carbono(II) |
| $CO_2$ | dióxido de carbono | óxido de carbono(IV) |
| $N_2O$ | óxido de dinitrógeno | óxido de nitrógeno(I) |
| $NO$ | óxido de nitrógeno | óxido de nitrógeno(II) |
| $N_2O_3$ | trióxido de dinitrógeno | óxido de nitrógeno(III) |
| $NO_2$ | dióxido de nitrógeno | óxido de nitrógeno(IV) |
| $N_2O_4$ | tetróxido de dinitrógeno | |
| $N_2O_5$ | pentóxido de dinitrógeno | óxido de nitrógeno(V) |
| $SO_2$ | dióxido de azufre | óxido de azufre(IV) |
| $SO_3$ | trióxido de azufre | óxido de azufre(VI) |
| $Cl_2O$ | óxido de dicloro | óxido de cloro(I) |
| $ClO_2$ | dióxido de cloro | óxido de cloro(IV) |

**Otras combinaciones binarias**.-

**Metales y no metales**: La fórmula se escribe colocando el metal a la izquierda y el no metal a la derecha. Igual que se encuentran en la tabla periódica, es decir, los metales a la izquierda y los no metales a la derecha. Se nombran empezando por el no-metal con el sufijo **-uro**.

| **Fórmula** | **Nombre sistemático** | **Nombre según Stock** |
|---|---|---|
| $CaF_2$ | difluoruro de calcio | fluoruro de calcio |
| $FeCl_2$ | dicloruro de hierro | cloruro de hierro(II) |
| $FeCl_3$ | tricloruro de hierro | cloruro de hierro(III) |
| $CuBr$ | bromuro de cobre | bromuro de cobre(I) |
| $CuBr_2$ | dibromuro de cobre | bromuro de cobre(II) |
| $MnS$ | sulfuro de manganeso | sulfuro de manganeso(II) |
| $MnS_2$ | disulfuro de manganeso | sulfuro de manganeso(IV) |
| $V_2S_5$ | pentasulfuro de divanadio | sulfuro de vanadio(V) |

| | | |
|---|---|---|
| $Mg_3N_2$ | dinitruro de trimagnesio | nitruro de magnesio |
| CrB | boruro de cromo | boruro de cromo(III) |
| $Ni_2Si$ | siliciuro de diníquel | siliciuro de níquel(II) |
| $K_2Se$ | seleniuro de dipotasio | seleniuro de potasio |
| $Ni_2Si$ | siliciuro de diníquel | siliciuro de níquel(II) |
| $Hg_3N_2$ | dinitruro de trimercurio | nitruro de mercurio(II) |
| $SbF_3$ | trifluoruro de antimonio | fluoruro de antimonio(III) |

**No metal con no metal**: Estas combinaciones se nombran igual que las anteriores, es decir, añadiendo la **terminación -uro al elemento que esté escrito a la derecha**. Debe colocarse a la derecha el que esté más a la derecha en la siguiente secuencia (más a la derecha en la Tabla Periódica) o más arriba en un grupo:

**Rn, Xe, Kr, Ar, Ne, He, B, Si, C, Sb, As, P, N, H, Te, Se, S, At, I, Br, Cl, F**

| Fórmula | Nombre sistemático | Nombre según Stock |
|---|---|---|
| BrF | fluoruro de bromo | fluoruro de bromo(I) |
| $BrF_3$ | trifluoruro de bromo | fluoruro de bromo(III) |
| BrCl | cloruro de bromo | cloruro de bromo(I) |
| $IBr_3$ | tribromuro de yodo | bromuro de yodo(III) |
| $IF_7$ | heptafluoruro de yodo | fluoruro de yodo(VII) |
| $SF_4$ | tetrafluoruro de azufre | fluoruro de azufre(IV) |
| $NCl_3$ | tricloruro de nitrógeno | cloruro de nitrógeno(III) |
| SiC | carburo de silicio | carburo de silicio |
| BP | fosfuro de boro | fosfuro de boro |
| $As_2Se_3$ | triseleniuro de diarsénico | seleniuro de arsénico(III) |
| $CS_2$ | disulfuro de carbono | sulfuro de carbono |
| $Si_3N_4$ | tetranitruro de trisilicio | nitruro de silicio |
| $B_2S_3$ | trisulfuro de diboro | sulfuro de boro |

**Ácidos Inorgánicos**.-

Los ácidos inorgánicos los podemos dividir en **hidrácidos**, ya vistos, y **oxoácidos**. Los oxoácidos tienen de fórmula general $\mathbf{H_aX_bO_c}$ siendo X un elemento no metálico y a veces un metal de transición que se encuentra en estado de oxidación elevado.

Para calcular el número de oxidación del elemento X, en el oxoácido, que ha de ser positivo, consideramos que cada átomo de O tiene número de oxidación -2 y que cada átomo de H tiene +1. Es decir: nº de oxidación del átomo X=(2·c-a)/b

**Si X es halógeno o del grupo 17**:

| Fórmula | Nombre tradicional | Nombre funcional | Nombre sistemático |
|---|---|---|---|
| HClO | ácido hipocloroso | ácido oxoclórico(I) | oxoclorato(I) de hidrógeno |
| HBrO | ácido hipobromoso | ácido oxobrómico(I) | oxobromato(I) de hidrógeno |
| HIO | ácido hipoyodoso | ácido oxoyódico(I) | oxoyodato(I) de hidrógeno |
| $HClO_2$ | ácido cloroso | ácido dioxoclórico(III) | dioxoclorato(III) de hidrógeno |
| $HClO_3$ | ácido clórico | ácido trioxoclórico(V) | trioxoclorato(V) de hidrógeno |
| $HBrO_3$ | ácido brómico | ácido trioxobrómico(V) | trioxobromato(V) de hidrógeno |
| $HClO_4$ | ácido perclórico | ácido tetraoxoclórico(VII) | tetraoxoclorato(VII) de hidrógeno |

**Sufijos (-oso, -ico) y prefijos (hipo-, per-, meta- y orto-)**

- Cuando un elemento presenta **dos estados de oxidación**, se utiliza la terminación **-oso** para señalar aquel compuesto en el que el elemento principal actúa con el número de oxidación menor, y se añade la terminación **-ico** cuando es la superior.
- Cuando un elemento puede actuar con **más de dos estados de oxidación** se utilizan los prefijos **hipo-** (del griego hypo que significa inferior) para la más inferior y **per-** (del griego hyper que significa superior) para la más superior.
- Los prefijos **meta-** y **orto-** no indican diferencias en los estados de oxidación sino la cantidad de agua que contienen. El prefijo meta- se utiliza para indicar que el ácido es el que tiene menor contenido en agua y el prefijo orto- para indicar el que tiene mayor contenido en agua. Los ácidos $HIO_4$ y $H_5IO_6$ se diferencian en el contenido de agua, el primero se llama metaperyódico y el segundo ortoperyódico.
- El prefijo **di-** se utiliza cuando el número de átomos del elemento principal es el doble.

Fórmulas Nombre tradicional Nombre funcional Nombre sistemático

| | | | |
|---|---|---|---|
| $H_2SO_3$ | ácido sulfuroso | ácido trioxosulfúrico(IV) | trioxosulfato(IV) de hidrógeno |
| $H_2SO_4$ | ácido sulfúrico | ácido tetraoxosulfúrico(VI) | tetraoxosulfato(VI) de hidrógeno |
| $H_2SeO_3$ | ácido selenioso | ácido trioxoselénico(IV) | trioxoseleniato(IV) de hidrógeno |
| $H_2SeO_4$ | ácido selénico | ácido tetraoxoselénico(VI) | tetraoxoseleniato(VI) de hidrógeno |
| $H_2Se_2O_7$ | ácido diselénico | ácido heptaoxodiselénico(VI) | heptaoxodiseleniato(VI) de hidrógeno |
| $H_2TeO_3$ | ácido teluroso | ácido trioxotelúrico(IV) | trioxotelurato(IV) de hidrógeno |
| $HNO_2$ | ácido nitroso | ácido dioxonítrico(III) | dioxonitrato(III) de hidrógeno |
| $HNO_3$ | ácido nítrico | ácido trioxonítrico(V) | trioxonitrato(V) de hidrógeno |
| $H_3PO_4$ | ácido fosfórico | ácido tetraoxofosfórico(V) | tetraoxofosfato(V) de hidrógeno |
| $H_3AsO_4$ | ácido ortoarsénico | ácido tetraoxoarsénico(V) | tetraoxoarseniato(V) de hidrógeno |
| $H_3AsO_3$ | ácido ortoarsenioso | ácido trioxoarsénico(III) | trioxoarseniato(III) de hidrógeno |
| $H_2CO_3$ | ácido carbónico | ácido trioxocarbónico(IV) | trioxocarbonato(IV) de hidrógeno |
| $H_4SiO_4$ | ácido ortosilícico | ácido tetraoxosilícico(IV) | tetraoxosilicato(IV) de hidrógeno |
| $H_3BO_3$ | ácido ortobórico | ácido trioxobórico(III) | trioxoborato(III) de hidrógeno |
| $H_2MnO_4$ | ácido mangánico | ácido tetraoxomangánico(VI) | tetraoxomanganato(VI) de hidrógeno |
| $HMnO_4$ | ácido permangánico | ácido tetraoxomangánico(VII) | tetraoxomanganato(VII) de hidrógeno |
| $H_2CrO_4$ | ácido crómico | ácido tetraoxocrómico(VI) | tetraoxocromato(VI) de hidrógeno |
| $H_2Cr_2O_7$ | ácido dicrómico | ácido heptaoxodicrómico(VI) | heptaoxodicromato(VI) de hidrógeno |
| $H_2MoO_4$ | ácido molibdico | ácido tetraoxomolíbdico(VI) | tetraoxomolibdato(VI) de hidrógeno |
| $H_2WO_4$ | ácido wolfrámico | ácido tetraoxowolfrámico(VI) | tetraoxowolframato(VI) de hidrógeno |

**Ácidos con enlaces carbono-nitrógeno**:

$H-C\equiv N$ ácido cianhídrico; $H-O-C\equiv N$ ácido ciánico; $H-N=C=O$ ácido isociánico

**Reglas para ayudar a formular:** Una vez conocidos los estados de oxidación más usuales

a) Prestar atención al sufijo (-oso, -ico) y al posible prefijo (hipo-, per-) del compuesto que nos da el estado de oxidación del elemento. Por ejemplo, el ácido perclórico es un ácido en el que el Cl tiene el estado de oxidación superior (VII ó +7).
b) Tener en cuenta que los prefijos meta- y orto- indican distinto grado de hidratación y que los prefijos di- o piro-, tri-, tetra-, etc.., nos indican el grado de polimerización.

**Iones: cationes y aniones**.-

**Cationes:** Son las especies químicas cargadas positivamente. Cuando un átomo pierde electrones de la capa de valencia adquiere una carga neta positiva. **Aniones:** Son las especies químicas cargadas negativamente. Los más simples son los monoatómicos que proceden de la ganancia de uno o más electrones.

| **Cationes** | **Nombre** | **Aniones** | **Nombre** |
|---|---|---|---|
| $H^+$ | ion hidrógeno | $H^-$ | Ion hidruro |
| $Li^+$ | ion litio | $F^-$ | Ion fluoruro |
| $Cu^+$ | ion cobre(I) | $Br^-$ | Ion bromuro |
| $Cu^{2+}$ | ion cobre(II) | $I^-$ | Ion yoduro |
| $Fe^{2+}$ | ion hierro(II) | $S^{2-}$ | Ion sulfuro |
| $Fe^{3+}$ | ion hierro(III) | $Se^{2-}$ | ion seleniuro |
| $NO^+$ | catión monooxonitrógeno(III) ó catión nitrosilo | $Te^{2-}$ | ion telururo |
| $(NO_2)^+$ | catión dioxonitrógeno(V) ó catión nitroilo | $N^{3-}$ | ion nitruro |
| $VO^+$ | catión monooxovanadio(III) | $P^{3-}$ | ion fosfuro |
| $VO^{2+}$ | catión monooxovanadio(IV) | $C^{4-}$ | ion carburo |
| $VO^{3+}$ | catión monooxovanadio(V) | $Si^{4-}$ | ion siliciuro |
| $(UO_2)^+$ | ion dioxouranio(V) | $B^{3-}$ | ion boruro |
| $(UO_2)^{2+}$ | ion dioxouranio(VI) | $(O_2)^{2-}$ | ion peróxido |
| $H_3O^+$ | ion oxonio | $(O_2)^-$ | ion hiperóxido |
| $(PH_4)^+$ | ion fosfonio | $(O_3)^-$ | ion ozónido |
| $(NH_4)^+$ | ion amonio (nitronio) | $(N_3)^-$ | ion aziduro |
| $H_3S^+$ | ion sulfonio | | |

| **Aniones** | **Nombre tradicional** | **Nombre sistemático** |
|---|---|---|
| $ClO^-$ | ion hipoclorito | ion monooxoclorato(I) |
| $(ClO_2)^-$ | ion clorito | ion dioxoclorato(III) |
| $(ClO_3)^-$ | ion clorato | ion trioxoclorato(V) |
| $(ClO_4)^-$ | ion perclorato | ion tetraoxoclorato(VII) |
| $(SO_3)^{2-}$ | ion sulfito | ion trioxosulfato(IV) |

| | | |
|---|---|---|
| $(SO_4)^{2-}$ | ion sulfato | ion tetraoxosulfato(VI) |
| $(S_2O_7)^{2-}$ | ion disulfato | ion heptaoxodisulfato(VI) |
| $(CrO_4)^{2-}$ | ion cromato | ion tetraoxocromato(VI) |
| $(Cr_2O_7)^{2-}$ | ion dicromato | ion heptaoxodicromato(VI) |
| $(MnO_4)^{2-}$ | ion manganato | ion tetraoxomanganato(VI) |
| $(MnO_4)^{-}$ | ion permanganato | ion tetraoxomanganato(VII) |
| $(BO_3)^{3-}$ | ion ortoborato | ion trioxoborato(III) |
| $(SiO_4)^{4-}$ | ion ortosilicato | ion tetraoxosilicato(IV) |
| $(PO_4)^{3-}$ | ion ortofosfato | ion tetraoxofosfato(V) |
| $(IO_6)^{5-}$ | ion ortoperyodato | ion hexaoxoyodato(VII) |
| $(NO_2)^{-}$ | ion nitrito | ion dioxonitrato(III) |
| $(NO_3)^{-}$ | ion nitrato | ion trioxonitrato(V) |
| $(HSO_4)^{-}$ | ion hidrógenosulfato | ion hidrógenotetraoxosulfato(VI) |
| $(HPO_4)^{2-}$ | ion hidrógenofosfato | ion hidrógenotetraoxofosfato(V) |
| $(H_2PO_4)^{-}$ | ion dihidrógenofosfato | ion dihidrógenotetraoxofosfato(V) |
| $HO^{-}$ | ion hidróxido | |
| $(PS_4)^{3-}$ | ion tetratiofosfato(V) | |
| $NH_2^{-}$ | ion amiduro | |

**Peróxidos, hiperóxidos y ozónidos**.-

Son compuestos que contienen los iones peróxido $(O_2)^{2-}$, hiperóxido $(O_2)^{-}$ o bien el ion ozónido $(O_3)^{-}$. Ejemplos

| Fórmula | Nombre tradicional | Nombre sistemático |
|---|---|---|
| $H_2O_2$ | peróxido de hidrógeno | dióxido de dihidrógeno |
| $K_2O_2$ | peróxido de potasio | dióxido de dipotasio |
| $CuO_2$ | peróxido de cobre(II) | dióxido de cobre(II) |
| $CaO_2$ | peróxido de calcio | dióxido de calcio |
| $BaO_2$ | peróxido de bario | dióxido de bario |
| $ZnO_2$ | peróxido de cinc | dióxido de cinc |
| $NaO_2$ | hiperóxido de sodio | dióxido de sodio |
| $CaO_4$ | hiperóxido de calcio | tetraóxido de calcio |
| $MgO_4$ | hiperóxido de magnesio | tetraóxido de magnesio |
| $KO_2$ | hiperóxido de potasio | dióxido de potasio |
| $NaO_2$ | hiperóxido de sodio | dióxido de sodio |
| $KO_3$ | ozónido de potasio | trióxido de potasio |
| $CsO_3$ | ozónido de cesio | trióxido de cesio |

**Hidróxidos**.- Son compuestos formados por combinación del anión hidróxido $(HO^{-})$ y un catión metálico o un catión poliatómico que se comporta como tal.

| Fórmula | Nombre sistemático | Nombre según Stock |
|---|---|---|
| $NaOH$ | hidróxido de sodio | hidróxido de sodio |
| $Mg(OH)_2$ | dihidróxido de magnesio | hidróxido de magnesio |
| $Fe(OH)_3$ | trihidróxido de hierro | hidróxido de hierro(III) |
| $Al(OH)_3$ | trihidróxido de aluminio | hidróxido de aluminio |
| $CuOH$ | monohidróxido de cobre | hidróxido de cobre(I) |

**Sales de ácidos inorgánicos**.- Se denominan sales a los compuestos formados por la unión de un catión con un anión diferente de los aniones hidruro, óxido y hidróxido.

| Fórmula | Nombre tradicional | Nombre sistemático |
|---|---|---|
| $NaClO$ | hipoclorito de sodio | monooxoclorato(I) de sodio |
| $NaClO_2$ | clorito de sodio | dioxoclorato(III) de sodio |
| $NaClO_3$ | clorato de sodio | trioxoclorato(V) de sodio |
| $NaClO_4$ | perclorato de sodio | tetraoxoclorato(VII) de sodio |
| $NaBrO$ | hipobromito de sodio | monooxobromato(I) de sodio |
| $AlBO_3$ | ortoborato de aluminio | trioxoborato(III) de aluminio |
| $K_2SO_3$ | sulfito de potasio | trioxosulfato(IV) de potasio |
| $KMnO_4$ | permanganato de potasio | tetraoxomanganato(VII) de potasio |

| | | |
|---|---|---|
| $CuClO_2$ | clorito de cobre(I) | dioxoclorato(III) de cobre(I) |
| $AgNO_3$ | nitrato de plata | trioxonitrato(V) de plata |

Cuando es necesario mencionar la multiplicidad de ciertos aniones poliatómicos se utilizan los prefijos multiplicativos bis, tris, tetrakis o tetraquis, pentaquis, etc. Por ejemplo:

| | |
|---|---|
| $Fe_2(SO_4)_3$ | sulfato de hierro(III) |
| $Fe_2(SO_4)_3$ | tetraoxosulfato(VI) de dihierro(III) |
| $Fe_2(SO_4)_3$ | tetraoxosulfato(VI) de hierro(III) |
| $Fe_2(SO_4)_3$ | tris[tetraoxosulfato(VI)] de dihierro |
| $Fe_2(SO_4)_3$ | tris[tetraoxosulfato(VI)] de dihierro(III) |

**Sales ácidas**: Se denominan sales ácidas a las que contienen en su molécula átomos de hidrógeno capaces de ser sustituidos por cationes.

| **Fórmula** | **Nombre** | **Nombre sistemático** |
|---|---|---|
| $NaHSO_4$ | hidrógenosulfato de sodio | hidrógenotetraoxosulfato(VI) de sodio |
| $Na_2HPO_4$ | hidrógenofosfato de sodio | hidrógenotetraoxofosfato(V) de sodio |
| $NaH_2PO_4$ | dihidrógenofosfato de sodio | dihidrógenotetraoxofosfato(V) de sodio |
| $NaHCO_3$ | hidrógenocarbonato de sodio | hidrógenocarbonato(IV) de sodio |
| $Fe(HSO_4)_2$ | hidrógenosulfato de hierro(II) | hidrógenotetraoxosulfato(VI) de hierro(II) |
| KHS | hidrógenosulfuro de potasio | |

**Cuestiones propuestas**

**1)** Tenemos en un recipiente 27 de agua. Calcule: a) la cantidad de sustancia en moles de agua; b) el número de moléculas de agua; c) el número de átomos de oxígeno e hidrógeno.

**2)** Sabiendo que la masa molecular del hidrógeno es 2 y la del oxígeno 32, conteste razonadamente: a) ¿qué ocupará más volumen, un mol de hidrógeno o un mol de oxígeno en las mismas condiciones de presión y temperatura?; b) ¿qué tendrá más masa, un mol de hidrógeno o un mol de oxígeno?; c) ¿dónde habrá más moléculas, en un mol de hidrógeno o en un mol de oxígeno?

**3)** Se tienen tres recipientes que contienen $3'01\cdot10^{23}$ moléculas de $C_4H_{10}$, el primero, $6'02\cdot10^{23}$ moléculas de CO, el segundo y 1 mol de $N_2$, el tercero. Ordénelos en orden creciente de su masa.

**4)** Se dispone de tres recipientes que contienen 1 L de metano gas, 2 litros de nitrógeno gas y 1,5 L de ozono gas, en las mismas condiciones de presión y temperatura. Indique razonadamente: a) ¿cuál contiene mayor número de moléculas?; b) ¿cuál contiene mayor número de átomos?; c) ¿cuál tiene mayor densidad?.

**5)** a) Conceptos de mol, peso atómico, isótopo y volumen molar. b) Ley de las proporciones múltiples, ley de los volúmenes de combinación y el principio de Avogadro.

**6)** a) Enuncia la ley de los volúmenes de combinación y el Principio de Avogadro. b) Define los conceptos: mol, masa atómica molar y fracción molar.

**7)** Analiza la discordancia entre la ley de Gay-Lussac de los volúmenes de combinación y la teoría atómica de Dalton, así como la solución a dicha discordancia.

**PROBLEMAS propuestos**

**Datos** para resolver los Problemas hay que consultar los Pesos atómicos en la Tabla Periódica.

*Presiones*: 760 mm Hg = 1 atm = $d_{Hg}\times g\times h$ = 101.325 Pa = 1,01325 bar.

*Energía*: 1J=1 Pa×1m$^3$ = $10^{-5}$ bar×$10^3$ dm$^3$ = $10^{-2}$ bar×L.

*Constante de los gases* R = 8,3144 J/(mol×K) = 0,083144 bar×L/(mol×K) = 0,082 atm×L·mol$^{-1}$×K$^{-1}$

**1)** Un compuesto químico tiene la siguiente composición centesimal: 40,2% de K; 26,9% de Cr y 32,9% de O. ¿Cuál es la fórmula empírica?. [cromato de potasio]

**2)** La cafeína, un estimulante que se encuentra en café y té, tiene de peso molecular 194 y su composición es: 49,48% de C; 5,19% de H; 28,85% de N y 16,48% de O. Determina la fórmula empírica y la fórmula molecular de la cafeína. [$C_4H_5N_2O$; $C_8H_{10}N_4O_2$]

**3)** Al reaccionar 10,83 g de Hg y 13,71 g de I, resulta un compuesto puro. ¿Cuál es la fórmula empírica?. [diyoduro de mercurio]

**4)** Se sabe que un óxido tiene de fórmula $M_2O_5$. En su forma pura, este compuesto contiene un 75,27% de M en peso. ¿Cuál es el peso atómico de M?. [121,75]

**5)** Determina la fórmula molecular de una sustancia cuyo peso molecular es 72 y que responde a la fórmula empírica de alcano. [$C_5H_{12}$]

**6)** Un compuesto tiene la siguiente composición: 58,8% de C; 9,8% de H y 31,4% de O. Sabiendo que su peso molecular está comprendido entre 180 y 220, determina su fórmula empírica y su fórmula molecular. [$C_5H_{10}O_2$ y $C_{10}H_{20}O_4$]

**7)** Sea la reacción química siguiente: $Sc_{(s)} + HCl_{(aq)} \rightleftarrows ScCl_{3(aq)} + H_{2(g)}$ . a) Ajústala; b) calcula cuántos gramos de Sc reaccionarán con HCl, si se desprenden 2,41 L de hidrógeno gas medidos a 373 K y 96,26 kPa. [2,25 g]

**8)** ¿Cuántos litros de dióxido de azufre se forman al quemar 200 L de sulfuro de hidrógeno y qué volumen de oxígeno se necesita si los reactivos y los productos están a la misma presión y temperatura?. Dato de reacción: $H_2S + 3½\ O_2 \rightleftarrows SO_2 + H_2O$ [200 L y 300 L]

**9)** El dicloruro de mercurio se forma por la reacción siguiente: $Hg_{(l)} + Cl_{2(g)} \rightleftarrows HgCl_{2(s)}$. Si en un recipiente se introducen 100 g de $Hg_{(l)}$ y 100 g de $Cl_{2(g)}$, a) ¿cuántos gramos de $HgCl_{2(s)}$ se formarán y cuántos quedarán sin reaccionar?. [135,5 g de $HgCl_{2(s}$ y 64,7 g de $Cl_{2(g)}$]

**10)** Al quemar gasolina (2,2,4-trimetilpentano), a temperatura y presión ambiental, se produce dióxido de carbono gas y agua líquida. Si quemamos 7 L de gasolina, de densidad 0,704 g/mL, ¿qué volumen de aire, en condiciones normales (0ºC y 1 atm), se necesita para su combustión?. Dato: el aire tiene un 21% en volumen de oxígeno. [57.637,4 L de aire]

**11)** Una muestra de 5,13 g de sulfato de amonio impuro se hacen reaccionar con un exceso de hidróxido de sodio y se obtienen amoniaco, sulfato de sodio y agua. Si se obtienen 1,80 decímetros cúbicos de amoniaco gas, medidos a 293 K y 100 kPa, calcula el porcentaje de sulfato de amonio en la muestra analizada. [95,1%]

**12)** Calcular los gramos de ácido clorhídrico concentrado, de un 36,2% en peso de HCl, que son necesarios para neutralizar: a) una disolución que contiene 1,25 g de hidróxido de calcio, y b) una disolución con 1,30 g

de hidróxido de potasio. Datos: a) $2\ HCl_{(aq)} + Ca(OH)_{2(aq)} \rightleftarrows CaCl_{2(aq)} + 2\ H_2O_{(l)}$; b) $HCl_{(aq)} + KOH_{(aq)} \rightleftarrows KCl_{(aq)} + H_2O_{(l)}$ [3,41 g con el hidróxido de calcio y 2,34 g con el KOH]

**13)** Evaporamos hasta sequedad 300 $cm^3$ de una disolución de la sal $NaClO_{3(aq)}$. Si se continúa calentando, la sal seca se descompone químicamente en $NaCl_{(s)}$ y $O_{2(g)}$, obteniéndose 2,24 $dm^3$ de oxígeno medidos a 300 K y 1 bar. Calcular cuál era la concentración de la disolución de partida. [0,2 mol/L]

**14)** Una mezcla de gases $CH_4$ y $C_2H_6$ ocupa un volumen de 20 $cm^3$, a una determinada P y T. Se hace estallar la mezcla de gases con $O_{2(g)}$ y se obtienen 25 $cm^3$ de $CO_{2(g)}$ medidos en las mismas condiciones de P y T. Calcula la composición volumétrica de la mezcla. [75% de $CH_4$]

**15)** Una mezcla de gases constituida por 0,30 g de $C_2H_6$; 2,9 g de $C_4H_{10}$ y 16,0 g de $O_2$ se halla en un recipiente cerrado de 2 $dm^3$ de volumen a la temperatura de 300 K. Calcula: a) la presión inicial de la mezcla y la presión parcial del oxígeno; b) la presión final de la mezcla después de la reacción a la temperatura de 500 K y la presión parcial del oxígeno que queda. [ 7,0 bar; 6,25 bar; 13 bar; 2,9 bar]

**16)** La combustión de 2,9 g de cierto hidrocarburo gaseoso ($C_xH_y$) produjo 8,8 g de dióxido de carbono. La densidad de dicho hidrocarburo, en condiciones normales, vale 2,59 g/L. Determine la fórmula molecular y escriba las fórmulas estructurales de todos los posibles isómeros. [butano y metilpropano]

**17)** Si tenemos 1,00 g de un compuesto que contiene C, H y O comprobamos que a 473 K y a 44,4 kPa ocupa 1,00 L. Por combustión de 10,0 g del compuesto se obtienen 0,455 mol de dióxido de carbono y 0,455 mol de agua. Calcula la fórmula molecular y nombra los isómeros. [$C_4H_8O_2$; isómeros (ácidos, ésteres y cetonas con hidróxido)]

**18)** Sea la siguiente reacción: $CH_3OH + KMnO_4 + KOH \rightleftarrows K_2MnO_4 + CO_2 + H_2O$. a) Escribe la reacción ajustada; b) calcula el volumen de $CO_2$ que se obtiene a 300 K y 1,013 bar si reaccionan 2 g de $CH_3OH$ con exceso de permanganato de potasio. [1,54 $dm^3$].

**19)** En la fermentación de la glucosa $C_6H_{12}O_6$ se produce $CH_3CH_2OH$ y $CO_2$. Si el rendimiento de la reacción es del 30% y se parte de 2,700 kg de glucosa, ¿cuántos litros de $CO_2$, medidos a 1,5 atm y 300 K se obtendrán? y ¿cuántos gramos y litros de $CH_3CH_2OH$ se obtendrán?. Dato: d(etanol) = 0,78 g/mL. [147,7 L $CO_2$, 414 g de $CH_3CH_2OH$ y 0,531 L]

**20)** En una bombona de acero se mezclan un hidrocarburo gaseoso con la cantidad exacta de oxígeno gas para que al quemarse el hidrocarburo se transforme completamente en dióxido de carbono y agua. Las presiones antes y después de la combustión son iguales, medidas a la misma temperatura. La presión parcial del dióxido de carbono es la misma que la del vapor de agua. Con estos datos determina el peso molecular del hidrocarburo. [28]

**21)** Al quemar 75 L de acetileno en unas determinadas condiciones de presión y temperatura calcula: a) el volumen de oxígeno que se consumirá; b) el volumen de todos los productos gaseosos de la reacción. Suponemos que el volumen de los productos los medimos en las mismas condiciones de P y T iniciales. [187,5 L oxígeno; 225 L de productos]

**22)** Al hacer saltar una chispa eléctrica en el seno de una masa de $O_{2(g)}$ puro que ocupa un volumen de 1000 $cm^3$, a unas determinadas condiciones de P y T, el volumen de la mezcla se reduce a 976 $cm^3$, manteniendo las mismas condiciones de P y T. Calcula el porcentaje de oxígeno gas que se ha transformado en ozono. Dato: $3\ O_{2(g)} \rightleftarrows 2\ O_{3(g)}$. [7,2%]

**23)** Explota 100 $cm^3$ de una mezcla de $H_{2(g)}$ y $O_{2(g)}$ a 298 K y 1 bar, y queda un residuo gaseoso de 7 $cm^3$ de $O_{2(g)}$ medidos a la misma T y P. ¿Qué $\%O_{2(g)}$ había en la mezcla?. [38%]

**24)** Hallar el porcentaje en volumen de vapor de gasolina y aire para que la combustión de la gasolina sea completa. Suponer que el aire tiene un 21% en volumen de oxígeno y que la gasolina está constituida por el compuesto 2,2,4-trimetilpentano. [1,7%]

**25)** Una mezcla de 2,05 g de SnO y $SnO_2$ se calienta y se hace reaccionar con $H_{2(g)}$ obteniéndose estaño puro y agua. El estaño obtenido tiene una masa de 1,75 g. Calcula la composición de la mezcla original. [71,7% de SnO]

**26)** Cuando reacciona el $HNO_{3(aq)}$ con el $Cu_{(s)}$ se obtiene nitrato de cobre(II), monóxido de nitrógeno y agua. Si reaccionan 28,0 g de ácido nítrico al 30% en peso ¿qué cantidad de cobre reaccionará? y ¿cuántos gramos de NO se obtendrán?. [3,18 g Cu; 1,00 g de NO]

**27)** Cuando reacciona el $KMnO_{4(aq)}$ con el $HCl_{(aq)}$ se obtiene $Cl_{2(g)}$, $MnCl_{2(aq)}$, $KCl_{(aq)}$ y $H_2O_{(l)}$. Si reaccionan 165 mL de $HCl_{(aq)}$, del 36% en peso y densidad 1,18 g/mL, con suficiente cantidad de $KMnO_{4(aq)}$. Calcula el volumen de $Cl_{2(g)}$ que se obtendrá a 750 mmHg y a 301K.[15 L]

**28)** Al calentar al aire una muestra de 2,862 g de un óxido de cobre de color rojo reaccionó dando 3,182 g de un óxido de cobre de color negro. Al calentar éste último óxido en presencia de hidrógeno reaccionó dejando un residuo de 2,542 g de cobre puro. a) ¿qué ley de combinación se puede deducir a partir de los datos anteriores?. Enúnciala. ¿Establece las fórmulas empíricas de los dos óxidos?. [Óxido de cobre(I) y óxido de cobre(II)]

**29)** Para obtener bromobenceno se hace reaccionar 85,5 mL de benceno líquido, de densidad 0,88 g/mL, con un exceso de dibromo, obteniéndose además HBr. Si en la práctica se obtuvieron 50,0 g de bromobenceno determina el rendimiento de la reacción. [33%]

**30)** Una pieza de $Zn_{(s)}$ de 1,96 g reacciona con 25 mL de $H_2SO_{4(aq)}$ de concentración 0,275 mol/L. ¿Qué volumen de $H_{2(g)}$, medido a 298 K y 745 mm de Hg, se obtendrá?. [171 mL]

**31)** Una muestra de caliza de 5 g se hizo reaccionar con una disolución de ácido clorhídrico hasta que dejó de desprenderse gas. Se necesitaron 35 mL de la disolución y el gas obtenido ocupó un volumen de 784 mL medidos en C.N. (1 atm y 0ºC). Escribe la reacción química del proceso, calcula la concentración de la disolución de HCl y la riqueza en carbonato de calcio de la caliza. [2 mol/L (2 M); 70%]

**32)** La urea, $CO(NH_2)_2$, se usa como fertilizante y se hace por la reacción del dióxido de carbono con el amoníaco, produciéndose además agua. Si queremos producir 2,50 kg de urea calcula qué volumen de $CO_2$ y $NH_3$, a 200 atm y 450ºC, es necesario. [37 L]

**33)** Las reacciones que se producen en el "airbag" de un automóvil se inician por un impulso eléctrico en una mezcla formada de tres sustancias ($NaN_3$, $KNO_3$, $SiO_2$), que libera un volumen de nitrógeno gas que llena el globo de poliamida. Calcula los gramos de azida de sodio que hay que colocar para que se liberen 70 L de nitrógeno en C.N. [127 g]. A 573K:

$$\begin{cases} 10\ NaN_3 \rightarrow 10\ Na + 15\ N_2 \\ 10\ Na + 2\ KNO_3 \rightarrow 5\ Na_2O + K_2O + N_2 \\ 5\ Na_2O + K_2O + 6\ SiO_2 \rightarrow 5\ Na_2SiO_3 + K_2SiO_3 \end{cases}$$

**34)** El mejor método para preparar oxígeno puro es mediante la descomposición del permanganato de potasio sólido, en vacío y a 215ºC, del que se obtiene oxígeno gas, dióxido de manganeso sólido y manganato de potasio sólido. a) Escribe y ajusta la reacción. b) Calcula la presión del oxígeno gas si reaccionan 1,58 g de permanganato de potasio y se realiza en un recipiente cerrado de 1 L de volumen. Datos: (K)=39; (Mn)=55; (O)=16. [0,20 bar]

**35)** En la Naturaleza existen dos isótopos del boro el $^{10}B$ y el $^{11}B$. El boro-10 tiene una masa atómica relativa de 10,013 y una abundancia del 19,61%. Si el elemento químico Boro tiene un peso atómico de 10,811 determina la masa atómica relativa del isótopo boro-11. [11,01]

**36)** Se prepara el oxígeno por calentamiento de clorato de potasio comercial, según la reacción $2\ KClO_3 \rightleftarrows 2\ KCl + 3\ O_2$. Calcule: a) el peso de KCl, en gramos, que se obtendrá a partir de 3 g de $KClO_3$ del 90% de riqueza; b) el volumen de oxígeno medido a 700 mm de Hg de presión y 25ºC. Datos: R; (O)=16; (Cl)=35,5; (K)=39. [a) 1,64 g; b) 0,875 L]

**37)** Cuando se queman 0,436 g de un compuesto que contiene C, H y O se obtiene 0,958 g de $CO_2$ y 0,522 g de $H_2O$. Calcule la fórmula empírica del compuesto. Calcule la fórmula molecular sabiendo que su densidad, medida en condiciones normales, es de 2,679 g/L. [$C_3H_8O$]

**38)** Se hacen reaccionar 10 g de cinc metálico con ácido sulfúrico en exceso. Si el rendimiento de la reacción es del 80% calcule: a) el volumen de hidrógeno que se obtiene, medido a 27ºC y 740 mm de Hg de presión; b) la masa de sulfato de cinc formado. Datos: R; (O)=16; (S)=32; (Zn)=65,39. [a) 3,09 L; b) 19,745 g]

**39)** Para calcular la cantidad de alcohol en la sangre, un método sencillo consiste en determinar el alcohol etílico o etanol en el aliento. El alcohol de la sangre se difunde a través de los pulmones y llega al aliento, siendo la proporción, aproximada, en 1 mL de sangre hay la misma cantidad de etanol que en 2100 mL de aliento. Luego determinando el etanol en el aliento se determina el de la sangre, la reacción química que se utiliza es la siguiente:
$3\ CH_3CH_2OH + 2\ K_2Cr_2O_{7(\text{naranja})} + 8\ H_2SO_4 \rightleftarrows 3\ CH_3COOH + 2\ Cr_2(SO_4)_{3(\text{verde})} + 2\ K_2SO_4 + 11\ H_2O$. Si la cantidad máxima que se puede expulsar de los pulmones es de 4600 mL y la concentración máxima permitida de alcohol en sangre es del 0,08%, determina los gramos de $K_2Cr_2O_7$ que reaccionarán. [7,47 mg]

**40)** La primera etapa en la producción de ácido nítrico por el proceso de Ostwald es la oxidación del amoníaco, y se produce monóxido de nitrógeno y agua. Escribe y ajusta la reacción. Calcula: a) la masa de óxido nítrico que se puede producir si reaccionan 150 L de amoníaco a 15,0 atm y 200ºC con un exceso de oxígeno; b) el volumen que ocupará el agua producida si se condensa, a estado líquido, que tiene una densidad de 1 g/mL. [a) 1,74 kg; b) 1,566 L]

**41)** El carbonato de magnesio reacciona con el ácido clorhídrico y se obtiene cloruro de magnesio, dióxido de carbono y agua. Determine: a) la cantidad de carbonato de magnesio que se necesita para obtener 5 L de $CO_2$ a 12ºC y 743 mmHg; b) el volumen de ácido clorhídrico del 36% de riqueza y densidad 1,17 g/mL que se necesita para que reaccione todo el carbonato de magnesio calculado en el apartado anterior. [a) 17,6 g; b) 36,4 mL]

**42)** En la etiqueta de un frasco con ácido sulfúrico $H_2SO_4$ figuran los siguientes datos: d = 1,84 g/mL y 96% de porcentaje en peso. Calcule: a) La concentración de la disolución en mol/L; b) el volumen en mL de una disolución de hidróxido de sodio NaOH, de concentración 2 M, necesarios para reaccionar con 10 mL del ácido sulfúrico del frasco. [a) 18 M; b) 180 mL]

**Ejemplos propuestos de formulación y nomenclatura**

1) Cloruro de hidrógeno
2) Yoduro de hidrógeno
3) Sulfuro de hidrógeno
4) Amoniaco
5) Silano
6) Hidruro de litio
7) Hidruro de sodio
8) Hidruro de magnesio
9) Hidruro de aluminio
10) Óxido de hierro(II)
11) Óxido de hierro(III)
12) Tetraóxido de trihierro
13) Óxido de cobre(II)
14) Óxido de cromo(II)
15) Óxido de cromo(VI)
16) Monóxido de nitrógeno
17) Tetraóxido de dinitrógeno
18) Dióxido de azufre
19) Óxido de cinc
20) Fluoruro de oxígeno
21) Fluoruro de calcio
22) Cloruro de hierro(III)
23) Bromuro de cobre(II)
24) Sulfuro de manganeso(IV)
25) Boruro de cromo(III)
26) Fluoruro de bromo(I)
27) Fluoruro de bromo(III)
28) Sulfuro de carbono
29) Fluoruro de yodo(VII)
30) Fluoruro de azufre(IV)
31) Ácido hipocloroso
32) Ácido hipobromoso
33) Ácido ortoarsenioso
34) Ácido ortofosfórico
35) Ácido sulfuroso
36) Ácido selenioso
37) Ácido cloroso
38) Ácido nitroso
39) Ácido carbónico
40) Ácido nítrico
41) Ácido sulfúrico
42) Ácido selénico
43) Ácido perclórico
44) Ácido permangánico
45) Ácido ortofosforoso
46) Ácido ortobórico
47) Ácido crómico
48) Ácido yódico
49) Ion cobre(II)
50) Ion litio
51) Ion hidrógeno
52) Catión nitrosilo
53) Ion amonio
54) Ion oxonio
55) Catión nitroílo
56) Ion hidruro
57) Ion cloruro
58) Ion fluoruro
59) Ion sulfuro
60) Ion bromuro
61) Ion yoduro
62) Ion cianuro
63) Ion hipoclorito
64) Ion clorito
65) Ion permanganato
66) Ion manganato
67) Ion cromato
68) Ion dicromato
69) Ion sulfito
70) Ion sulfato
71) Ion carbonato
72) Ion perclorato
73) Ion clorato
74) Ion hidróxido
75) Hidróxido de bario
76) Hidróxido de litio
77) Cloruro de sodio
78) Hipoclorito de sodio
79) Sulfato de potasio
80) Bromato de litio
81) Bromato de hierro(III)
82) Ortofosfato de calcio
83) Sulfito de aluminio
84) Hidrogenosulfato de potasio
85) Hidrogenocarbonato de sodio
86) Hidrogenoortofosfato de calcio
87) Hidrogenosulfato de cinc
88) $MgH_2$
89) $FeCl_2$
90) $FeCl_3$
91) CuBr
92) $Cr_2O_3$
93) $CrO_3$
94) MnO
95) $MnO_2$
96) $H_2SO_3$
97) $H_2SO_4$
98) $H_2SeO_3$
99) $H_2SeO_4$
100) $H_2TeO_3$
101) $HNO_2$
102) $HNO_3$
103) KClO
104) $NaClO_2$
105) $KClO_3$
106) $KClO_4$
107) KBrO
108) $AlBO_3$
109) $K_2SO_3$
110) $KMnO_4$
111) $CuClO_2$
112) $AgNO_3$
113) $NaHSO_4$
114) $NaHCO_3$

**Problemas de "Movimiento rectilíneo"**

**1)** Una bola se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s. Dos segundos más tarde se lanza otra con la misma velocidad. ¿Dónde y cuando se encuentran? ¿Cuál es su velocidad cuando se encuentran?. [122,7 m; 6,10 s; -9,78 m/s y +9,82 m/s]

**Respuesta**:

Considera el movimiento en el eje vertical OY. Las bolas se encuentran en la posición y que es la misma para las dos

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 50\,\frac{m}{s} \\ g = 9,8\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y = v_0(t-2) - \frac{1}{2}g(t-2)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0(t-2) - \frac{1}{2}g(t-2)^2 \\ t = 6,10\ s \\ y = 122,7\ m \end{array}\right.$$

$$v = v_0 - gt = 50\,\frac{m}{s} - 9,8\,\frac{m}{s^2} \times 6,10\ s = -9,78\,\frac{m}{s}$$

$$v = v_0 - gt = 50\,\frac{m}{s} - 9,8\,\frac{m}{s^2} \times (6,10-2)\ s = 9,82\,\frac{m}{s}$$

**2)** Un cuerpo se está moviendo a lo largo de una línea recta de acuerdo a la ley $x = 16t - 6t^2$, donde x se mide en metros y t en segundos. a) Encuentra la posición del cuerpo en el tiempo t= 1s. b) ¿En qué tiempo pasa el origen?. c) calcula la velocidad promedio en el intervalo de tiempo de 0 a 2 s. d) Encuentra la expresión general para la velocidad promedio en el intervalo $t_0<t<(t_0+\Delta t)$. e) Calcula la velocidad para el tiempo t=0. g) ¿En qué tiempo y posiciones el cuerpo estará en reposo?. h) Encuentra la expresión general para la aceleración promedio en el intervalo de tiempo $t_0<t<(t_0+\Delta t)$. i) Encuentra la expresión general para la aceleración en cualquier tiempo. j) ¿En qué tiempos es cero la aceleración?. k) Dibuja sobre unos ejes, x-t, v-t y a-t. l) ¿En qué tiempos es el movimiento acelerado y en que tiempos es retardado?. [a) 10 m; b) 2,7 s y 0; c) 4 m/s; d) $16-12t_0-6\Delta t$ m/s; e) 16-2t m/s; f) 16 m/s; g) 1,33 s y 10,7 m sólo; h) -12 m/s²; i) -12 m/s²; j) nunca; l) retardado para $0<t<1,33s$, acelerado en la dirección negativa del eje X para $t>1,33s$]

**Respuesta**:

$$x = 16t - 6t^2 \left\{x = 16\cdot 1 - 6\cdot 1^2 = 10\,m\right\} \left\{x = 0 = 16t - 6t^2 \quad \Rightarrow t = \frac{16}{6}s\right\} \left\{v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{2-0} = \frac{8\ m}{2\ s} = 4\,\frac{m}{s}\right\}$$

$$\left\{v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\left[16(t_0+\Delta t) - 6(t_0+\Delta t)^2\right] - \left[16t_0 - 6t_0^2\right]}{\Delta t} = 16 - 12t_0 - 6\Delta t\right\} \left\{v = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} == 16 - 12t\right\}$$

$$\left\{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\left[16 - 12(t_0+\Delta t)\right] - \left[16 - 12t_0\right]}{\Delta t} = -12\,\frac{m}{s^2} = a\right\}$$

**3)** Una piedra cae desde un globo que está descendiendo a una velocidad uniforme de 12 m/s. a) Calcula la velocidad y la distancia que recorre la piedra después de 10 s. b) Soluciona el mismo problema para el caso de que el globo suba. [a) 110 m/s hacia abajo; 610 m; b) 86 m/s hacia abajo; 370 m por debajo del punto inicial]

**Respuesta**: Movimiento en el eje vertical OY

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = -12\,\frac{m}{s} \\ t = 10\ s \\ g = 9,8\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v = v_0 - gt = -12\,\frac{m}{s} - 9,8\,\frac{m}{s^2}\times 10\ s = -110\,\frac{m}{s} \\ \Delta y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -12\,\frac{m}{s}\times 10\ s - \frac{1}{2}9,8\,\frac{m}{s^2}\times(10\ s)^2 = -610\ m \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = +12\,\frac{m}{s} \\ t = 10\ s \\ g = 9,8\,\frac{m}{s^2} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v = v_0 - gt = +12\,\frac{m}{s} - 9,8\,\frac{m}{s^2}\times 10\ s = -86\,\frac{m}{s} \\ \Delta y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = +12\,\frac{m}{s}\times 10\ s - \frac{1}{2}9,8\,\frac{m}{s^2}\times(10\ s)^2 = -370\ m \end{array}\right.$$

**4)** Un hombre colocado en lo alto de un edificio lanza una bola verticalmente hacia arriba con una velocidad de 12,25 m/s. La bola llega al suelo a los 4,25 s. a) ¿Cuál es la altura máxima que al-

canza la bola?. b) ¿Cuál es la altura del edificio?. c) ¿Con qué velocidad alcanza la bola el suelo?. [a) 44,1 m por encima del suelo; b) 36,4 m; c) 29,4 m/s]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases}\Delta y = y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \\ v = v_0 + at\end{cases}\right\}\left\{\begin{cases}v_0 = 12,25\,\frac{m}{s} \\ y_0 = y_{edificio} \\ t = 4,25\ s \\ a = -g = -9,8\,\frac{m}{s^2}\end{cases}\right\}$$

$$\left.\begin{cases}\Delta y = y - y_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ \Delta y = 0 - y_{edificio} = 12,25\,\frac{m}{s} \times 4,25\ s - \frac{1}{2}9,8\,\frac{m}{s^2} \times (4,25\ s)^2 = -36,4\ m\end{cases}\right\} y_{edificio} = 36,4\ m$$

$$\begin{cases} y_{máxima} = y_0 + \dfrac{v^2 - v_0^2}{-2g} = 36,4\ m + \dfrac{0 - \left(12,25\,\frac{m}{s}\right)^2}{-2 \times 9,8\,\frac{m}{s^2}} = 44,1\ m \end{cases}$$

$$v = v_0 - gt = 12,25\,\frac{m}{s} - 9,8\,\frac{m}{s^2} \times 4,25\ s = -29,4\,\frac{m}{s}$$

**5)** Una piedra se deja caer desde lo alto de un edificio. El sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 6,5 s después de dejarla caer. Si la velocidad del sonido es de 340 m/s calcula la altura del edificio. [175,4 m]

**Respuesta**: Movimiento en el eje vertical OY y la aceleración de la gravedad a = -g = -9,8 m/s$^2$.

$$\left.\begin{cases} v_{sonido} = 340\,\frac{m}{s} \\ y_0 = y_{suelo} = 0 \\ t_{total} = 6,5\ s \\ g = 9,8\,\frac{m}{s^2}\end{cases}\right\}\left\{\begin{cases}\text{Bajada piedra: } \Delta y = 0 - y_{edificio} = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}9,8t^2 \\ \text{Subida sonido: } \Delta y = y_{edificio} - 0 = v_{sonido}(6,5 - t) \\ y_{edificio} = \frac{1}{2}9,8t^2 = 340(6,5 - t)\end{cases}\right. \qquad \begin{cases} t = 5,98\ s \\ y_{edificio} = 175\ m \end{cases}$$

**6)** Mientras permanecemos en el interior de un ascensor, vemos caer un objeto desde el techo. La altura del ascensor es de 3 m. a) Si el ascensor se está moviendo hacia arriba con una velocidad constante de 2,2 m/s, calcula el tiempo que tarda en llegar al suelo del ascensor. b) Calcula el tiempo que tarda en caer el objeto si el ascensor parte del reposo y sube con una aceleración constante de 4 m/s$^2$. [a) 0,78 s; b) 0,66 s)]

**Respuesta**: Como el ascensor y el objeto se mueven en línea recta vertical consideramos que lo hacen por el eje OY y el origen es el suelo del ascensor. Luego para determinar el tiempo planteamos las ecuaciones de movimiento del objeto y del ascensor.

Si el ascensor sube con velocidad constante, todo objeto contenido en su interior sube con la misma velocidad, por lo que el objeto que cae tiene la misma velocidad inicial

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ascensor: } \{y = y_0 + vt\}\{y = 0 + 2,2\,\frac{m}{s}t\}\{y = 2,2t\} \\ \text{Objeto: } \left\{y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right\}\left\{y = 3\ m + 2,2\,\frac{m}{s}t - \frac{1}{2}9,8\,\frac{m}{s^2}t^2\right\}\{y = 3 + 2,2t - 4,9t^2\}\end{array}\right\}\begin{cases}2,2t = 3 + 2,2t - 4,9t^2 \\ 0 = 3 - 4,9t^2 \\ t = 0,78\ s\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ascensor: } \left\{y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right\}\left\{y = \frac{1}{2}4\,\frac{m}{s^2}t^2\right\}\left\{y = \frac{1}{2}4t^2\right\} \\ \text{Objeto: } \left\{y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right\}\left\{y = 3\ m - \frac{1}{2}9,8\,\frac{m}{s^2}t^2\right\}\left\{y = 3 - \frac{1}{2}9,8t^2\right\}\end{array}\right\}\begin{cases}y = \frac{1}{2}4t^2 = 3 - \frac{1}{2}9,8t^2 \\ \frac{1}{2}(4 + 9,8)t^2 = 3 \\ t = 0,66\ s\end{cases}$$

**7)** Un móvil acelera, desde el reposo, durante 20 s con una aceleración constante de 2 m/s$^2$. Después mantiene la velocidad constante durante otros 20 s. Posteriormente frena, con una aceleración de -3 m/s$^2$, hasta que para. Calcula la distancia total recorrida. [1466,7 m]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases}\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at\end{cases}\right\}\left.\begin{cases}v_0 = 0 \\ a = 2\,\frac{m}{s^2} \\ t = 20\ s\end{cases}\right\}\begin{cases}\Delta x_1 = \frac{1}{2}\times 2\,\frac{m}{s^2}\times(20\ s)^2 = 400\ m \\ v = 2\,\frac{m}{s^2}\times(20\ s) = 40\,\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$\left\{\Delta x_2 = v_m t = 40\,\frac{m}{s}\times(20\ s) = 800\ m\right.$$

$$\left.\begin{cases}\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}\end{cases}\right\}\left.\begin{cases}v = 0 \\ a = -3\,\frac{m}{s^2}\end{cases}\right\}\Delta x_3 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{-\left(40\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\times\left(-3\,\frac{m}{s^2}\right)} = 266{,}7\ m$$

**8)** Desde lo alto de un acantilado, de 200 m de altura, se lanza hacia arriba una piedra, y antes de chocar con el suelo, por debajo del acantilado, recorre los últimos 45 m en 0,5 s. Calcula la velocidad inicial con la que se lanzó la piedra. [68 m/s]

**Respuesta**:

Desde encima de acantilado:

$$\left\{v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y\right\}\left\{\begin{array}{l}\Delta y = -200\ m \\ a = -g = -9{,}8\,\frac{m}{s^2}\end{array}\right\}\ v_0^2 = v^2 - 2a\Delta y = v^2 - 2\times\left(-9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)\times(-200\ m)$$

En los 45 m finales:

$$\left.\begin{cases}\Delta y' = -45\ m \\ t' = 0{,}5\ s\end{cases}\right\}\left.\begin{cases}v = v_i - gt' \\ \Delta y' = v_i t - \frac{1}{2}gt^2\end{cases}\right\}\begin{cases}-45\ m = v_i\times 0{,}5\ s - \frac{1}{2}\times 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\times(0{,}5\ s)^2 \\ v_i = \frac{-45 + \frac{1}{2}\times 9{,}8\times(0{,}5)^2}{0{,}5}\,\frac{m}{s} = -87{,}55\,\frac{m}{s} \\ v = v_i - gt' = -87{,}55\,\frac{m}{s} - 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\times 0{,}5\ s = -92{,}45\,\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$v_0 = \pm\sqrt{v^2 - 2a\Delta y} = \sqrt{\left(-92{,}45\,\frac{m}{s}\right)^2 - 2\times\left(-9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right)\times(-200\ m)} = +68\,\frac{m}{s}$$

**9)** Un objeto tiene una aceleración constante de +3,2 m/s². Si en un instante su velocidad es de 9,6 m/s, ¿cuál será su velocidad a los 2,5 s posteriores y qué velocidad tenía 2,5 s antes?. [17,6 m/s y 1,6 m/s]

**Respuesta**:

$$v = v_0 + a(t - t_0)\quad\left\{\begin{array}{l}a = 3{,}2\,\frac{m}{s^2} \\ v_0 = 9{,}6\,\frac{m}{s} \\ t_0 = 0 \\ t = 2{,}5\ s\end{array}\right\}\quad v = 9{,}6\,\frac{m}{s} + 3{,}2\,\frac{m}{s^2}\times 2{,}5\ s = 17{,}6\,\frac{m}{s}$$

$$v_0 = v - a(t - t_0)\quad\left\{\begin{array}{l}a = 3{,}2\,\frac{m}{s^2} \\ v = 9{,}6\,\frac{m}{s} \\ t_0 = 0 \\ t = 2{,}5\ s\end{array}\right\}\quad v_0 = v - at = 9{,}6\,\frac{m}{s} - 3{,}2\,\frac{m}{s^2}\times 2{,}5\ s = 1{,}6\,\frac{m}{s}$$

**10)** Un electrón con una velocidad inicial de $1{,}5\cdot 10^5$ m/s recorre una zona del espacio de 1 cm de longitud, en la que experimenta una aceleración, y sale con una velocidad de $5{,}7\cdot 10^6$ m/s. Determina la aceleración que experimenta. [$1{,}6\cdot 10^{15}$ m/s²]

**Respuesta**:

$$\left\{v^2 - v_0^2 = 2\cdot a\cdot\Delta x\right\}\quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\cdot\Delta x} = \frac{\left(5{,}7\cdot 10^6\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(1{,}5\cdot 10^5\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\times 0{,}01\ m} = 1{,}6\cdot 10^{15}\,\frac{m}{s}$$

**11)** Desde lo alto de un edificio de 300 m de altura se deja caer una bola A, y en el mismo instante, se lanza desde el suelo hacia arriba otra bola B con una velocidad $v_0$ desconocida. Cuando las

bolas chocan en dirección opuesta la velocidad de la bola A es el doble de la bola B. Calcula a qué altura se produce el choque, el tiempo que tardan en chocar y la velocidad inicial de la bola B. [200 m; 4,52 s; $v_0$ = 54,2 m/s]

**Respuesta**:

$$v = v_0 - gt\begin{cases} v_A = -gt \\ v_B = v_0 - gt \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} v_A = -2v_B \\ -gt = -2(v_0 - gt) = -2v_0 + 2gt \end{cases} \Rightarrow v_0 = \frac{3}{2}gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\begin{cases} y_A = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_B = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} y_A = y_B \\ h - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ h = v_0 t = \frac{3}{2}gt^2 \end{cases}\Bigg\} \quad \begin{cases} y_A = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}\frac{2}{3}h = \frac{2}{3}h = 200\text{ m} \\ t = \sqrt{\frac{2h}{3g}} = 4,52\text{ s} \\ v_0 = \frac{h}{t} = 66,4\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

**12)** Desde lo alto de un edificio de 300 m de altura se deja caer una bola A, y en el mismo instante, se lanza desde el suelo hacia arriba otra bola B con una velocidad $v_0$ desconocida. Cuando las bolas chocan lo hacen en la misma dirección y la velocidad de la bola A es cuatro veces mayor que la bola B. Calcula a qué altura se produce el choque, el tiempo que tardan en chocar y la velocidad inicial de la bola B. [100 m; 6,38 s; $v_0$ = 47 m/s]

**Respuesta**:

$$v = v_0 - gt\begin{cases} v_A = -gt \\ v_B = v_0 - gt \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} v_A = 4v_B \\ -gt = 4(v_0 - gt) = 4v_0 - 4gt \end{cases} \Rightarrow v_0 = \frac{3}{4}gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\begin{cases} y_A = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_B = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} y_A = y_B \\ h - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ h = v_0 t = \frac{3}{4}gt^2 \end{cases}\Bigg\} \quad \begin{cases} y_A = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}\frac{4}{3}h = \frac{1}{3}h = 100\text{ m} \\ t = \sqrt{\frac{4h}{3g}} = 6,38\text{ s} \\ v_0 = \frac{h}{t} = 46,95\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

**13)** En una zona escolar los coches han de parar en una distancia de 4 m. La aceleración de frenada del coche puede alcanzar, como máximo, el valor de -7 m/s², y el tiempo de reacción del conductor es de 0,5 s. Determina la velocidad máxima permitida y la fracción de los cuatro metros que recorre el coche en el tiempo de reacción. [4 m/s = 14,4 km/h; 2 m]

**Respuesta**:

El vehículo recorre una distancia durante los 0,5 s de tiempo de reacción del conductor a velocidad constante y luego con aceleración de frenado

$$\Delta x = \Delta x_{\text{uniforme}} + \Delta x_{\text{acelerado}} = (v_0 t) + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad \begin{cases} v = 0 \\ a = -7\,\frac{m}{s^2} \\ \Delta x = 4\text{ m} \\ t = 0,5\text{ s} \end{cases}\Bigg\}\begin{cases} 4 = 0,5v_0 + \frac{-v_0^2}{2(-7)} = 0,5v_0 + \frac{v_0^2}{14} \\ 56 = 7v_0 + v_0^2 \\ v_0 = 4\,\frac{m}{s} = 14,4\,\frac{km}{h} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta x_{\text{uniforme}}}{4\text{ m}} = \frac{v_0 t}{4\text{ m}} = \frac{4\,\frac{m}{s} \times 0,5\text{ s}}{4\text{ m}} = \frac{2\text{ m}}{4\text{ m}} = 0,5$$

**14)** Una persona viajando a 80 km/h en un coche, a través de la lluvia en una tormenta, observa que el agua al caer forma un ángulo de 80º con la vertical. Cuando la persona se para observa que la lluvia cae verticalmente con respecto al coche. Calcula la velocidad relativa de la lluvia res-

pecto del coche cuando a) el coche está parado, b) el coche se mueve a 80 km/h. [ a) 14,1 km/h; b) 81,2 km/h]

**Respuesta**: La persona viaja en línea recta en sentido +OX, en un sistema móvil, a una velocidad de 80 km/h, y la lluvia cae verticalmente en sentido –OY. Luego la velocidad medida por un observador fijo en la superficie de la Tierra (O) es distinta a la observada por un observador en el sistema móvil (O'), siendo la diferencia la velocidad relativa del móvil respecto del fijo: $v_{Oy} = -v_{y(lluvia)}$; $v_{O'Ox} = 80$ km/h:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{O'O} + \vec{v}_{O'}$$

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'O} = -v_{y(lluvia)}\vec{j} - 80\,\frac{km}{h}\,\vec{i} \begin{cases} \tan 80^o = \dfrac{-80\,\frac{km}{h}}{-v_{y(lluvia)}} \\ v_{y(lluvia)} = 14{,}1\,\frac{km}{h} \end{cases}$$

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'O} = -14{,}1\vec{j} - 80\vec{i}\ \frac{km}{h} \quad \left\{\left|\vec{v}_{O'}\right| = 81{,}2\,\frac{km}{h}\right\}$$

**Problemas de "Movimiento en dos dimensiones"**

**1)** Un objeto se está moviendo en el plano XY. Cuando t=1 s su posición es el punto (2,3) m y cuando t=4 s está en el punto (4,5) m. Calcula el vector velocidad media y su módulo. [$v_x=v_y=2/3$ m/s; v=0,94 m/s]

**Respuesta**: $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{(4-2)\vec{i} + (5-3)\vec{j}\ m}{3\ s} = \dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j}\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \left|\vec{v}_m\right| = 0{,}94\,\frac{m}{s}$

**2)** Conocido el vector de posición de una partícula, de componentes $r_x=t^2$; $r_y=2t$ en metros, $\vec{r} = t^2\vec{i} + 2t\vec{j}$, calcula a los 3 s: a) el vector velocidad y su módulo; b) el vector aceleración y su módulo; c) el vector aceleración tangencial y su módulo; d) el vector aceleración normal y su módulo; e) la ecuación de la trayectoria. [a) $v_x=6$ m/s; $v_y=2$ m/s; b) $a_x=2$ m/s$^2$; c) $a_{t(x)}=1{,}8$ m/s$^2$; $a_{t(y)}=0{,}6$ m/s$^2$; d) $a_{n(x)}=0{,}2$ m/s$^2$; $a_{n(y)}=-0{,}6$ m/s$^2$; e) $y=2x^{½}$].

**Respuesta**: La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando t en las componentes de la posición $x = t^2$; $y = 2t$; siendo $y = 2x^{½}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2\vec{i} + 2t\vec{j}\right) = 2t\vec{i} + 2\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{4t^2+4} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{6\vec{i} + 2\vec{j}\,\frac{m}{s}}{6{,}3\,\frac{m}{s}} = \frac{6}{6{,}3}\vec{i} + \frac{2}{6{,}3}\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(2t\vec{i} + 2\vec{j}\right) = 2\vec{i}\,\frac{m}{s^2} \\ \left|\vec{a}\right| = 2\,\frac{m}{s^2}; \quad \left|\vec{a}\right|^2 = \left|\vec{a}_t\right|^2 + \left|\vec{a}_n\right|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{a}_t\right| = \vec{a}\cdot\vec{u}_t = \left(2\vec{i}\right)\frac{m}{s^2}\cdot\left(\dfrac{6}{6{,}3}\vec{i} + \dfrac{2}{6{,}3}\vec{j}\right) = \dfrac{12}{6{,}3}\,\frac{m}{s^2} = 1{,}9\,\frac{m}{s^2} \\ \left|\vec{a}_n\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}_t\right|^2} = \sqrt{2^2 - 1{,}9^2} = 0{,}62\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

**3)** Desde el suelo se dispara un proyectil con una velocidad de 80 m/s formando un ángulo de 45º con la horizontal. Calcula: a) tiempo de vuelo; b) alcance máximo; c) vector de posición cuando lleva la mitad de tiempo de vuelo; d) ecuación de la trayectoria. [a) 11,5 s; b) 653 m; c) $r_x = 326$ m y $r_y = 163{,}1$ m; d) $y = x - 0{,}0015\cdot x^2$]

**Respuesta**:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} = v_0\cos\alpha\vec{i} + v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\vec{j}$$

Tiempo de vuelo y alcance: $\begin{cases} r_y = 0 = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_{vuelo} = \dfrac{2v_{0y}}{g} \\ r_{x(alcance)} = v_{0x}t = v_{0x}\dfrac{2v_{0y}}{g} \end{cases}$

Si $t = \dfrac{1}{2}t_{vuelo} = \dfrac{v_{0y}}{g} \quad \Rightarrow \vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} \begin{cases} r_x = v_{0x}t = \dfrac{v_{0x}v_{0y}}{g} \\ r_y = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(v_{0y}\right)^2}{g} \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}\right\} y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2$$

**4)** Desde un punto elevado 150 m desde el suelo se dispara horizontalmente un proyectil con una velocidad de 300 m/s. Calcula: a) el tiempo que tardará en caer al suelo; b) el alcance; c) la velocidad con la que llegará al suelo. [a) 5,5 s; b) 1.659 m; c) 304,8 m/s]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases} \vec{r}_0 = r_{0y}\vec{j} \\ \vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} \end{cases}\right\} \text{Tiempo de vuelo y alcance:} \begin{cases} r_y = 0 = r_{0y} + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 = r_{0y} - \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_{vuelo} = \sqrt{\dfrac{2r_{0y}}{g}} \\ r_{x(\text{alcance})} = v_{0x}t = v_{0x}\sqrt{\dfrac{2r_{0y}}{g}} \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = -gt = -g\sqrt{\dfrac{2r_{0y}}{g}} = -\sqrt{2gr_{0y}} \end{cases} \Big\} |\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{(v_{0x})^2 + 2gr_{0y}}$$

**5)** Si un proyectil tiene un ángulo de lanzamiento de 52º por encima de la horizontal y una velocidad inicial de 18 m/s, ¿cuál es la barrera más alta que el proyectil puede saltar por encima?. [10,3 m]

**Respuesta**: Altura máxima: $v_y = 0 = v_{0y} - gt \quad \Rightarrow t = \dfrac{v_{0y}}{g} \quad \Rightarrow r_y = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{(v_{0y})^2}{g}$

**6)** Un rifle está colocado horizontalmente. La velocidad de salida de la bala es de 670 m/s. La bala hace blanco a 0,025 m por debajo de la línea horizontal del rifle. ¿Cuál es la distancia horizontal entre el extremo del rifle y el blanco?. [48 m]

**Respuesta**: $\vec{r} = v_{0x}t\vec{i} - \dfrac{1}{2}gt^2\vec{j} \quad \left\{\begin{array}{l} r_y = -\dfrac{1}{2}gt^2 \\ t = \dfrac{2r_y}{-g} \end{array}\right\} \quad r_x = v_{0x}t = v_{0x}\left(\dfrac{2r_y}{-g}\right)$

**7)** Desde el borde de un acantilado de 60,0 m de altura, se lanza un objeto hacia arriba formando un ángulo de 50º con la horizontal y a una velocidad de 23 m/s. ¿En qué punto por encima del suelo golpea el objeto la pared vertical de un acantilado situado a 20 m de distancia?. [74,9 m]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases} \vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} = 23\cos 50^\circ\vec{i} + 23\,\text{sen}\,50^\circ\vec{j}\ \frac{m}{s} \\ \vec{r}_0 = r_{0y}\vec{j}\ m = 60\vec{j}\ m \end{cases}\right\} \left\{\begin{array}{l} r_x = 20\ m = v_{0x}t \\ r_y = r_{0y} + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{r_x}{v_{0x}} \\ r_y = r_{0y} + v_{0y}\dfrac{r_x}{v_{0x}} - \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{r_x}{v_{0x}}\right)^2 \end{array}\right.$$

**8)** Calcula la velocidad inicial, en magnitud y dirección, de una pelota de golf si a los 5,10 s de vuelo está viajando hacia abajo con una velocidad de 48,6 m/s, formando un ángulo de 22,2º con la horizontal. [55 m/s a 35,1º por encima de la horizontal]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases} v_x = v_{0x} = 48,6\cos 22,2^\circ \\ v_y = v_{0y} - gt = -48,6\,\text{sen}\,22,2^\circ \end{cases}\right\} \left\{\begin{array}{l} v_{0x} = 48,6\cos 22,2^\circ \\ v_{0y} = -48,6\,\text{sen}\,22,2^\circ\ \frac{m}{s} + 9,8\ \frac{m}{s^2}\cdot 5,1\ s \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} |\vec{v}_0| = \sqrt{(v_{0x})^2 + (v_{0y})^2} \\ \alpha = \arctan\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}} \end{array}\right.$$

**9)** Un proyectil es lanzado hacia arriba formando un ángulo con la horizontal. Prueba que el tiempo de vuelo del proyectil desde el suelo a su altura máxima es igual al tiempo de vuelo desde su altura máxima al suelo. Dato: La altura máxima se alcanza cuando $v_y$ sea cero y cuando llegue al suelo el valor de $r_y$ es cero.

**Respuesta**:

Desde el suelo a la altura máxima $\{v_y = 0 = v_{0y} - gt\} \Rightarrow \left\{ t = \frac{v_{0y}}{g} \right\} \left\{ r_{máxima} = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{(v_{0y})^2}{g} \right\}$

Desde la altura máxima al suelo: $r_{suelo} = 0 = r_{máxima} - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{(v_{0y})^2}{g} - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y}}{g}$

**10)** Queremos hacer blanco, con un rifle, a una distancia horizontal de 3534,8 m. Si la velocidad inicial de la bala es de 200 m/s, ¿cuáles son los ángulos posibles del rifle con la horizontal para hacer blanco?. Datos: g=9,8 m/s$^2$; sen (2·ø)=2·senø·cosø . [30º y 60º]

**Respuesta**:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_x = (v_0 \cos\alpha)t \\ r_y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} r_y = 0 = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \end{array} \right\} r_x = \frac{v_0^2 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{r_x g}{v_0^2} = \frac{3534{,}8\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\left(200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 0{,}866 \quad \Rightarrow \operatorname{arc\,sen}(2\alpha) = 60^\circ$$

**11)** Las coordenadas de una partícula en movimiento vienen dadas por: x=t$^2$, y=(t-1)$^2$. a) Encuentra las componentes rectangulares de su velocidad promedio y aceleración promedio en el intervalo de tiempo entre t y t+Δt. b) Aplica los resultados cuando t=2s y Δt=1s. c) Compara los resultados de b con los valores de las componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración en t=2s. [a) $v_x$=2t+Δt m/s; $v_y$=2(t-1)+Δt m/s; $a_x$=$a_y$=2m/s$^2$; b) $v_x$=5 m/s; $v_y$=3m/s; c) $v_x$=4m/s; $v_y$=2m/s]

**Respuesta**:

$$\vec{r} = t^2\vec{i} + (t-1)^2\vec{j} \left\{ \begin{array}{l} \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (r_{2x} - r_{1x})\vec{i} + (r_{2y} - r_{1y})\vec{j} \\ \Delta\vec{r} = \left((t+\Delta t)^2 - t^2\right)\vec{i} + \left((t+\Delta t-1)^2 - (t-1)^2\right)\vec{j} \end{array} \right\} \Delta\vec{r} = \left(2t\Delta t + \Delta t^2\right)\vec{i} + \left(2t\Delta t + \Delta t^2 - 2\Delta t\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = (2t + \Delta t)\vec{i} + (2t + \Delta t - 2)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = (2t)\vec{i} + (2t-2)\vec{j}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{[2(t+\Delta t) - 2t]\vec{i} + [2(t+\Delta t) - 2 - (2t-2)]\vec{j}}{\Delta t} = 2\vec{i} + 2\vec{j}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**12)** Se dispara un proyectil con una velocidad de 100 m/s y formando un ángulo de 60º con la horizontal. Calcula: a) el alcance horizontal; b) la altura máxima; c) el tiempo de vuelo; d) la velocidad y altura después de 10 s. [a) 883,7 m; b) 382,6 m; c) 17,67 s; d) 51,28 m/s y 376 m]

**Respuesta**:

$$\text{Alcance: } r_y = 0 = v_{0y}t_{vuelo} - \frac{1}{2}g(t_{vuelo})^2 \qquad \left\{ \begin{array}{l} t_{vuelo} = \frac{2v_{0y}}{g} \\ r_{x(\text{alcance})} = v_{0x}t_{vuelo} = v_{0x}\frac{2v_{0y}}{g} \end{array} \right.$$

$$\text{Altura máxima: } v_y = 0 = v_{0y} - gt \qquad \left\{ r_y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(v_{0y})^2}{g} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{array} \right\} |\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

$$r_y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

**13)** Un bombardero está volando horizontalmente a una altitud de 1,2 km con una velocidad de 360 km/h. a) ¿Cuánto tiempo antes de llegar a la vertical del blanco deberá soltar la bomba?; b) ¿Cuál es la velocidad de la bomba cuando llega al suelo?; c) ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por la bomba?. [a) 15,65 s; b) 183,1 m/s; c) 1565 m]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{r}_0 = r_{0y}\vec{j}\\ \vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} r_y = 0 = r_{0y} - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_{vuelo} = \sqrt{\frac{2r_{0y}}{g}}\\ r_{x(alcance)} = v_{0x}t = v_{0x}\sqrt{\frac{2r_{0y}}{g}}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} v_x = v_{0x}\\ v_y = -gt_{vuelo}\end{array}\right\}|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

**14)** Una partícula se está moviendo a lo largo de una parábola $y = x^2$ de tal forma que en cualquier tiempo $v_x$=3 m/s. Calcula la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración de la partícula en el punto x=2/3m. [$dy/dx=2x=4/3=v_y/v_x$; $v_x$=3m/s; $v_y$=4m/s; $v=(3^2+4^2)^{1/2}$=5m/s, arctg(4/3); 18 m/s$^2$ en dirección +Y]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}\\ y = x^2\\ x = \frac{2}{3}m\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = 3\frac{m}{s}\\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 2x\cdot 3 = 6x = 4\frac{m}{s}\\ |\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = 5\frac{m}{s}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0\frac{m}{s}\\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dx}\frac{dx}{dt} = 6\cdot 3 = 18\frac{m}{s^2}\end{array}\right\}$$

**15)** a) Calcula la velocidad angular de un disco que rota con movimiento uniforme describiendo 13,2 rad cada 6 s. b) Calcula el período y la frecuencia de rotación. ¿Cuánto tardará el disco en c) rotar un ángulo de 720º y d) realizar 12 revoluciones?. [a) 2,2 rad/s; b) 2,9 s, 0,35 Hz; c) 6,2 s; d) 34,3 s]

**Respuesta**:

$$\left\{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{13,2\text{ rad}}{6\text{ s}} = 2,2\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right\}\left\{\begin{array}{l} T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\text{ rad}}{2,2\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 2,9\text{ s}\\ f = \frac{1}{T} = 0,35\text{ Hz}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{720^o\frac{\pi\text{ rad}}{180^o}}{2,2\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 6,2\text{ s}\\ \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{12\text{ rev}\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}}{2,2\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 34,3\text{ s}\end{array}\right\}$$

**16)** Determina el radio de curvatura en el punto más alto de la trayectoria de un proyectil que se ha lanzado desde el punto inicial formando un ángulo ß con la horizontal. Dato: en el punto más alto la velocidad es horizontal y la aceleración es vertical). [$v^2\cdot\cos^2ß/g$]

**Respuesta**: El radio de curvatura lo determinamos por la aceleración normal que en el punto más alto es totalmente la aceleración de la gravedad $R = \frac{v_y^2}{g} = \frac{(v\cos\beta)^2}{g}$

**17)** Calcula la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración centrípeta de la Luna. La luna realiza una revolución completa cada 28 días y la distancia promedio desde la Tierra a la Luna es de $3,84\cdot10^8$m. [ $2,60\cdot10^{-6}$rad/s; 997 m/s y $2,60\cdot10^{-3}$ m/s$^2$]

**Respuesta**: $\left\{\omega = \frac{2\pi}{T}\right\}\{v = \omega\cdot R\}\left\{a_n = \frac{v^2}{R}\right\}$

**18)** Una rueda partiendo del reposo acelera de tal manera que su velocidad angular se incrementa uniformemente a 200 rpm en 6 s. Después de que ha estado rotando algún tiempo a esta velocidad se aplican los frenos hasta que se para en 5 minutos. El número total de revoluciones de la rueda es de 3100. a) Dibuja la velocidad angular en función del tiempo. b) Calcula el tiempo total de rotación y el ángulo total rotado por la rueda. [18,1' y $1,95\cdot10^4$ rad]

**Respuesta**:

En los primeros 6 s:

$$\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\frac{200\frac{2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{6\text{ s}}(6\text{ s})^2 = 20\pi\text{ rad}$$

En los 5 minutos finales:

$$\Delta\theta_f = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 200\frac{2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 300\text{ s} + \frac{1}{2}\frac{\left(0 - 200\frac{2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)}{300\text{ s}}(300\text{ s})^2 = 1000\pi\text{ rad}$$

En el tiempo intermedio:

$$(3100\cdot 2\pi)\text{ rad} - (\Delta\theta_i + \Delta\theta_f) = (6200\pi - 1020\pi)\text{ rad} = 5180\pi\text{ rad}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{5180\pi\text{ rad}}{200\frac{2\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 777\text{ s}$$

Tiempo total: 6 s + 777 s + 300 s = 1083 s

**19)** Considera un disco, de radio 0,1 m, que puede rotar libremente alrededor de un eje horizontal y una cuerda está envolviéndolo. De la cuerda cuelga un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad siendo su movimiento uniformemente acelerado con una aceleración menor que la de la gravedad. Si en el tiempo t=0 la velocidad del cuerpo es 0,04 m/s y 2 s después ha bajado 0,2 m determina la aceleración tangencial y la aceleración normal en cualquier instante de cualquier punto sobre el anillo del disco. [$a_t$=0,06 m·s$^{-2}$; $a_n$=(0,016+0,048t+0,036t$^2$) m·s$^{-2}$

**Respuesta**:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \begin{cases} -0,2\text{ m} = -0,04\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 2\text{ s} + \frac{1}{2}a(2\text{ s})^2 \\ a = -0,06\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

$$y = \left(-0,04t - 0,03t^2\right)\text{m}\left\{\begin{array}{l} v = \frac{dy}{dt} = (-0,04 - 0,06t)\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a_t = \frac{dv}{dt} = -0,06\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array}\right\}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(-0,04 - 0,06t)^2}{0,1}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \left(0,016 + 0,048t + 0,036t^2\right)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**20)** Una partícula describe una circunferencia de 5 m de radio con velocidad constante de 2 ms$^{-1}$. En un instante dado frena, con una aceleración constante de 0,5 m/s$^2$ hasta pararse. Calcula: a) la aceleración de la partícula antes de empezar a frenar; b) la aceleración 2 s después de empezar a frenar; c) la aceleración angular mientras frena; d) tiempo que tarda en parar; e) número de vueltas que da desde que empieza a frenar hasta que se para. [a) 0,8 m/s$^2$; b) 0,53 m/s$^2$; c) 0,1 rad/s$^2$; d) 4 s; e) 0,12]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{array}{l} v_0 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ R = 5\text{ m} \\ a_t = -0,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array}\right\}\left\{a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{5\text{ m}} = 0,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right\}$$

$$\left\{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 0,53\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\left\{\begin{array}{l} a_t = -0,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,5\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 2\text{ s}\right)^2}{5\text{ m}} = 0,2\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array}\right.\right\}$$

$$\left\{\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{-0,5\,\frac{m}{s^2}}{5\ m} = -0,1\,\frac{rad}{s^2}\right\}$$

$$\left\{t = \frac{v - v_0}{a_t} = \frac{-2\,\frac{m}{s}}{-0,5\,\frac{m}{s^2}} = 4\ s\right\}$$

$$\left\{\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{v_0}{R}t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0,8\ rad \equiv \frac{0,8}{2\pi}vueltas\right\}$$

**21)** Un volante parte del reposo con aceleración constante. Después de dar 100 vueltas la velocidad es de 300 rpm, calcula: a) la aceleración angular; b) la aceleración tangencial de un punto situado a 20 cm del eje. [a) 0,785 rad/s$^2$; b) 0,157 m/s$^2$]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\theta = 100 \cdot 2\pi\ rad \\ \omega = 300\,\frac{2\pi}{60}\,\frac{rad}{s}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\omega = \alpha t \\ \Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2\end{array}\right. \Rightarrow \omega^2 = 2\alpha\Delta\theta \quad \left\{\begin{array}{l}\alpha = \frac{\omega^2}{2\alpha} \\ a_t = \alpha R\end{array}\right.$$

**Problemas Dinámica de una partícula**

**1)** Una fuerza neta actúa sobre una masa $m_1$ y le produce una aceleración a. Otra masa $m_2$ se añade a la anterior y la misma fuerza neta actúa sobre las dos masas juntas y les produce una aceleración que es un tercio de la aceleración anterior. Determina la relación entre las masas. [$m_2 = 2 \cdot m_1$]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases} F = m_1 a \\ F = (m_1 + m_2)\dfrac{1}{3}a \end{cases}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} m_1 a = (m_1 + m_2)\dfrac{1}{3}a \\ m_1 = (m_1 + m_2)\dfrac{1}{3} \\ 3m_1 = m_1 + m_2 \\ 2m_1 = m_2 \end{array}\right\} \quad \frac{m_2}{m_1} = 2$$

**2)** Una esfera de 36,50 kg experimenta una aceleración 3,960 m/s$^2$ dirigida 21º por encima del eje +X. Sobre ella actúan dos fuerzas, una de 133 N dirigida a lo largo del eje +X, ¿cuál es la magnitud y dirección de la segunda fuerza?. [51,8 N dirigida a 88º por encima del eje +X]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a} \quad \left\{\begin{array}{l} m = 36,5\ kg \\ \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = 3,96\cos 21º\ \frac{m}{s^2}\vec{i} + 3,96\,\text{sen}\,21º\ \frac{m}{s^2}\vec{j} \\ \vec{F}_1 = 133\ N\vec{i} \end{array}\right\}$$

$$\vec{F}_{neta} = \left(36,5\ kg \times 3,96\cos 21º\ \tfrac{m}{s^2}\right)\vec{i} + \left(36,5\ kg \times 3,96\,\text{sen}\,21º\ \tfrac{m}{s^2}\right)\vec{j}$$

$$\vec{F}_{neta} = 134,94\ N\vec{i} + 51,80\ N\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{neta} - \vec{F}_1 = \left(134,94\ N\vec{i} + 51,80\ N\vec{j}\right) - \left(133\ N\vec{i}\right) = (134,94 - 133\ N)\vec{i} + 51,80\ N\vec{j}$$

$$\left|\vec{F}_2\right| = \sqrt{1,94^2 + 51,80^2} = 51,84\ N$$

$$\alpha = \arctan\frac{F_y}{F_x} = \arctan\frac{51,80}{1,94} = 87,85º$$

**3)** Una persona de 95 kg está situada sobre una báscula en un ascensor. Determina el peso aparente en los casos: a) el ascensor sube con una aceleración de 1,80 m/s$^2$; b) el ascensor sube a velocidad constante; c) el ascensor baja con una aceleración de 1,30 m/s$^2$. [a) 1102 N; b) 931 N; c) 807,5 N]

**Respuesta**

La lectura de la balanza es la magnitud de la fuerza normal ejercida por la balanza sobre la persona, que está en reposo relativo respecto del ascensor, por lo que tienen, la persona y el ascensor, la misma aceleración y la misma velocidad. Sobre la persona actúan dos fuerzas, la fuerza de la gravedad, dirigida hacia abajo, y la fuerza normal desde la balanza dirigida hacia arriba. La suma de las dos nos dará la aceleración observada.

Considera el sistema inercial en la superficie de la Tierra

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{P} = -mg\vec{j} \\ \vec{F}_n = F_n\vec{j} \end{array}\right\} \quad \left\{F_{y(neta)} = -mg + F_n = ma_y\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} F_n = mg + ma_y \\ F_n = m\left(g + a_y\right) \end{array}\right\}$$

$$a_y = +1,80\ \tfrac{m}{s^2} \quad \left\{\begin{array}{l} F_n = m\left(g + a_y\right) \\ F_n = 95\ kg \times \left(9,8\ \frac{m}{s^2} + 1,80\ \frac{m}{s^2}\right) = 1102\ N \end{array}\right.$$

$$a_y = 0\ \tfrac{m}{s^2} \quad \left\{\begin{array}{l} F_n = m\left(g + a_y\right) \\ F_n = 95\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2} = 931\ N \end{array}\right.$$

$$a_y = -1,30\ \tfrac{m}{s^2} \quad \left\{\begin{array}{l} F_n = m\left(g + a_y\right) \\ F_n = 95\ kg\left(9,8\ \frac{m}{s^2} - 1,30\ \frac{m}{s^2}\right) = 807,5\ N \end{array}\right.$$

Considera el sistema no inercial en el suelo del ascensor:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{inercial}\\ \vec{F}_{neta} = \vec{P}'_{aparente} + \vec{F}_n = 0\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{F}_n = -\vec{P}'_{aparente}\\ \vec{P}'_{aparente} = \vec{P} + \vec{F}_{inercial}\\ \vec{P}'_{aparente} = -mg\vec{j} - m\vec{a}_{inercial}\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}F_n = -P'_{aparente} = mg + ma_{inercial}\\ F_n = m(g + a_{inercial})\end{array}\right\}$$

$a_{inercial} = +1,80\ \frac{m}{s^2}$ $\quad \left\{F_n = 95\ kg \times \left(9,8\ \frac{m}{s^2} + 1,80\ \frac{m}{s^2}\right) = 1102\ N\right.$

$a_{inercial} = 0\ \frac{m}{s^2}$ $\quad \left\{F_n = 95\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2} = 931\ N\right.$

$a_{inercial} = -1,30\ \frac{m}{s^2}$ $\quad \left\{F_n = 95\ kg\left(9,8\ \frac{m}{s^2} - 1,30\ \frac{m}{s^2}\right) = 807,5\ N\right.$

**4)** Una persona, de masa 60 kg, está situada sobre una báscula dentro de un ascensor moviéndose. La masa del ascensor y de la báscula es de 815 kg. Partiendo del reposo, el ascensor sube con una aceleración, siendo la tensión en el cable del ascensor de 9410 N. ¿Cuál es la lectura sobre la escala durante la aceleración?. [645 N]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{T} = 9410\ N\vec{j}\\ \vec{P} = -\left[(60+815)\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2}\right]\vec{j}\\ \vec{P} = -8575\ N\vec{j}\end{array}\right\} \left\{\vec{a} = \frac{\vec{T}+\vec{P}}{m} = \frac{9410\ N\vec{j} - 8575\ N\vec{j}}{(60+815)\ kg} = 0,95\ \frac{m}{s^2}\vec{j}\right\}$$

$a_y = +0,95\ \frac{m}{s^2}$ $\quad \left\{\begin{array}{l}\vec{F}_{neta(persona)} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a}\\ F_{y(neta)} = -mg + F_n = ma_y\\ F_n = m\left(g + a_y\right)\\ F_n = 60\ kg \times \left(9,8\ \frac{m}{s^2} + 0,95\ \frac{m}{s^2}\right) = 645\ N\end{array}\right.$

**5)** Un objeto de 2 kg se suspende del techo de un vagón de ferrocarril. Si la cuerda que sujeta al objeto es inextensible y consideramos que su peso es nulo. Calcula el ángulo, que la cuerda forma con la vertical, si el vagón lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de aceleración 3 m/s$^2$. [17º]

**Respuesta**:

El objeto está sometido a dos fuerzas el peso y la tensión de la cuerda. El peso es vertical hacia abajo y la tensión forma un ángulo con la vertical

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{T} = T_x\vec{i} + T_y\vec{j} = T\,sen\,\alpha\,\vec{i} + T\cos\alpha\,\vec{j}\\ \vec{P} = -mg\vec{j}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}F_{x(neta)} = T\,sen\,\alpha = ma_x\\ F_{y(neta)} = T\cos\alpha - mg = 0\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}T\,sen\,\alpha = ma_x\\ T\cos\alpha = mg\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\tan\alpha = \dfrac{ma_x}{mg}\\ \alpha = \arctan\dfrac{a_x}{g} = \arctan\dfrac{3\ \frac{m}{s^2}}{9,8\ \frac{m}{s^2}} = 17^o\end{array}\right.$$

**6)** Un bloque en reposo sobre una superficie horizontal pesa 425 N. Una fuerza aplicada al bloque tiene una magnitud de 142 N, estando dirigida hacia arriba formando un ángulo con la horizontal. El bloque empieza a moverse cuando el ángulo es de 60º. Determina el coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie. [0,235]

**Respuesta**:

El objeto está sometido a cuatro fuerzas: el **peso**, la **fuerza** de contacto ejercida por la superficie y que es perpendicular, la **fuerza de fricción** estática que se dirige en sentido contrario al posible movimiento y la **fuerza** de contacto aplicada.

Para iniciar el movimiento:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} = 0 \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{T} = T\cos\alpha\,\vec{i} + T\,sen\,\alpha\,\vec{j}\\ \vec{P} = -P\vec{j}\\ \vec{F}_n = (P - T\,sen\,\alpha)\vec{j}\\ \vec{f}_{s,máx} = -\mu_s(P - T\,sen\,\alpha)\vec{i}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}F_{x(neta)} = T\cos\alpha - \mu_s(P - T\,sen\,\alpha) = ma_x = 0\\ F_{y(neta)} = T_y + F_n - P = 0\end{array}\right\}$$

$$T\cos\alpha = \mu_s(P - T\,sen\,\alpha) \quad \left\{\mu_s = \frac{T\cos\alpha}{(P - T\,sen\,\alpha)} = \frac{142\ N \times \cos 60^o}{(425\ N - 142\ N \times sen\,60^o)} = 0,235\right.$$

**7)** Un patinador sobre hielo lleva una velocidad inicial de 7,60 m/s. Se desprecia la resistencia del aire. Calcula: a) la desaceleración causada por la fricción cinética, si el coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el filo de los patines es de 0,100; b) ¿cuánta distancia recorrerá hasta que se pare?. [a) 0,98 m/s$^2$; b) 29,5 m]

**Respuesta**:

Iniciado el movimiento:

$$\vec{P}+\vec{F}_n+\vec{f}_{roz}=m\vec{a}\quad\begin{Bmatrix}\vec{P}=-P\vec{j}\\ \vec{F}_n=P\vec{j}\\ \vec{f}_k=-\mu_k F_n\vec{i}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\mu_k mg=ma_x\\ a_x=-\mu_k g=-0,1\times 9,8\,\frac{m}{s^2}=-0,98\,\frac{m}{s^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta x=\dfrac{v^2-v_0^2}{2a_x}=\dfrac{0-\left(7,60\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\times\left(-0,98\,\frac{m}{s^2}\right)}=29,5\text{ m}\end{cases}$$

**8)** A un bloque de 121 kg le aplicamos una fuerza de 661 N formando un ángulo de 20º por encima de la horizontal. El coeficiente de fricción estático entre el bloque y la superficie es de 0,410. ¿Cuál es la cantidad mínima de masa que se ha de poner encima del bloque para impedir que se mueva?. [56,7 kg]

**Respuesta**:

Para iniciar el movimiento:

$$\vec{F}_{neta}=\vec{T}+\vec{P}+\vec{F}_n+\vec{f}_{roz}=m\vec{a}=0\begin{Bmatrix}\vec{T}=T\cos\alpha\,\vec{i}+T\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j}\\ \vec{P}=-P\vec{j}\\ \vec{F}_n=(P-T\,\text{sen}\,\alpha)\vec{j}\\ \vec{f}_{s,máx}=-\mu_s(P-T\,\text{sen}\,\alpha)\vec{i}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_{x(neta)}=T\cos\alpha-\mu_s(P-T\,\text{sen}\,\alpha)=ma_x=0\\ F_{y(neta)}=T_y+F_n-P=0\end{Bmatrix}$$

$$T\cos\alpha=\mu_s(P-T\,\text{sen}\,\alpha)\quad\begin{cases}P=\dfrac{T\cos\alpha}{\mu_s}+T\,\text{sen}\,\alpha=\dfrac{661\text{ N}\times\cos 20^\circ}{0,410}+661\text{ N}\times\text{sen}\,20^\circ=1741\text{ N}\\ m=\dfrac{1741\text{ N}}{9,8\,\frac{m}{s^2}}=177,66\text{ kg}\\ m'=177,66\text{ kg}-121\text{ kg}=56,7\text{ kg}\end{cases}$$

**9)** Un helicóptero se mueve horizontalmente con velocidad constante. El peso del helicóptero es de 53.800 N. La fuerza que lo levanta, generada por las hélices rotando, forma un ángulo de +69º con la horizontal del movimiento. a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que lo levanta?; b) determina la magnitud de la resistencia del aire que se opone al movimiento. [57.627 N y 20.652 N]

**Respuesta**:

El helicóptero se mueve con velocidad constante luego la fuerza neta aplicada sobre él es cero. Siendo las fuerzas aplicadas el **peso**, la **fuerza** de las hélices y la **fuerza de fricción** del aire que se opone al movimiento.

Iniciado el movimiento:

$$\vec{F}_{neta}=\vec{P}+\vec{F}_{hélices}+\vec{f}_{roz}=0\quad\begin{Bmatrix}\vec{P}=-53800\text{ N}\vec{j}\\ \vec{F}_{hélices}=F_h\cos 69^\circ\vec{i}+F_h\,\text{sen}\,69^\circ\vec{j}\\ \vec{f}_{roz}=-f_{roz}\,\vec{i}\end{Bmatrix}$$

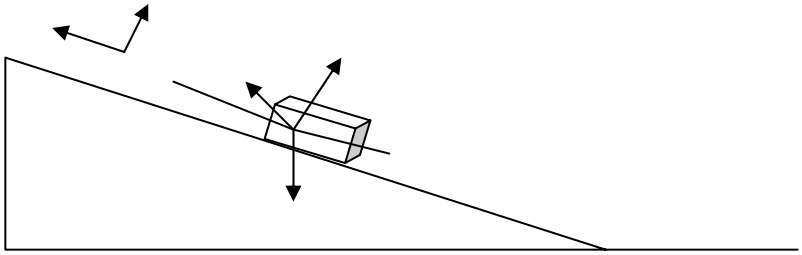
$$\begin{Bmatrix}F_{y(neta)}=-53800\text{ N}+F_h\,\text{sen}\,69^\circ=0\\ F_{x(neta)}=F_h\cos 69^\circ-f_{roz}=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}F_h=\dfrac{53800\text{ N}}{\text{sen}\,69^\circ}=57627,6\text{ N}\\ f_{roz}=F_h\cos 69^\circ=20652\text{ N}\end{cases}$$

**10)** Un bloque de masa 10 kg es empujado hacia arriba en un plano inclinado, de 30º con la horizontal, con una fuerza de 73 N y que forma un ángulo de 10º con la tangente al plano inclinado. Si el sistema no tiene rozamiento determina la fuerza que ejerce el plano sobre el bloque y la aceleración a lo largo del plano. [72,2 N y 2,3 m/s$^2$]

**Respuesta**:

El bloque está sometido a tres fuerzas, la fuerza peso que se dirige hacia abajo verticalmente, la fuerza normal que es perpendicular al plano inclinado y la fuerza aplicada.

Consideramos que el eje OX está dirigido tangente al plano



$$\vec{F}_{neta}=\vec{F}+\vec{P}+\vec{F}_n=m\vec{a}\quad\begin{cases}\vec{F}=(73\times\cos 10^o)\,N\vec{i}+(73\times \text{sen}\,10^o)\,N\vec{j}\\ \vec{P}=-(10\times 9{,}8\times \text{sen}\,30^o)\,N\vec{i}-(10\times 9{,}8\times\cos 30^o)\,N\vec{j}\\ \vec{F}_n=(10\times 9{,}8\times\cos 30^o-73\times \text{sen}\,10^o)\,N\vec{j}\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{x(neta)}=(73\times\cos 10^o)-(10\times 9{,}8\times \text{sen}\,30^o)=ma_x\\ F_{y(neta)}=(73\times \text{sen}\,10^o)-(10\times 9{,}8\times\cos 30^o)+(10\times 9{,}8\times\cos 30^o-73\times \text{sen}\,10^o)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_x=\dfrac{(73\times\cos 10^o)-(10\times 9{,}8\times \text{sen}\,30^o)}{10\text{ kg}}=2{,}3\ \frac{m}{s^2}\\ F_n=(10\times 9{,}8\times\cos 30^o-73\times \text{sen}\,10^o)\,N=72{,}2\text{ N}\end{cases}$$

**11)** Un coche viaja a 40 m/s por una carretera horizontal. Los coeficientes de fricción entre la carretera y las ruedas son $\mu_s$ = 0,45 y $\mu_k$ = 0,25. Calcula la distancia que va a recorrer antes de parar si: a) el coche está equipado con un sistema de frenada antibloqueo que hace que las ruedas no se deslicen (Antilock Braking System), y b) el coche frena fuertemente sin ABS y las ruedas quedan bloqueadas. [a) 181,4 m; b) 326,5 m]

**Respuesta**:

Cuando las ruedas no están bloqueadas la fuerza horizontal ejercida por la carretera es la fricción estática, sien embargo cuando las ruedas se bloquean la fuerza ejercida por la carretera sobre el coche es la fuerza de fricción cinética. La fuerza que para el coche cuando frena es la fuerza de fricción ejercida por la carretera sobre las ruedas. Cuando la fuerza de fricción ejercida por la carretera es constante, la aceleración es constante, y usamos las ecuaciones del movimiento para aceleración constante. Las fuerzas a las que está sometido el coche son el peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción.

$$\begin{cases}\vec{F}_{neta}=\vec{P}+\vec{F}_n+\vec{f}_{roz}=m\vec{a}\\ \Delta x=\dfrac{v^2-v_0^2}{2a_x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{P}=-P\vec{j}\\ \vec{F}_n=P\vec{j}\\ \vec{f}_s=-\mu_s F_n\vec{i}\end{cases}\begin{cases}F_{x(neta)}=-\mu_s mg=ma_x\\ a_x=-\mu_s g=-0{,}45\times 9{,}8\ \frac{m}{s^2}=-4{,}41\ \frac{m}{s^2}\end{cases}\begin{cases}\Delta x=\dfrac{v^2-v_0^2}{2a_x}=\dfrac{0-\left(40\ \frac{m}{s}\right)^2}{2\times\left(-4{,}41\ \frac{m}{s^2}\right)}=181{,}4\text{ m}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{P}=-P\vec{j}\\ \vec{F}_n=P\vec{j}\\ \vec{f}_k=-\mu_k F_n\vec{i}\end{cases}\begin{cases}F_{x(neta)}=-\mu_k mg=ma_x\\ a_x=-\mu_k g=-0{,}25\times 9{,}8\ \frac{m}{s^2}=-2{,}45\ \frac{m}{s^2}\end{cases}\begin{cases}\Delta x=\dfrac{v^2-v_0^2}{2a_x}=\dfrac{0-\left(40\ \frac{m}{s}\right)^2}{2\times\left(-2{,}45\ \frac{m}{s^2}\right)}=326{,}5\text{ m}\end{cases}$$

**12)** Sobre una mesa horizontal tenemos una masa de 10 kg. Si partiendo del reposo con un coeficiente de rozamiento cinético 0,25 y adquiere una velocidad de 12 m/s, en 36 m de movimiento rectilíneo, ¿cuál es el valor de la fuerza horizontal aplicada?. [44,5 N]

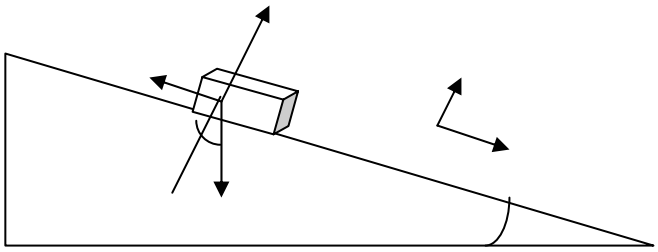
**Respuesta**:

Las fuerzas aplicadas sobre la masa son la fuerza de contacto, el peso, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento.

$$\begin{cases}\vec{F}_{neta}=\vec{F}+\vec{P}+\vec{F}_n+\vec{f}_{roz}=m\vec{a}\\ a_x=\dfrac{v^2-v_0^2}{2\Delta x}=\dfrac{\left(12\ \frac{m}{s}\right)^2-0}{2\times 36\text{ m}}=2\ \frac{m}{s^2}\end{cases}\begin{cases}\vec{F}=F\vec{i}\\ \vec{P}=-P\vec{j}\\ \vec{F}_n=P\vec{j}\\ \vec{f}_k=-\mu_k F_n\vec{i}\end{cases}\begin{cases}F_{x(neta)}=F-\mu_k mg=ma_x\\ F=ma_x+\mu_k mg=m(a_x+\mu_k g)\\ F=10\text{ kg}\times\left(2\ \frac{m}{s^2}+0{,}25\times 9{,}8\ \frac{m}{s^2}\right)=44{,}5\text{ N}\end{cases}$$

**13)** Un cuerpo cae por un plano inclinado con un coeficiente de rozamiento μ. Dibuja las fuerzas a que está sometido, y demuestra que la aceleración con la que cae es independiente de la masa y es igual a la expresión: $a = g(\operatorname{sen}\phi - \mu_k \cos\phi)$.

**Respuesta**:

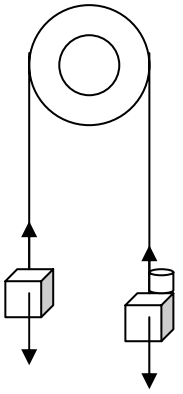


Iniciado el movimiento:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \left.\begin{cases} \vec{P} = P\operatorname{sen}\phi\,\vec{i} - P\cos\phi\,\vec{j} \\ \vec{F}_n = P\cos\phi\,\vec{j} \\ \vec{f}_k = -\mu_k F_n \vec{i} = -\mu_k P\cos\phi\,\vec{i} \end{cases}\right\} \quad \begin{cases} F_{x(neta)} = P\operatorname{sen}\phi - \mu_k P\cos\phi = ma_x \\ a_x = g\operatorname{sen}\phi - \mu_k g\cos\phi \\ a = g(\operatorname{sen}\phi - \mu_k\cos\phi) \end{cases}$$

**14)** Dos cuerpos de 0,5 kg cada uno cuelgan de los extremos de un hilo que pasa por una polea. ¿Qué masa hay que añadir a uno de ellos para que el otro recorra 1 m en 2s? y ¿qué tensión soportará la cuerda?. [0,054 kg y 5,15 N]

**Respuesta**:



Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque, considerando el hecho de que la tensión de la cuerda T tiene la misma magnitud en todas las partes de la cuerda, $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen la misma magnitud porque la cuerda no se estira. Elegimos como dirección positiva hacia arriba y negativa hacia abajo.

$$\left.\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{2}at^2 \\ a = \dfrac{2\cdot\Delta y}{t^2} = \dfrac{2\times 1\,m}{(2\,s)^2} = 0,5\,\frac{m}{s^2} \end{cases}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Caída de las masas:} \quad F'_{neta} = T - (m+m')g = -(m+m')a_y \\ \text{Subida de la masa:} \quad F_{neta} = T - mg = ma_y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} -T + (m+m')g = (m+m')a_y \\ T - mg = ma_y \\ \hline m'g = (2m+m')a_y \end{cases}\right\} \begin{cases} m'g = 2ma_y + m'a_y \\ m' = \dfrac{2ma_y}{g - a_y} = \dfrac{2\times 0,5\,kg\times 0,5\,\frac{m}{s^2}}{9,8\,\frac{m}{s^2} - 0,5\,\frac{m}{s^2}} = 0,054\,kg \\ T = mg + ma_y = m(g + a_y) = 5,15\,N \end{cases}$$

**15)** Sobre un objeto, de masa de 500 g, se aplican simultáneamente dos fuerzas. Si la velocidad inicial del objeto es $\vec{v}_0 = 3\,\frac{m}{s}\vec{i} - 4\,\frac{m}{s}\vec{j}$ y las fuerzas son $\vec{F}_1 = 2\,N\vec{i} + 7\,N\vec{j}$ y $\vec{F}_2 = 3\,N\vec{i} + 4\,N\vec{j}$, determina: a) ¿Cuánto vale el módulo de la aceleración que adquiere la masa?; b) Si la masa se encuentra inicialmente en el punto (0,0) m con una determinada velocidad inicial, ¿qué posición ocupará al cabo de 3 s?. [a) 24,2m/s²; b) $r_x = 54$ m; $r_y = 87$ m]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(2\,N\vec{i} + 7\,N\vec{j}\right) + \left(3\,N\vec{i} + 4\,N\vec{j}\right) = (2+3)\,N\vec{i} + (7+4)\,N\vec{j} = 5\,N\vec{i} + 11\,N\vec{j}$$

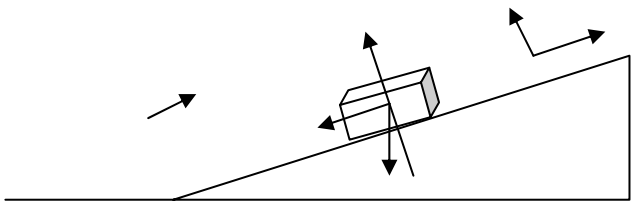
$$\begin{cases} \vec{F}_{neta} = m\vec{a} \\ \vec{a} = \dfrac{\vec{F}_{neta}}{m} = \dfrac{5\,N\vec{i} + 11\,N\vec{j}}{0,5\,kg} = 10\,\frac{m}{s^2}\vec{i} + 22\,\frac{m}{s^2}\vec{j} \\ |\vec{a}| = \sqrt{\left(10\,\frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(22\,\frac{m}{s^2}\right)^2} = 24,17\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

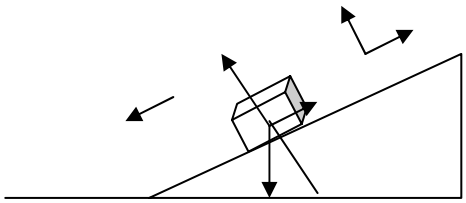
$$\begin{cases} \vec{v}_0 = 3\,\frac{m}{s}\vec{i} - 4\,\frac{m}{s}\vec{j} \\ \vec{r} = \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = \left(3\,\frac{m}{s}\vec{i} - 4\,\frac{m}{s}\vec{j}\right)\times 3\,s + \dfrac{1}{2}\times\left(10\,\frac{m}{s^2}\vec{i} + 22\,\frac{m}{s^2}\vec{j}\right)\times(3\,s)^2 \\ \vec{r} = 54\,m\vec{i} + 87\,m\vec{j} \end{cases}$$

**16)** Un bloque de masa 0,2 kg sube por un plano inclinado de 30º con la horizontal. La velocidad inicial de subida fue de 12 m/s y el coeficiente de rozamiento cinético $\mu_k$ es 0,16. Determina: a) la distancia que recorrerá en la subida y la altura sobre el plano; b) la velocidad del bloque cuando al caer llegue a la parte más baja del plano inclinado. [a) 12,16 m y 6,08 m; b) 9,28 m/s]

**Respuesta**:

Cuando el bloque está subiendo por el plano inclinado está sometido a tres fuerzas, la fuerza peso que está dirigida hacia abajo, la fuerza normal que es perpendicular al plano inclinado y la fuerza de rozamiento que se dirige en sentido contrario al movimiento.





Movimiento de subida:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \begin{cases} \vec{P} = -P\,sen\,\alpha\,\vec{i} - P\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{F}_n = P\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{f}_k = -\mu_k F_n\,\vec{i} = -\mu_k P\cos\alpha\,\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{x(neta)} = -P\,sen\,\alpha - \mu_k P\cos\alpha = ma_x \\ a_x = -g\,sen\,\alpha - \mu_k g\cos\alpha \\ a_x = -g\left(sen\,\alpha + \mu_k\cos\alpha\right) = -5,92\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a_x} = \dfrac{0 - \left(12\,\frac{m}{s}\right)^2}{2\times\left(-5,92\,\frac{m}{s^2}\right)} = 12,16\,m \\ h = \Delta x\cdot sen\,30^o = 12,16\,m\times 0,5 = 6,08\,m \end{cases}$$

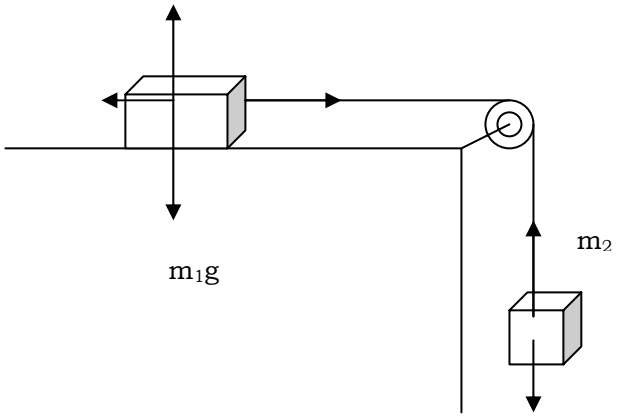
Movimiento de bajada:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} \quad \begin{cases} \vec{P} = -P\,sen\,\alpha\,\vec{i} - P\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{F}_n = P\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{f}_k = +\mu_k F_n\,\vec{i} = +\mu_k P\cos\alpha\,\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{x(neta)} = -P\,sen\,\alpha + \mu_k P\cos\alpha = ma_x \\ a_x = -g\,sen\,\alpha + \mu_k g\cos\alpha \\ a_x = -g\left(sen\,\alpha - \mu_k\cos\alpha\right) = -3,54\,\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x \\ v = \sqrt{0 + 2\times\left(-3,54\,\frac{m}{s^2}\right)\times(-12,16\,m)} = 9,28\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

**17)** Sobre una mesa horizontal hay un cuerpo de 10 kg, que está unido mediante un hilo y una polea a otro de 5 kg que está colgando verticalmente. El coeficiente de rozamiento cinético del cuerpo con la mesa es $\mu_k$ = 0,20. Calcula: a) la aceleración del sistema y dibuja las fuerzas existentes; b) la masa mínima que ha de tener un cuerpo para que al colocarlo sobre el de 10 kg éste no se mueva. [a) 1,96 m/s$^2$; b) 15 kg]

**Respuesta**:




Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque, considerando el hecho de que la tensión de la cuerda T tiene la misma magnitud en todas las partes de la cuerda, $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen la misma magnitud porque la cuerda no se estira. Elegimos como dirección positiva para $m_1$ hacia la derecha y para $m_2$ hacia arriba.

Iniciado el movimiento:

$$\vec{T}+\vec{P}_1+\vec{F}_n+\vec{f}_{roz}=m_1\vec{a}\quad\begin{cases}F_{x(neta)}=T-f_k=T-\mu_k m_1 g=m_1 a\\F_{y(neta)}=F_n-m_1 g=0\end{cases}\quad T-\mu_k m_1 g=m_1 a$$

$$\vec{T}+\vec{P}_2=m_2\vec{a}\qquad\left\{F_{y(neta)}=T-m_2 g=-m_2 a\right\}\qquad T-m_2 g=-m_2 a$$

$$\left.\begin{cases}T-\mu_k m_1 g=m_1 a\\T-m_2 g=-m_2 a\\\hline -\mu_k m_1 g+m_2 g=(m_1+m_2)a\end{cases}\right\}a=\frac{(m_2-\mu_k m_1)}{(m_1+m_2)}g=\frac{(5\text{ kg}-0,20\times 10\text{ kg})}{(10\text{ kg}+5\text{ kg})}\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}=1,96\,\tfrac{m}{s^2}$$

Para que no se mueva:

$$\vec{T}'+\vec{P}_2=m_2\vec{a}=0\qquad\left\{F_{y(neta)}=T'-m_2 g=0\right\}\qquad T'=m_2 g=5\text{ kg}\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}=49\text{ N}$$

$$\vec{T}'+\vec{P}_1'+\vec{F}_n'+\vec{f}_{roz}=(m_1+m')\vec{a}=0\begin{cases}F_{x(neta)}=T'-f_k=T'-\mu_k(m_1+m')g=0\\F_{y(neta)}=F_n'-(m_1+m')g=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}T'=\mu_k(m_1+m')g=\mu_k m_1 g+\mu_k m' g\\m'=\dfrac{T'-\mu_k m_1 g}{\mu_k g}=\dfrac{49\text{ N}-0,20\times 10\text{ kg}\times 9,8\,\frac{m}{s^2}}{0,20\times 9,8\,\frac{m}{s^2}}=15\text{ kg}\end{cases}$$

**18)** Un ciclista va a realizar un giro llamado el "rizo de la muerte" en el que realiza un giro por una carretera colocada perpendicularmente. Si el radio del rizo es de 2,7 m, ¿cuál es la velocidad menor que puede tener el ciclista para que pueda permanecer en contacto con el rizo?. [5,14 m/s]

**Respuesta**:

$$\vec{F}_{neta}=\vec{P}+\vec{F}_n=m\vec{a}\quad\left.\begin{cases}F_{y(neta)}=ma_y=m\left(-\dfrac{v_t^2}{r}\right)\\-F_n-mg=m\left(-\dfrac{v_t^2}{r}\right)\end{cases}\right\}\left\{\begin{aligned}0=F_n&=m\left(\frac{v_t^2}{r}\right)-mg\\v_t&=\sqrt{rg}=\sqrt{2,7\text{ m}\times 9,8\,\tfrac{m}{s^2}}=5,14\,\tfrac{m}{s}\end{aligned}\right.$$

**19)** Un coche viaja a una velocidad constante de 20 m/s por una carretera circular llana de radio 190 m. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente $\mu_s$ estático entre los neumáticos del coche y la carretera para prevenir que el coche se deslice?. [0,21]

**Respuesta**:

La fuerza centrípeta que causa que el coche viaje en un círculo es la fuerza de fricción radial ejercida sobre los neumáticos por la carretera, aunque el coche se esté moviendo no se está deslizando radialmente y por eso la fuerza de fricción es $f_s$ y no $f_k$

$$\left\{v_m = 20\ \tfrac{m}{s}\right\} \quad \left\{a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(20\ \frac{m}{s}\right)^2}{190\ m} = 2{,}1\ \tfrac{m}{s^2}\right\}$$

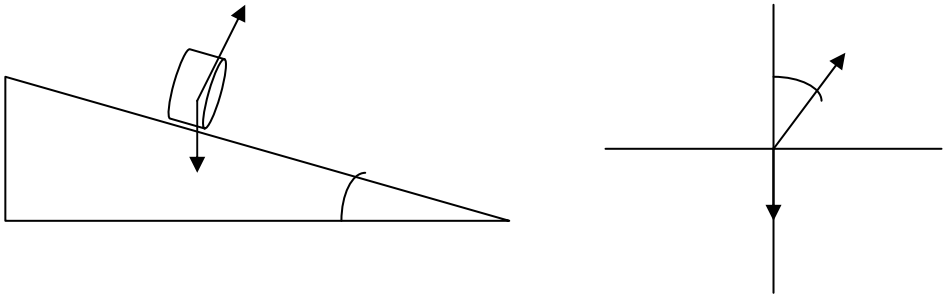
$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_{radial(neta)} = -f_{s,máx} = -ma_c = -m\dfrac{v^2}{r} \\ F_{y(neta)} = F_n - mg = 0 \end{cases}$$

$$\left\{f_{s,máx} = \mu_s F_n = \mu_s mg = m\frac{v^2}{r}\right\} \quad \mu_s = \frac{v^2}{gr} = \frac{\left(20\ \frac{m}{s}\right)^2}{9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 190\ m} = 0{,}21$$

**20)** En una carretera en la que no hay fricción, por ejemplo, sobre hielo, un coche se mueve con una velocidad constante de 20 m/s alrededor de una curva con peralte. Si el radio es de 190 m ¿cuál es el ángulo que deberá tener el peralte?. [12º]

**Respuesta**:

Las fuerzas que actúan sobre el coche son dos: la fuerza peso debida a la gravedad y la fuerza normal. Como la carretera está inclinada la fuerza normal tiene una componente horizontal que suministra la fuerza centrípeta necesaria.



$$\vec{F}_{neta} = \vec{P} + \vec{F}_n = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} F_{y(neta)} = F_n \cos\theta - mg = ma_y = 0 \\ F_{x(neta)} = F_n\, sen\,\theta = ma_x = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases} \begin{cases} F_n = \dfrac{mg}{\cos\theta} \\ \dfrac{mg}{\cos\theta} sen\,\theta = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases} \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{v^2}{gr} = \dfrac{\left(20\ \frac{m}{s}\right)^2}{9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 190\ m} = 0{,}2148 \\ \theta = \arctan 0{,}2148 = 12^o \end{cases}$$

**21)** En un cilindro de radio 2,1 m apoyamos un objeto, de masa 49 kg, que tiene un coeficiente de rozamiento con la pared del cilindro de 0,40. a) ¿Cuál es la velocidad mínima para que el objeto no se deslice hacia abajo?; b) ¿cuál es la fuerza centrípeta sobre el objeto?. [a) 7,2 m/s; b) 1200 N]

**Respuesta**:

Las fuerzas que actúan sobre el objeto son tres: la fuerza peso debida a la gravedad que se dirige hacia abajo, la fuerza normal que es perpendicular dirigida hacia el centro del giro y la fuerza de rozamiento.

$$\vec{P} + \vec{F}_{n(centrípeta)} + \vec{f}_{roz} = m\vec{a} = m\vec{a}_{centrípeta} \quad \begin{cases} F_{y(neta)} = -mg + f_{s,m} = 0 \\ F_{x(neta)} = F_{n(c)} = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg = f_{s,m} = \mu_s F_n = \mu_s m\dfrac{v^2}{r} \\ v = \sqrt{\dfrac{gr}{\mu_s}} = \sqrt{\dfrac{9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 2{,}1\ m}{0{,}40}} = 7{,}17\ \tfrac{m}{s} \\ F_{n(c)} = m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{mg}{\mu_s} = \dfrac{49\ kg \times 9{,}8\ \frac{m}{s^2}}{0{,}40} = 1200{,}5\ N \end{cases}$$

**Problemas propuestos de Trabajo y Energía**:

**1)** Un automóvil de 1200 kg está subiendo una pendiente de inclinación 5º. La fuerza de fricción tiene de magnitud 500 N. Si la longitud de la pendiente es de 300 m, ¿cuál será la magnitud de la fuerza que lo hace subir? sabiendo que el trabajo neto hecho por todas las fuerzas actuantes sobre el coche es de +150.000 J. [2025 N]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{externo} - \Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$\text{Datos:} \begin{cases} m = 1200\ kg \\ f_{roz} = 500\ N \\ d = 300\ m \\ h = 300 \times \operatorname{sen} 5^\circ\ m \\ W_{neto} = 150.000\ J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_{neto} = \Delta E_c = 150.000\ J \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = mgh - 0 \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 1200\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2} \times (300 \times \operatorname{sen} 5^\circ\ m) \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 307.485,5\ J \\ W_{roz} = -f_{roz} \times d = -500\ N \times 300\ m = -150.000\ J \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{neto} = \Delta E_c = W_{externo} - \Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} \\ W_{externo} = W_{neto} + \Delta E_{p(gravitatoria)} - W_{roz} \end{cases}$$

$$W_{externo} = F_{ext} \times 300\ m = 150.000\ J + 307.485,5\ J + 150.000\ J = 607.485,5\ J$$

$$F_{ext} = 2025\ N$$

**2)** Un avión, de masa 6000 kg, está volando inclinado en un ángulo 10 grados hacia abajo durante una distancia de 1700 m. Sobre el avión actúan cuatro fuerzas: su peso, la fuerza ascendente que actúa perpendicular a la dirección del avión, la fuerza de los motores (de magnitud 18.000 N) y la fuerza de la resistencia del aire opuesta a la dirección del movimiento del avión. El trabajo neto realizado por estas cuatro fuerzas es $2,9 \cdot 10^7$ J. Calcula: a) el trabajo hecho por la resistencia del aire, y b) la magnitud de la fuerza de la resistencia del aire. [$-1,896 \cdot 10^7$ J y -11.151,7 N]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{motor} + W_{normal} - \Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roza}$$

$$\text{Datos:} \begin{cases} m = 6000\ kg \\ f_{motor} = 18.000\ N \\ d = 1.700\ m \\ h = 1.700 \times \operatorname{sen} 10^\circ\ m \\ W_{neto} = 2,9 \cdot 10^7\ J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_{neto} = 2,9 \cdot 10^7\ J \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 0 - mgh \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 0 - 6.000\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2} \times (1.700 \times \operatorname{sen} 10^\circ\ m) \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = -17.357.872\ J \\ W_{motor} = f_{motor} \times d = 18.000\ N \times 1.700\ m = 30.600.000\ J \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{roza} = W_{neto} - W_{motor} + \Delta E_{p(gravitatoria)} = 29 \cdot 10^6\ J - 30.600.000\ J - 17.357.872\ J = -18.957.872\ J \\ W_{roza} = F_{roz} \times d = -18.957.872\ J = F_{roz} \times 1.700\ m \\ F_{roz} = -11.151,7\ N \end{cases}$$

**3)** La frenada de un coche tiene 65 m de longitud. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera es 0,80. ¿Qué velocidad llevaba el coche antes de aplicar los frenos?. [31,9 m/s]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = W_{roza}$$

$$\text{Datos:} \begin{cases} d = 65\ m \\ \mu_k = 0,80 \\ v_f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -f_{roz} \times d \\ 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\mu_k mg \times d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_i^2 = 2\mu_k g\, d \\ v_i = \sqrt{2\mu_k g\, d} \\ v_i = \sqrt{2 \times 0,80 \times 9,8\ \frac{m}{s^2} \times 65\ m} = 31,9\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

**4)** Una nave espacial viaja a través del espacio vacío con una velocidad de 11.000 m/s, siendo su masa de 50.000 kg. Suponemos que no actúan fuerzas sobre la nave excepto aquellas generadas por su motor. El motor ejerce una fuerza constante de 400 kN, que es paralela al desplazamiento,

y si ésta se mantiene durante un desplazamiento de 2.500 km, determina la velocidad final de la nave. [12.688,6 m/s]

**Respuesta**:

$$\text{Datos:}\begin{cases} v_i = 11.000\ \frac{m}{s} \\ m = 50.000\ kg \\ F_{motor} = 400.000\ N \\ d = 2.500.000\ m \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} W_{neto} = \Delta E_c = W_{motor} \\ \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = F_{motor}\times d \end{cases}\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mv_i^2 + F_{motor}\times d}{\frac{1}{2}m}} = 12.688,6\ \frac{m}{s}$$

**5)** Un esquiador de 58 kg está bajando por una pendiente de 25 grados. La fuerza de fricción cinética, que es opuesta a su movimiento descendente, tiene una magnitud de 70 N. Si consideramos la velocidad del esquiador, en la parte superior, es de 3,6 m/s e ignoramos la resistencia del aire, determina la velocidad cuando ha recorrido 57 m. [19 m/s]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$\text{Datos:}\begin{cases} m = 58\ kg \\ \alpha = 25^\circ \\ f_{roz} = 70\ N \\ v_i = 3,6\ \frac{m}{s} \\ d = 57\ m \\ h = 57\times \operatorname{sen} 25^\circ\ m \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -(0 - mgh) - f_{roz}\times d \\ v_f = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh - f_{roz}\times d}{\frac{1}{2}m}} \\ v_f = \sqrt{\frac{375,84\ J + 13.692,3\ J - 3990\ J}{\frac{1}{2}\times 58\ kg}} = 18,6\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

**6)** Un gimnasta de 48,0 kg salta verticalmente hacia arriba desde un trampolín. El gimnasta sale del trampolín a una altura de 1,20 m y alcanza una altura máxima de 4,80 m, siempre con relación al suelo. Si ignoramos la resistencia del aire, determina: a) la velocidad inicial con la que el gimnasta sale del trampolín y el trabajo debido a la fuerza de la gravedad; b) la velocidad del gimnasta, al volver a caer, a una altura de 3,50 m, así como el trabajo debido a la fuerza de la gravedad en la caída. [a) -1693 J; 8,40 m/s; b) 612 J; 5,05 m/s]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} \qquad \text{Datos} \quad \begin{cases} m = 48\ kg \\ h_m = 4,80\ m \\ h_i = 1,20\ m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta E_{p(gravitatoria)} = mgh_m - mgh_i = mg(h_m - h_i) \\ \Delta E_{p(gravitatoria)} = 48\ kg\times 9,8\ \frac{m}{s^2}\times 3,60\ m = 1.693,44\ J \\ \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\Delta E_{p(gravitatoria)} = -1.693,44\ J \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} v = 8,4\ \frac{m}{s} \\ W_g = \Delta E_c = -1.693,44\ J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} \\ \left[E_c + E_{p(g)}\right]_f = \left[E_c + E_{p(g)}\right]_i \\ \left[\frac{1}{2}mv^2 + mgh\right]_f = \left[0 + mgh\right]_i \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = mg(h_i - h_f) \\ v = \sqrt{2g(h_i - h_f)} = \sqrt{2\times 9,8\ \frac{m}{s^2}\times(4,8\ m - 3,5\ m)} = 5,05\ \frac{m}{s} \\ W_g = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = 612,06\ J \end{cases}$$

**7)** La montaña rusa más alta del mundo tiene una caída vertical de 59,3 m. Si consideramos que la velocidad en el punto más alto es cero y que la fricción es prácticamente nula, calcula la velocidad de los viajeros en el punto más bajo de la trayectoria. Posteriormente compara el resultado obtenido con el obtenido en la experiencia en que la velocidad de los viajeros en la parte más baja

es de 32,2 m/s, que es menor que la calculada teóricamente. Con estos datos calcula cuánto trabajo realiza la fuerza de fricción sobre un vagón de 55,0 kg. [34 m/s; 3.449,6 J]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} \begin{cases} \left[E_c + E_{p(g)}\right]_f = \left[E_c + E_{p(g)}\right]_i \\ \left[\frac{1}{2}mv^2 + 0\right]_f = \left[0 + mgh_m\right]_i \\ \frac{1}{2}mv^2 = mgh_m \end{cases} \begin{cases} v = \sqrt{2gh_m} \\ v = \sqrt{2 \times 9,8\ \frac{m}{s^2} \times 59,3\ m} = 34,09\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} \quad \begin{cases} W_{roz} = \Delta E_c + \Delta E_{p(gravitatoria)} \\ W_{roz} = \left[E_c + E_{p(g)}\right]_{final} - \left[E_c + E_{p(g)}\right]_{inicial} \\ W_{roz} = \left[\frac{1}{2}mv^2 + 0\right]_f - \left[0 + mgh_m\right]_i \\ \frac{1}{2}mv^2 = mgh_m + W_{roz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{roz} = \frac{1}{2}mv^2 - mgh_m \\ W_{roz} = \frac{1}{2} \times 55\ kg \times \left(32,2\ \frac{m}{s}\right)^2 - 55\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2} \times 59,3\ m = -3449,6\ J \end{cases}$$

**8)** Calcular el trabajo neto realizado al arrastrar un bloque de 80 kg, sobre un plano horizontal, aplicándole una fuerza de 400 N durante una distancia de 15 m si: a) la fuerza aplicada es horizontal y no existe rozamiento entre el bloque y el plano; b) la fuerza aplicada forma un ángulo de 60º con la horizontal y no existe rozamiento entre el bloque y el plano; c) la fuerza aplicada es horizontal y existe rozamiento entre el bloque y el plano siendo μ = 0,2; d) la fuerza forma un ángulo de 60º con la horizontal y existe rozamiento entre el bloque y el plano siendo μ = 0,2. [a) 6.000 J; b) 3.000 J; c) 3.648 J; d) 1687,2 J]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0º = 400\ N \times 15\ m = 6.000\ J$$

$$W_{neto} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos 60º = 400\ N \times 15\ m \times 0,5 = 3.000\ J$$

$$\begin{cases} W_{neto} = \left(\vec{F} + \vec{f}_{roz}\ \cdot\right)\Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0º + f_{roz} \cdot \Delta r \cdot \cos 180º \\ W_{neto} = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0º - \mu \cdot F_{normal} \cdot \Delta r = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0º - \mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta r \\ W_{neto} = 400\ N \times 15\ m - 0,2 \times 80\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2} \times 15\ m = 6.000\ J - 2.352\ J = 3.648\ J \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{neto} = \left(\vec{F} + \vec{f}_{roz}\ \cdot\right)\Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos 60º + f_{roz} \cdot \Delta r \cdot \cos 180º \\ W_{neto} = F \cdot \Delta r \cdot \cos 60º - \mu \cdot F_{normal} \cdot \Delta r = F \cdot \Delta r \cdot \cos 60º - \mu \cdot \left(m \cdot g - F \cdot \text{sen}\, 60º\right) \cdot \Delta r \\ W_{neto} = 400\ N \times 15\ m \times 0,5 - 0,2 \times \left(80\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2} - 400\ N \times \text{sen}\, 60º\right) \times 15\ m \\ W_{neto} = 3.000\ J - 1.312,77\ J = 1.687,2\ J \end{cases}$$

**9)** Un bloque de 5 kg desliza por una superficie horizontal lisa con una velocidad de 4 m/s y choca con un resorte de masa despreciable y constante elástica 800 N/m, en equilibrio y con el otro extremo fijo. Calcular: a) cuánto se comprime el resorte; b) desde qué altura debería caer el bloque sobre el resorte, colocado verticalmente, para producir la misma compresión. [a) 0,316 m; b) 0,816 m].

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(muelle)} \begin{cases} \left[E_c + E_{p(m)}\right]_f = \left[E_c + E_{p(m)}\right]_i \\ \left[0 + \frac{1}{2}kx^2\right]_f = \left[\frac{1}{2}mv^2 + 0\right]_i \end{cases} \begin{cases} x = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} \\ x = \sqrt{\frac{5\ kg \times \left(4\ \frac{m}{s}\right)^2}{800\ \frac{N}{m}}} = 0,316\ m \end{cases}$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)}$$

$$\begin{cases} \left[E_c + E_{p(g)} + E_{p(m)}\right]_f = \left[E_c + E_{p(g)} + E_{p(m)}\right]_i \\ \left[0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2\right]_f = \left[0 + mgh + 0\right]_i \end{cases} \begin{cases} h = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{mg} \\ h = \frac{\frac{1}{2} \times 800\ \frac{N}{m} \times 0,1\ m^2}{5\ kg \times 9,8\ \frac{m}{s^2}} = 0,816\ m \end{cases}$$

**10)** Un bloque de 10 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con la horizontal, con una velocidad de 10 m/s. El bloque vuelve al punto de partida con una velocidad de 5 m/s. Calcula: a) el trabajo de rozamiento total, en subir y bajar; b) la longitud que recorre en subir; c) el coeficiente de rozamiento con el plano; d) la deformación máxima y final de un resorte de constante elástica 500 N/m, colocado en dicho punto de partida y con el que choca el bloque al volver. [a) -375 J; b) 6,38 m; c) $\mu$ = 0,35; d) 0,747 m y 0,0386 m]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$\text{Datos:} \begin{cases} m = 10\ kg \\ \alpha = 30º \\ v_i = 10\ \frac{m}{s} \\ v_f = 5\ \frac{m}{s} \\ ¿\,\Delta s,\ W_{roz},\ \mu\,? \end{cases} \quad \text{Subir y bajar} \begin{cases} W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} \\ \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -(0-0) + W_{roz} \\ W_{roz} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -375\ J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Subir:} & \begin{cases} \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + \frac{1}{2}W_{roz} \\ 0 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -(mgh - 0) + \frac{1}{2}W_{roz} \end{cases} \\ \text{Bajar:} & \begin{cases} \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + \frac{1}{2}W_{roz} \\ \frac{1}{2}mv_f^2 = -(0 - mgh) + \frac{1}{2}W_{roz} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh + \frac{1}{2}W_{roz} \\ 0 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -mgh + \frac{1}{2}W_{roz} \end{cases} \\ \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 = 2 \cdot mgh \end{cases} \begin{cases} h = \frac{\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}mv_i^2}{2mg} = 3,19\ m \\ \Delta s = \frac{h}{sen\,30º} = 6,38\ m \end{cases}$$

$$W_{roz} = -375\ J = -f_{roz} \cdot 2 \cdot \Delta s = -\mu F_{nor} \cdot 2 \cdot \Delta s = -\mu mg\cos 30º \cdot 2 \cdot \Delta s$$

$$\mu = \frac{-375\ J}{-mg\cos 30º \cdot 2 \cdot \Delta s} = 0,35$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} + W_{roz}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} + W_{roz} \\ 0 - \frac{1}{2}mv_f^2 = -\left(0 - mg\Delta x_m \operatorname{sen} 30^o\right) - \left(\frac{1}{2}k\Delta x_m^2 - 0\right) - \mu mg\cos 30^o \cdot \Delta x_m \\ -\frac{1}{2}mv_f^2 = mg\Delta x_m \operatorname{sen} 30^o - \frac{1}{2}k\Delta x_m^2 - \mu mg\cos 30^o \cdot \Delta x_m \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 250\Delta x_m^2 - 19,3\Delta x_m - 125 = 0 \\ \Delta x_{máximo} = \dfrac{19,3 \pm \sqrt{19,3^2 + 4 \times 250 \times 125}}{2 \times 250} = 0,747 \text{ m} \end{array}\right.$$

Equilibrio:

$$F_{muelle} = F_{peso} - f_{roz}$$

$$k\Delta x' = mg \operatorname{sen} 30^o - \mu mg\cos 30^o$$

$$\Delta x' = \frac{mg \operatorname{sen} 30^o - \mu mg\cos 30^o}{k} = \frac{mg\left(\operatorname{sen} 30^o - \mu\cos 30^o\right)}{k} = 0,0386 \text{ m}$$

**11)** Una bola pequeña de metal es lanzada por un plano inclinado desde una altura sobre el suelo de 3,00 m. Al final del plano, siguiendo un camino curvado, es proyectado verticalmente hacia arriba hasta una altura de 4,00 m sobre el suelo. Si ignoramos la fricción y la resistencia del aire, encuentra la velocidad inicial de la bola. [4,43 m/s]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)}$$

$$\text{Datos: } \left\{\begin{array}{l} h_i = 3 \text{ m} \\ h_f = 4 \text{ m} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[E_c + E_{p(g)}\right]_f = \left[E_c + E_{p(g)}\right]_i \\ \left[0 + mgh_f\right]_f = \left[\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i\right]_i \\ \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh_f - mgh_i = mg\left(h_f - h_i\right) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} v = \sqrt{2g\left(h_f - h_i\right)} \\ v = \sqrt{2 \times 9,8 \frac{m}{s^2} \times \left(4 \text{ m} - 3 \text{ m}\right)} = 4,43 \frac{m}{s} \end{array}\right.$$

**12)** Un cohete de 3 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con suficiente velocidad inicial para alcanzar una altura máxima de 100 m. Si la resistencia del aire realiza un trabajo de -800 J sobre el cohete, ¿qué altura alcanzaría el cohete sin resistencia del aire?. [127,5 m]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz}$$

$$\text{Datos: } \left\{\begin{array}{l} m = 3 \text{ kg} \\ h = 100 \text{ m} \\ W_{roz} = -800 \text{ J} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} 0 - E_{c(i)} = -\left(E_{p(f)} - 0\right) + W_{roz} \\ \frac{1}{2}mv_i^2 = mgh - W_{roz} \\ v_i = \sqrt{\dfrac{mgh - W_{roz}}{\frac{1}{2}m}} = 49,9 \frac{m}{s} \end{array}\right.$$

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)}$$

$$\text{Datos:} \begin{Bmatrix} m = 3\ kg \\ v_i = 49,9\ \frac{m}{s} \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} 0 - E_{c(i)} = -\left(E_{p(f)} - 0\right) \\ \frac{1}{2} m v_i^2 = mgh' \\ h' = \frac{1}{2}\frac{v_i^2}{g} = 127\ m \end{cases}$$

**13)** Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es μ = 0,4. Calcular: a) longitud que recorre hacia arriba el bloque, hasta detenerse; b) velocidad del bloque al volver al punto de lanzamiento. [a) 6,0 m; b) 4,3 m/s]

**Respuesta**:

$$\text{Datos:} \begin{Bmatrix} m = 2\ kg \\ \alpha = 30º \\ v_i = 10\ \frac{m}{s} \\ \mu = 0,4 \\ ¿\, l, v_f\, ? \end{Bmatrix} \quad \left\{ \text{Subir:} \quad \begin{cases} \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} \\ 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\left(mgh - 0\right) - f_{roz} \cdot l = -mgl\,sen\,30º - \mu mg\cos 30º \cdot l \end{cases} \right\}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_i^2 = mgl\,sen\,30º + \mu mg\cos 30º \cdot l \\ l = \dfrac{\frac{1}{2} m v_i^2}{mg\,sen\,30º + \mu mg\cos 30º} = 6,03\ m \end{cases}$$

$$\text{Bajar:} \quad \begin{cases} \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} + W_{roz} \\ \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 = -\left(0 - mgh\right) - f_{roz} \cdot l = mgl\,sen\,30º - \mu mg\cos 30º \cdot l \\ v_f = 4,26\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

**14)** Un bloque de 2,0 kg se deja caer desde una altura de 40 cm sobre un muelle colocado verticalmente. La constante elástica del muelle es de 1960 $N \cdot m^{-1}$. Calcula la distancia máxima que se comprime el muelle y la distancia de equilibrio. Dato: g = 9,8 $m \cdot s^{-2}$. [0,10 m; 0,010 m]

**Respuesta**:

$$W_{neto} = \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)}$$

$$\text{Datos:} \begin{Bmatrix} m = 2\ kg \\ h = 0,40\ m \\ k = 1960\ \frac{N}{m} \\ ¿\, l_m\, ? \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} \Delta E_c = -\Delta E_{p(gravitatoria)} - \Delta E_{p(muelle)} \\ 0 - 0 = -\left[0 - mg\left(h + x_m\right)\right] - \left(\frac{1}{2} k x_m^2 - 0\right) \\ mg\left(h + x_m\right) = \frac{1}{2} k x_m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} 1960 x_m^2 - 2 \times 9,8 x_m - 2 \times 9,8 \times 0,4 = 0 \\ 980 x_m^2 - 19,6 x_m - 7,84 = 0 \\ x_{máximo} = \dfrac{19,6 \pm \sqrt{19,6^2 + 4 \times 980 \times 7,84}}{2 \times 980} = 0,10\ m \end{cases}$$

$$\text{Equilibrio:} \quad \begin{Bmatrix} F_{muelle} = F_{peso} \\ kx' = mg \end{Bmatrix} \quad x' = \frac{mg}{k} = 0,010\ m$$

**PROBLEMAS RESUELTOS de LA MATERIA Y LAS REACCIONES QUÍMICAS**

**Datos para resolver los Problemas**:

Los Pesos atómicos hay que consultarlos en la Tabla Periódica.

*Presiones*: 760 mm Hg = 1 atm = $d_{Hg}\times g\times h$ = 101.325 Pa = 1,01325 bar.

*Energía*: 1J=1 Pa×1m$^3$ = $10^{-5}$ bar×$10^3$ dm$^3$ = $10^{-2}$ bar×L.

*Constante de los gases* R = 8,3144 J/(mol×K) = 0,083144 bar×L/(mol×K) = 0,082 atm×L·mol$^{-1}$×K$^{-1}$

**1)** Un compuesto químico tiene la siguiente composición centesimal: 40,2% de K; 26,9% de Cr y 32,9% de O. ¿Cuál es la fórmula empírica?. [cromato de potasio]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{array}{l} 40,2\text{ g K}\times\dfrac{1\text{ mol K}}{39\text{ g K}}=1,03\text{ mol K} \\ 26,9\text{ g Cr}\times\dfrac{1\text{ mol Cr}}{52\text{ g Cr}}=0,52\text{ mol Cr} \\ 32,9\text{ g O}\times\dfrac{1\text{ mol O}}{16\text{ g O}}=2,06\text{ mol O} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} K_{1,03}Cr_{0,52}O_{2,06} \\ K_{\frac{1,03}{0,52}}Cr_{\frac{0,52}{0,52}}O_{\frac{2,06}{0,52}} \\ K_{1,98}Cr_1O_{3,96} \\ K_2CrO_4 \end{array}\right.$$

**2)** La cafeína, un estimulante que se encuentra en café y té, tiene de peso molecular 194 y su composición es: 49,48% de C; 5,19% de H; 28,85% de N y 16,48% de O. Determina la fórmula empírica y la fórmula molecular de la cafeína. [$C_4H_5N_2O$; $C_8H_{10}N_4O_2$]

**Respuesta**:

$$100\text{ g}\left\{\begin{array}{l} 49,48\text{ g C}\times\dfrac{1\text{ mol C}}{12\text{ g C}}=4,12\text{ mol C} \\ 5,19\text{ g H}\times\dfrac{1\text{ mol H}}{1\text{ g H}}=5,19\text{ mol H} \\ 28,85\text{ g N}\times\dfrac{1\text{ mol N}}{14\text{ g N}}=2,06\text{ mol N} \\ 16,48\text{ g O}\times\dfrac{1\text{ mol O}}{16\text{ g O}}=1,03\text{ mol O} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} C_{\frac{4,12}{1,03}}H_{\frac{5,19}{1,03}}N_{\frac{2,06}{1,03}}O_{\frac{1,03}{1,03}} \\ C_4H_5N_2O_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 194=\left(C_4H_5N_2O_1\right)_n \\ 194=\left(12\times4+1\times5+14\times2+16\times1\right)\times n \\ 194=97\times n \\ n=\dfrac{194}{97}=2 \end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l} \left(C_4H_5N_2O_1\right)_2 \\ C_8H_{10}N_4O_2 \end{array}\right.$$

**3)** Al reaccionar 10,83 g de Hg y 13,71 g de I, resulta un compuesto puro. ¿Cuál es la fórmula empírica?. [diyoduro de mercurio]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{array}{l} 10,83\text{ g Hg}\times\dfrac{1\text{ mol Hg}}{200,59\text{ g Hg}}=0,05399\text{ mol Hg} \\ 13,71\text{ g I}\times\dfrac{1\text{ mol I}}{126,9\text{ g I}}=0,108\text{ mol I} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} Hg_{0,054}I_{0,108} \\ Hg_{\frac{0,054}{0,054}}I_{\frac{0,108}{0,054}} \\ HgI_2 \end{array}\right.$$

**4)** Se sabe que un óxido tiene de fórmula $M_2O_5$. En su forma pura, este compuesto contiene un 75,27% de M en peso. ¿Cuál es el peso atómico de M?. [121,75]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{array}{l} 75,27\text{ g M}\times\dfrac{1\text{ mol M}}{\text{Pa(M)}}=\dfrac{75,27}{\text{Pa(M)}}\text{mol M} \\ (100-75,27)\text{ g O}\times\dfrac{1\text{ mol O}}{16\text{ g O}}=1,5456\text{ mol O} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{5}{2}=\dfrac{1,5456\text{ mol O}}{\dfrac{75,27}{\text{Pa(M)}}\text{mol M}} \\ \text{Pa(M)}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{75,27}{1,5456}=121,75 \end{array}\right.$$

**5)** Determina la fórmula molecular de una sustancia cuyo peso molecular es 72 y que responde a la fórmula empírica de alcano. [$C_5H_{12}$]

**Respuesta**: Alcano $C_nH_{2n+2}$

Pm $(C_nH_{2n+2})$ = 72 = n·Pa(C) + (2n+2)·Pa(H) = 12n + 2n + 2 = 14n + 2 ; n = (72-2)/14 = 5

**6)** Un compuesto tiene la siguiente composición: 58,8% de C; 9,8% de H y 31,4% de O. Sabiendo que su peso molecular está comprendido entre 180 y 220, determina su fórmula empírica y su fórmula molecular. [$C_5H_{10}O_2$ y $C_{10}H_{20}O_4$]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{cases} 58,8\text{ g C}\times\dfrac{1\text{ mol C}}{12\text{ g C}}=4,9\text{ mol C} \\ 9,8\text{ g H}\times\dfrac{1\text{ mol H}}{1\text{ g H}}=9,8\text{ mol H} \\ 31,4\text{ g O}\times\dfrac{1\text{ mol O}}{16\text{ g O}}=1,9625\text{ mol O} \end{cases}\right\}\left\{\begin{cases} C_{4,9}H_{9,8}O_{1,9625} \\ C_{\frac{4,9}{1,9625}}H_{\frac{9,8}{1,9625}}O_{\frac{1,9625}{1,9625}} \\ C_{2,5}H_5O_1 \\ C_5H_{10}O_2 \end{cases}\right\}$$

fórmula empírica $C_5H_{10}O_2$

fórmula molecular: $(C_5H_{10}O_2)_n$

$$(5\cdot12+10\cdot1+2\cdot16)\cdot n=102\cdot n\begin{cases} n=1\Rightarrow Pm=102 \\ n=2\Rightarrow Pm=204 \\ n=3\Rightarrow Pm=306 \end{cases}(C_5H_{10}O_2)_2=C_{10}H_{20}O_4$$

**7)** Sea la reacción química siguiente: $Sc_{(s)} + HCl_{(aq)} \rightleftarrows ScCl_{3(aq)} + H_{2(g)}$ . a) Ajústala; b) calcula cuántos gramos de Sc reaccionarán con HCl, si se desprenden 2,41 L de hidrógeno gas medidos a 373 K y 96,26 kPa. [2,25 g]

**Respuesta**:

$Sc_{(s)} + 3\ HCl_{(aq)} \rightleftarrows ScCl_{3(aq)} + 3½H_{2(g)}$

$$2,41\text{ L de }H_2\Rightarrow n_{H_2}\Rightarrow n_{Sc}\Rightarrow m_{Sc}$$

$$n_{H_2}=\frac{pV}{RT}=\frac{96,26\cdot10^3\text{ Pa}\times2,41\cdot10^{-3}\text{ m}^3}{8,314\dfrac{\text{Pa}\cdot\text{m}^3}{\text{mol}\cdot\text{K}}\times373\text{ K}}=0,0748\text{ mol }H_2$$

$$0,0748\text{ mol }H_2\times\frac{1\text{ mol Sc}}{\frac{3}{2}\text{ mol }H_2}\times\frac{44,956\text{ g Sc}}{1\text{ mol Sc}}=2,24\text{ g Sc}$$

**8)** ¿Cuántos litros de dióxido de azufre se forman al quemar 200 L de sulfuro de hidrógeno y qué volumen de oxígeno se necesita si los reactivos y los productos están a la misma presión y temperatura?. Dato de reacción: $H_2S + 3½\ O_2 \rightleftarrows SO_2 + H_2O$ [200 L y 300 L]

**Respuesta**:

$$H_2S+\tfrac{3}{2}O_2\rightleftarrows SO_2+H_2O$$

$$200\text{ L }H_2S\times\frac{1\text{ L }SO_2\text{ igual p y T}}{1\text{ L }H_2S}=200\text{ L }SO_2\text{ se obtienen}$$

$$200\text{ L }H_2S\times\frac{\frac{3}{2}\text{ L }O_2\text{ igual p y T}}{1\text{ L }H_2S}=300\text{ L }O_2\text{ reaccionan}$$

**9)** El dicloruro de mercurio se forma por la reacción siguiente: $Hg_{(l)} + Cl_{2(g)} \rightleftarrows HgCl_{2(s)}$. Si en un recipiente se introducen 100 g de $Hg_{(l)}$ y 100 g de $Cl_{2(g)}$, a) ¿cuántos gramos de $HgCl_{2(s)}$ se formarán y cuántos quedarán sin reaccionar?. [135,5 g de $HgCl_{2(s}$ y 64,7 g de $Cl_{2(g)}$]

**Respuesta**:

$$Hg+Cl_2\rightleftarrows HgCl_2\quad -\Delta n_{Hg}=-\Delta n_{Cl_2}=\Delta n_{HgCl_2}$$

$$\left.\begin{cases} n_{Hg}=\dfrac{m_{Hg}}{Pa(Hg)}=\dfrac{100\text{ g Hg}}{200,59\frac{\text{g}}{\text{mol}}}=0,499\text{ mol Hg} \\ n_{Cl_2}=\dfrac{m_{Cl_2}}{Pm(Cl_2)}=\dfrac{100\text{ g }Cl_2}{71\frac{\text{g}}{\text{mol}}}=1,408\text{ mol }Cl_2 \end{cases}\right\}\begin{cases} n_{Hg}<n_{Cl_2} \\ \text{Reacciona todo el Hg} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,499\text{ mol Hg}\times\dfrac{1\text{ mol }Cl_2}{1\text{ mol Hg}}\times\dfrac{1\text{ mol }HgCl_2}{1\text{ mol }Cl_2}\times\dfrac{271,59\text{ g }HgCl_2}{1\text{ mol }HgCl_2}=135,5\text{ g }HgCl_2 \\ 0,499\text{ mol }Cl_2\times\dfrac{71\text{ g }Cl_2}{1\text{ mol }Cl_2}=35,43\text{ g }Cl_2\text{ reaccionan} \end{cases}$$

**10)** Al quemar gasolina (2,2,4-trimetilpentano), a temperatura y presión ambiental, se produce dióxido de carbono gas y agua líquida. Si quemamos 7 L de gasolina, de densidad 0,704 g/mL, ¿qué volumen de aire, en condiciones normales (0ºC y 1 atm), se necesita para su combustión?. Dato: el aire tiene un 21% en volumen de oxígeno. [57.637,4 L de aire]

**Respuesta**:

$$C_8H_{18} + \tfrac{25}{2} O_2 \rightleftarrows 8\ CO_2 + 9\ H_2O \quad \left\{ -\frac{\Delta n_{C_8H_{18}}}{1} = -\frac{\Delta n_{O_2}}{\frac{25}{2}} \right\} \ \Delta n_{O_2} = \tfrac{25}{2} \times \Delta n_{C_8H_{18}}$$

$$7\ L\ C_8H_{18} \Rightarrow m_{C_8H_{18}} \Rightarrow n_{C_8H_{18}} \Rightarrow n_{O_2} \Rightarrow V_{O_2} \Rightarrow V_{aire}$$

$$7\ L\ C_8H_{18} \times \frac{0,704\ g\ C_8H_{18}}{10^{-3}\ L\ C_8H_{18}} \times \frac{1\ mol\ C_8H_{18}}{114\ g\ C_8H_{18}} \times \frac{\frac{25}{2}\ mol\ O_2}{1\ mol\ C_8H_{18}} \times \frac{22,4\ L\ O_2\ en\ CN}{1\ mol\ O_2} \times \frac{100\ L\ aire}{21\ L\ O_2} = 57637,4\ L\ aire\ en\ CN$$

**11)** Una muestra de 5,13 g de sulfato de amonio impuro se hacen reaccionar con un exceso de hidróxido de sodio y se obtienen amoniaco, sulfato de sodio y agua. Si se obtienen 1,80 decímetros cúbicos de amoniaco gas, medidos a 293 K y 100 kPa, calcula el porcentaje de sulfato de amonio en la muestra analizada. [95,1%]

**Respuesta**:

$$(NH_4)_2SO_4 + 2\ NaOH \rightleftarrows 2\ NH_3 + Na_2SO_4 + 2\ H_2O \quad \left\{ -\Delta n_{(NH_4)_2SO_4} = \frac{1}{2} \Delta n_{NH_3} \right\}$$

$$1,80\ L\ NH_3 \Rightarrow n_{NH_3} \Rightarrow n_{(NH_4)_2SO_4} \Rightarrow m_{(NH_4)_2SO_4}$$

$$n_{NH_3} = \frac{pV}{RT} = \frac{100 \cdot 10^3\ Pa \times 1,80 \cdot 10^{-3}\ m^3}{8,314 \frac{Pa \cdot m^3}{mol \cdot K} \times 293\ K} = 0,07389\ mol\ NH_3$$

$$0,07389\ mol\ NH_3 \times \frac{1\ mol\ (NH_4)_2SO_4}{2\ mol\ NH_3} \times \frac{132\ g\ (NH_4)_2SO_4}{1\ mol\ (NH_4)_2SO_4} = 4,877\ g\ (NH_4)_2SO_4$$

$$\frac{4,877\ g\ (NH_4)_2SO_4}{5,13\ g\ (NH_4)_2SO_4\ impuro} = 0,95$$

**12)** Calcular los gramos de ácido clorhídrico concentrado, de un 36,2% en peso de HCl, que son necesarios para neutralizar: a) una disolución que contiene 1,25 g de hidróxido de calcio, y b) una disolución con 1,30 g de hidróxido de potasio. Datos: a) $2\ HCl_{(aq)} + Ca(OH)_{2(aq)} \rightleftarrows CaCl_{2(aq)} + 2\ H_2O_{(l)}$; b) $HCl_{(aq)} + KOH_{(aq)} \rightleftarrows KCl_{(aq)} + H_2O_{(l)}$ [3,41 g con el hidróxido de calcio y 2,34 g con el KOH]

**Respuesta**:

$$\begin{cases} 2\ HCl + Ca(OH)_2 \rightleftarrows CaCl_2 + 2\ H_2O \left\{ \Delta n_{HCl} = 2 \times \Delta n_{Ca(OH)_2} \right\} \\ 1,25\ g\ Ca(OH)_2 \Rightarrow n_{Ca(OH)_2} \Rightarrow n_{HCl} \Rightarrow m_{HCl} \Rightarrow m_{disol.} \\ 1,25\ g\ Ca(OH)_2 \times \frac{1\ mol\ Ca(OH)_2}{74\ g\ Ca(OH)_2} \times \frac{2\ mol\ HCl}{1\ mol\ Ca(OH)_2} \times \frac{36,5\ g\ HCl}{1\ mol\ HCl} \times \frac{100\ g\ dis.}{36,2\ g\ HCl} = 3,4\ g\ disol. \end{cases}$$

$$\begin{cases} HCl + KOH \rightleftarrows KCl + H_2O \left\{ \Delta n_{HCl} = \Delta n_{KOH} \right\} \\ 1,30\ g\ KOH \Rightarrow n_{KOH} \Rightarrow n_{HCl} \Rightarrow m_{HCl} \Rightarrow m_{disol.} \\ 1,30\ g\ KOH \times \frac{1\ mol\ KOH}{56\ g\ KOH} \times \frac{1\ mol\ HCl}{1\ mol\ KOH} \times \frac{36,5\ g\ HCl}{1\ mol\ HCl} \times \frac{100\ g\ dis.}{36,2\ g\ HCl} = 2,34\ g\ disol. \end{cases}$$

**13)** Evaporamos hasta sequedad 300 $cm^3$ de una disolución de la sal $NaClO_{3(aq)}$. Si se continúa calentando, la sal seca se descompone químicamente en $NaCl_{(s)}$ y $O_{2(g)}$, obteniéndose 2,24 $dm^3$ de oxígeno medidos a 300 K y 1 bar. Calcular cuál era la concentración de la disolución de partida. [0,2 mol/L]

**Respuesta**:

$$NaClO_3 \rightarrow NaCl + \tfrac{3}{2} O_2$$

$$2,24\ dm^3\ O_2 \Rightarrow n_{O_2} \Rightarrow n_{NaClO_3} \Rightarrow C_{NaClO_3}$$

$$n_{O_2} = \frac{pV}{RT} = \frac{1\ bar \times 2,24\ L}{0,08314 \frac{bar \cdot L}{mol \cdot K} \times 300\ K} = 0,0898\ mol$$

$$0,0898\ mol\ O_2 \times \frac{1\ mol\ NaClO_3}{\frac{3}{2}\ mol\ O_2} = 0,0599\ mol\ NaClO_3 \Rightarrow \frac{0,0599\ mol\ NaClO_3}{0,3\ L} = 0,2 \frac{mol}{L}$$

**14)** Una mezcla de gases $CH_4$ y $C_2H_6$ ocupa un volumen de 20 $cm^3$, a una determinada P y T. Se hace estallar la mezcla de gases con $O_{2(g)}$ y se obtienen 25 $cm^3$ de $CO_{2(g)}$ medidos en las mismas condiciones de P y T. Calcula la composición volumétrica de la mezcla. [75% de $CH_4$]

**Respuesta**:

Los volúmenes están medidos en las mismas condiciones de presión y temperatura

$$CH_4 + 2\ O_2 \rightleftarrows CO_2 + 2\ H_2O$$

$$C_2H_6 + \tfrac{7}{2}\ O_2 \rightleftarrows 2\ CO_2 + 3\ H_2O$$

$$20\ cm^3\ \text{mezcla}\left\{\begin{array}{l} x\ cm^3\ CH_4 \times \dfrac{1\ cm^3\ CO_2}{1\ cm^3\ CH_4} = x\ cm^3\ CO_2 \\ (20-x)\ cm^3\ C_2H_6 \times \dfrac{2\ cm^3\ CO_2}{1\ cm^3\ C_2H_6} = 2(20-x)\ cm^3\ CO_2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 25\ cm^3\ CO_2 = x + 2(20-x)\ cm^3\ CO_2 \\ 25 = x + 40 - 2x = 40 - x \\ x = 15\ cm^3\ CH_4 \end{array}\right.$$

**15)** Una mezcla de gases constituida por 0,30 g de $C_2H_6$; 2,9 g de $C_4H_{10}$ y 16,0 g de $O_2$ se halla en un recipiente cerrado de 2 $dm^3$ de volumen a la temperatura de 300 K. Calcula: a) la presión inicial de la mezcla y la presión parcial del oxígeno; b) la presión final de la mezcla después de la reacción a la temperatura de 500 K y la presión parcial del oxígeno que queda. [7,0 bar; 6,25 bar; 13 bar; 2,9 bar]

**Respuesta**:

$$\left\{\begin{array}{l} n_{C_2H_6} = \dfrac{m_{C_2H_6}}{Pm(C_2H_6)} = \dfrac{0,30\ g}{30\ \frac{g}{mol}} = 0,01\ mol \\ n_{C_4H_{10}} = \dfrac{m_{C_4H_{10}}}{Pm(C_4H_{10})} = \dfrac{2,9\ g}{58\ \frac{g}{mol}} = 0,05\ mol \\ n_{O_2} = \dfrac{m_{O_2}}{Pm(O_2)} = \dfrac{16,0\ g}{32\ \frac{g}{mol}} = 0,5\ mol \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} p_{i(mezcla)} = \dfrac{n_t RT}{V} = \dfrac{0,56\ mol \times 0,08314\ \frac{bar\cdot L}{mol\cdot K} \times 300\ K}{2\ L} = 6,98\ bar \\ p_{O_2} = \dfrac{n_{O_2} RT}{V} = \dfrac{0,5\ mol \times 0,08314\ \frac{bar\cdot L}{mol\cdot K} \times 300\ K}{2\ L} = 6,24\ bar \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} C_2H_6 + \tfrac{7}{2}\ O_2 \rightleftarrows 2\ CO_{2(g)} + 3\ H_2O_{(g)} \\ C_4H_{10} + \tfrac{13}{2}\ O_2 \rightleftarrows 4\ CO_{2(g)} + 5\ H_2O_{(g)} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 0,01\ mol\ C_2H_6 \times \dfrac{5\ mol\ (CO_2 + H_2O)}{1\ mol\ C_2H_6} = 0,05\ mol\ (CO_2 + H_2O) \\ 0,05\ mol\ C_4H_{10} \times \dfrac{9\ mol\ (CO_2 + H_2O)}{1\ mol\ C_4H_{10}} = 0,45\ mol\ (CO_2 + H_2O) \\ 0,5\ mol\ O_2 - \left(\dfrac{7}{2}\cdot 0,01 + \dfrac{13}{2}\cdot 0,05\right) mol\ O_2 = 0,14\ mol\ O_2 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} p_{f(mezcla)} = \dfrac{n_t RT}{V} = \dfrac{0,64\ mol \times 0,08314\ \frac{bar\cdot L}{mol\cdot K} \times 500\ K}{2\ L} = 13,3\ bar \\ p_{O_2} = \dfrac{n_{O_2} RT}{V} = \dfrac{0,14\ mol \times 0,08314\ \frac{bar\cdot L}{mol\cdot K} \times 500\ K}{2\ L} = 2,91\ bar \end{array}\right.$$

**16)** La combustión de 2,9 g de cierto hidrocarburo gaseoso ($C_xH_y$) produjo 8,8 g de dióxido de carbono. La densidad de dicho hidrocarburo, en condiciones normales, vale 2,59 g/L. Determine la fórmula molecular y escriba las fórmulas estructurales de todos los posibles isómeros. [butano y metilpropano]

**Respuesta**:

$$C_xH_y + \left(\frac{2x + \frac{1}{2}y}{2}\right) O_2 \rightleftarrows x\ CO_2 + \frac{y}{2}\ H_2O$$

$$2,9\ g\ C_xH_y \left\{\begin{array}{l} 8,8\ g\ CO_2 \times \dfrac{12\ g\ C}{44\ g\ CO_2} = 2,4\ g\ C \\ (2,9\ g\ C_xH_y - 2,4\ g\ C) = 0,5\ g\ H \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 2,4\ g\ C \times \dfrac{1\ mol\ C}{12\ g\ C} = 0,2\ mol\ C \\ 0,5\ g\ H \times \dfrac{1\ mol\ H}{1\ g\ H} = 0,5\ mol\ H \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} C_{0,2}H_{0,5} \\ C_2H_5 \end{array}\right.$$

$$pV = nRT = \frac{m_{C_xH_y}}{Pm(C_xH_y)} RT \Rightarrow Pm(C_xH_y) = \frac{m_{C_xH_y}}{V}\frac{RT}{p} = \frac{dRT}{p} = \frac{2,59\ \frac{g}{L} \times 0,082\ \frac{atm\cdot L}{mol\cdot K} \times 273\ K}{1\ atm} = 57,98\ \frac{g}{mol}$$

$$\text{Molecular: } (C_2H_5)_n \Rightarrow (2\cdot 12 + 5\cdot 1)\cdot n = 29\cdot n \left\{\begin{array}{l} n = 1 \Rightarrow Pm = 29 \\ n = 2 \Rightarrow Pm = 58 \\ n = 3 \Rightarrow Pm = 87 \end{array}\right\} (C_2H_5)_2 = C_4H_{10}$$

**17)** Si tenemos 1,00 g de un compuesto que contiene C, H y O comprobamos que a 473 K y a 44,4 kPa ocupa 1,00 L. Por combustión de 10,0 g del compuesto se obtienen 0,455 mol de dióxido de carbono y 0,455 mol de

agua. Calcula la fórmula molecular y nombra los isómeros. [$C_4H_8O_2$; isómeros (ácidos, ésteres y cetonas con hidróxido)]

**Respuesta**:

$$C_xH_yO_z + \left(\frac{2x+\frac{1}{2}y}{2} - z\right) O_2 \rightleftarrows x\ CO_2 + \frac{y}{2}\ H_2O$$

$$10\ g\ C_xH_yO_z \begin{cases} 0{,}455\ mol\ CO_2 \times \dfrac{12\ g\ C}{1\ mol\ CO_2} = 5{,}46\ g\ C \Rightarrow 0{,}455\ mol \\ 0{,}455\ mol\ H_2O \times \dfrac{2\ g\ H}{1\ mol\ H_2O} = 0{,}910\ g\ H \Rightarrow 0{,}910\ mol \\ 10\ g\ C_xH_yO_z - (5{,}46\ g\ C + 0{,}910\ g\ H) = 3{,}63\ g\ O \Rightarrow 0{,}227\ mol \end{cases} \begin{cases} C_{0{,}455}H_{0{,}910}O_{0{,}227} \\ C_2H_4O_1 \end{cases}$$

$$pV = nRT = \frac{m_{C_xH_yO_z}RT}{Pm\left(C_xH_yO_z\right)}$$

$$Pm\left(C_xH_yO_z\right) = \frac{m_{C_xH_yO_z}RT}{pV} = \frac{1\ g \times 8{,}314\ \frac{Pa \cdot m^3}{mol \cdot K} \times 473\ K}{44{,}4 \cdot 10^3\ Pa \times 1 \cdot 10^{-3}\ m^3} = 88{,}57\ \frac{g}{mol}$$

$$\text{Molecular: } \left(C_2H_4O_1\right)_n \Rightarrow (2 \cdot 12 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 16) \cdot n = 44 \cdot n \begin{cases} n = 1 \Rightarrow Pm = 44 \\ n = 2 \Rightarrow Pm = 88 \\ n = 3 \Rightarrow Pm = 132 \end{cases} \left(C_2H_4O_1\right)_2 = C_4H_8O_2$$

**18)** Sea la siguiente reacción: $CH_3OH + KMnO_4 + KOH \rightleftarrows K_2MnO_4 + CO_2 + H_2O$. a) Escribe la reacción ajustada; b) calcula el volumen de $CO_2$ que se obtiene a 300 K y 1,013 bar si reaccionan 2 g de $CH_3OH$ con exceso de permanganato de potasio. [1,54 $dm^3$].

**Respuesta**:

$$\overset{-2}{C}H_3OH + K\overset{+7}{Mn}O_4 + KOH \rightleftarrows K_2\overset{+6}{Mn}O_4 + \overset{+4}{C}O_2 + H_2O$$

$$CH_3OH + 6\ KMnO_4 + 6\ KOH \rightleftarrows 6\ K_2MnO_4 + CO_2 + 5\ H_2O$$

$$m_{CH_3OH} \Rightarrow n_{CH_3OH} \Rightarrow n_{CO_2} \Rightarrow V_{CO_2}$$

$$2\ g\ CH_3OH \times \frac{1\ mol\ CH_3OH}{32\ g\ CH_3OH} \times \frac{1\ mol\ CO_2}{1\ mol\ CH_3OH} = 0{,}0625\ mol\ CO_2$$

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{0{,}0625\ mol \times 0{,}08314\ \frac{bar \cdot L}{mol \cdot K} \times 300\ K}{1{,}013\ bar} = 1{,}54\ L$$

**19)** En la fermentación de la glucosa $C_6H_{12}O_6$ se produce $CH_3CH_2OH$ y $CO_2$. Si el rendimiento de la reacción es del 30% y se parte de 2,700 kg de glucosa, ¿cuántos litros de $CO_2$, medidos a 1,5 atm y 300 K se obtendrán? y ¿cuántos gramos y litros de $CH_3CH_2OH$ se obtendrán?. Dato: d(etanol) = 0,78 g/mL. [147,7 L $CO_2$, 414 g de $CH_3CH_2OH$ y 0,531 L]

**Respuesta**:

$$C_6H_{12}O_6 \rightleftarrows 2\ CH_3CH_2OH + 2\ CO_2$$

$$m_{C_6H_{12}O_6} \Rightarrow n_{C_6H_{12}O_6} \overset{30\%}{\Rightarrow} \begin{cases} n_{CO_2} \Rightarrow V_{CO_2} \\ n_{CH_3CH_2OH} \Rightarrow m_{CH_3CH_2OH} \end{cases}$$

$$2700\ g\ C_6H_{12}O_6 \times \frac{1\ mol\ C_6H_{12}O_6}{180\ g\ C_6H_{12}O_6} \times \frac{30}{100} \times \begin{cases} \dfrac{2\ mol\ CO_2}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} = 9\ mol\ CO_2 \\ \dfrac{2\ mol\ CH_3CH_2OH}{1\ mol\ C_6H_{12}O_6} = 9\ mol\ CH_3CH_2OH \end{cases}$$

$$V_{CO_2} = \frac{nRT}{p} = \frac{9\ mol \times 0{,}082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} \times 300\ K}{1{,}5\ atm} = 147{,}6\ L$$

$$V_{CH_3CH_2OH} = \frac{m_{CH_3CH_2OH}}{d} = \frac{9\ mol \times 46\ \frac{g}{mol}}{0{,}78\ \frac{g}{mL}} = \frac{414\ g}{0{,}78\ \frac{g}{mL}} = 530{,}8\ mL$$

**20)** En una bombona de acero se mezclan un hidrocarburo gaseoso con la cantidad exacta de oxígeno gas para que al quemarse el hidrocarburo se transforme completamente en dióxido de carbono y agua. Las presiones antes y después de la combustión son iguales, medidas a la misma temperatura. La presión parcial del dióxido de carbono es la misma que la del vapor de agua. Con estos datos determina el peso molecular del hidrocarburo. [28]

**Respuesta**:

$$C_xH_y + \left(\frac{2x + \frac{1}{2}y}{2}\right) O_2 \rightleftarrows x\ CO_2 + \frac{1}{2}y\ H_2O$$

$$\left.\begin{array}{ll} p_i = p_f & \Rightarrow \quad 1 + \dfrac{2x + \frac{1}{2}y}{2} = x + \dfrac{1}{2}y \\ p_{CO_2} = p_{H_2O} \Rightarrow & \quad x = \dfrac{1}{2}y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 + \dfrac{2x + x}{2} = x + x \\ 1 + \dfrac{3}{2}x = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow C_2H_4$$

**21)** Al quemar 75 L de acetileno en unas determinadas condiciones de presión y temperatura calcula: a) el volumen de oxígeno que se consumirá; b) el volumen de todos los productos gaseosos de la reacción. Suponemos que el volumen de los productos los medimos en las mismas condiciones de P y T iniciales. [187,5 L oxígeno; 225 L de productos]

**Respuesta**:

$$C_2H_2 + \tfrac{5}{2}O_2 \rightleftarrows 2\ CO_2 + H_2O$$

$$75\ L\ C_2H_2 \times \frac{\frac{5}{2}\ L\ O_2\ \text{igual p y T}}{1\ L\ C_2H_2} = 187{,}5\ L\ O_2$$

$$75\ L\ C_2H_2 \times \frac{3\ L\ (CO_2 + H_2O)\ \text{igual p y T}}{1\ L\ C_2H_2} = 225\ L\ (CO_2 + H_2O)$$

**22)** Al hacer saltar una chispa eléctrica en el seno de una masa de $O_{2(g)}$ puro que ocupa un volumen de 1000 $cm^3$, a unas determinadas condiciones de P y T, el volumen de la mezcla se reduce a 976 $cm^3$, manteniendo las mismas condiciones de P y T. Calcula el porcentaje de oxígeno gas que se ha transformado en ozono. Dato: $3\ O_{2(g)} \rightleftarrows 2\ O_{3(g)}$. [7,2%]

**Respuesta**:

$$3\ O_2 \rightleftarrows 2\ O_3 \quad \left\{x\ cm^3\ O_2 \times \frac{2\ cm^3\ O_3}{3\ cm^3\ O_2} = \frac{2x}{3}\ cm^3\ O_3\right\}$$

Por cada x $cm^3$ de $O_2$ que reaccionen el volumen se reduce en $\left(x - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{x}{3}\right) cm^3$

El volumen se reduce en $(1000 - 976) cm^3 = 24\ cm^3 = \dfrac{x}{3} \Rightarrow x = 72\ cm^3$ de $O_2$ han reaccionado

**23)** Explota 100 $cm^3$ de una mezcla de $H_{2(g)}$ y $O_{2(g)}$ a 298 K y 1 bar, y queda un residuo gaseoso de 7 $cm^3$ de $O_{2(g)}$ medidos a la misma T y P. ¿Qué $\%O_{2(g)}$ había en la mezcla?. [38%]

**Respuesta**:

$$2\ H_{2(g)} + O_{2(g)} \rightleftarrows 2\ H_2O_{(l)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\ cm^3\ H_2 \times \dfrac{1\ cm^3\ O_2}{2\ cm^3\ H_2} = \dfrac{x}{2}\ cm^3\ O_2 \\ (100 - x)\ cm^3\ O_2 = \left(\dfrac{x}{2} + 7\right) cm^3\ O_2 \end{array}\right\} \left\{100 - x = \frac{1}{2}x + 7\right\} \left\{\begin{array}{l} x = 62\ cm^3\ H_2 \\ 38\ cm^3\ \text{de}\ O_2 \end{array}\right.$$

**24)** Hallar el porcentaje en volumen de vapor de gasolina y aire para que la combustión de la gasolina sea completa. Suponer que el aire tiene un 21% en volumen de oxígeno y que la gasolina está constituida por el compuesto 2,2,4-trimetilpentano. [1,7%]

**Respuesta**:

$$C_8H_{18} + \tfrac{25}{2}O_2 \rightleftarrows 8\ CO_2 + 9\ H_2O \quad \left\{\tfrac{25}{2} \times \Delta n_{C_8H_{18}} = \Delta n_{O_2}\right\}$$

$$1\ L\ C_8H_{18} \Rightarrow n_{C_8H_{18}} \Rightarrow n_{O_2} \Rightarrow V_{O_2} \Rightarrow V_{aire}$$

$$1\ L\ C_8H_{18} \times \frac{n = \dfrac{p \times 1\ L}{RT}\ mol\ C_8H_{18}}{1\ L\ C_8H_{18}} \times \frac{\frac{25}{2}\ mol\ O_2}{1\ mol\ C_8H_{18}} \times \frac{V = \dfrac{1\ mol \times RT}{p}\ L\ O_2}{1\ mol\ O_2} \times \frac{100\ L\ aire}{21\ L\ O_2} = \frac{\frac{25}{2} \times 100}{21}\ L\ aire = 59{,}52\ L\ aire$$

$$\frac{C_8H_{18}}{mezcla} \equiv \frac{1\ L\ C_8H_{18}}{1\ L\ C_8H_{18} + 59{,}52\ L\ aire} = 0{,}0165 \Rightarrow 1{,}65\%$$

**25)** Una mezcla de 2,05 g de SnO y $SnO_2$ se calienta y se hace reaccionar con $H_{2(g)}$ obteniéndose estaño puro y agua. El estaño obtenido tiene una masa de 1,75 g. Calcula la composición de la mezcla original. [71,7% de SnO]

**Respuesta**:

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{SnO + H_2 \rightleftarrows Sn + H_2O}\\ \mathrm{SnO_2 + 2\ H_2 \rightleftarrows Sn + 2\ H_2O}\end{matrix}\right\} 2{,}05\ \mathrm{g\ (SnO + SnO_2)} \Rightarrow 1{,}75\ \mathrm{g\ Sn}$$

$$\mathrm{x\ g\ SnO} \times \frac{1\ \mathrm{mol\ SnO}}{134{,}71\ \mathrm{g\ SnO}} \times \frac{1\ \mathrm{mol\ Sn}}{1\ \mathrm{mol\ SnO}} \times \frac{118{,}71\ \mathrm{g\ Sn}}{1\ \mathrm{mol\ Sn}} = \left(\frac{118{,}71}{134{,}71}\mathrm{x}\right)\mathrm{g\ Sn}$$

$$(2{,}05 - \mathrm{x})\ \mathrm{g\ SnO_2} \times \frac{1\ \mathrm{mol\ SnO_2}}{150{,}71\ \mathrm{g\ SnO_2}} \times \frac{1\ \mathrm{mol\ Sn}}{1\ \mathrm{mol\ SnO_2}} \times \frac{118{,}71\ \mathrm{g\ Sn}}{1\ \mathrm{mol\ Sn}} = \frac{118{,}71}{150{,}71}(2{,}05 - \mathrm{x})\ \mathrm{g\ Sn}$$

$$1{,}75\ \mathrm{g\ Sn} = \left(\frac{118{,}71}{134{,}71}\mathrm{x}\right)\mathrm{g\ Sn} + \frac{118{,}71}{150{,}71}(2{,}05 - \mathrm{x})\ \mathrm{g\ Sn}$$

$$1{,}75 = \frac{118{,}71}{134{,}71}\mathrm{x} + \frac{118{,}71 \times 2{,}05}{150{,}71} - \frac{118{,}71}{150{,}71}\mathrm{x}$$

$$\mathrm{x} = \frac{1{,}75 - \dfrac{118{,}71 \times 2{,}05}{150{,}71}}{\left(\dfrac{118{,}71}{134{,}71} - \dfrac{118{,}71}{150{,}71}\right)} = 1{,}47\ \mathrm{g\ SnO} \Rightarrow \frac{1{,}47\ \mathrm{g\ Sn}}{2{,}05\ \mathrm{g\ (SnO + SnO_2)}} = 0{,}717 \Rightarrow 71{,}7\%\ \mathrm{SnO}$$

**26)** Cuando reacciona el $HNO_{3(aq)}$ con el $Cu_{(s)}$ se obtiene nitrato de cobre(II), monóxido de nitrógeno y agua. Si reaccionan 28,0 g de ácido nítrico al 30% en peso ¿qué cantidad de cobre reaccionará? y ¿cuántos gramos de NO se obtendrán?. [3,18 g Cu; 1,00 g de NO]

**Respuesta**:

$$\mathrm{8\ HNO_3 + 3\ Cu \rightleftarrows 3\ Cu(NO_3)_2 + 2\ NO + 4\ H_2O} \quad \left\{\frac{-\Delta n_{HNO_3}}{8} = \frac{-\Delta n_{Cu}}{3} = \frac{\Delta n_{NO}}{2}\right\}$$

$$28\ \mathrm{g\ HNO_3\,(30\%)} \times \frac{30\ \mathrm{g\ HNO_3}}{100\ \mathrm{g\ HNO_3\,(30\%)}} \times \frac{1\ \mathrm{mol\ HNO_3}}{63\ \mathrm{g\ HNO_3}} \times \frac{\frac{3}{8}\ \mathrm{mol\ Cu}}{1\ \mathrm{mol\ HNO_3}} \times \frac{63{,}5\ \mathrm{g\ Cu}}{1\ \mathrm{mol\ Cu}} = 3{,}18\ \mathrm{g\ Cu}$$

$$28\ \mathrm{g\ HNO_3\,(30\%)} \times \frac{30\ \mathrm{g\ HNO_3}}{100\ \mathrm{g\ HNO_3\,(30\%)}} \times \frac{1\ \mathrm{mol\ HNO_3}}{63\ \mathrm{g\ HNO_3}} \times \frac{\frac{2}{8}\ \mathrm{mol\ NO}}{1\ \mathrm{mol\ HNO_3}} \times \frac{30\ \mathrm{g\ NO}}{1\ \mathrm{mol\ NO}} = 1{,}0\ \mathrm{g\ NO}$$

**27)** Cuando reacciona el $KMnO_{4(aq)}$ con el $HCl_{(aq)}$ se obtiene $Cl_{2(g)}$, $MnCl_{2(aq)}$, $KCl_{(aq)}$ y $H_2O_{(l)}$. Si reaccionan 165 mL de $HCl_{(aq)}$, del 36% en peso y densidad 1,18 g/mL, con suficiente cantidad de $KMnO_{4(aq)}$. Calcula el volumen de $Cl_{2(g)}$ que se obtendrá a 750 mmHg y a 301K.[15 L]

**Respuesta**:

$$\mathrm{KMnO_4 + 8\ HCl \rightleftarrows MnCl_2 + \frac{5}{2}Cl_2 + KCl + 4\ H_2O} \quad \left\{\frac{-\Delta n_{HCl}}{8} = \frac{\Delta n_{Cl_2}}{\frac{5}{2}}\right\}$$

$$\mathrm{Vol._{HCl(36\%)} \Rightarrow m_{HCl(36\%)} \Rightarrow m_{HCl} \Rightarrow n_{HCl} \Rightarrow n_{Cl_2} \Rightarrow Vol._{Cl_2}}$$

$$165\ \mathrm{mL\ HCl_{(36\%)}} \times \frac{1{,}18\ \mathrm{g\ HCl_{(36\%)}}}{1\ \mathrm{mL\ HCl_{(36\%)}}} \times \frac{36\ \mathrm{g\ HCl}}{100\ \mathrm{g\ HCl_{(36\%)}}} \times \frac{1\ \mathrm{mol\ HCl}}{36{,}5\ \mathrm{g\ HCl}} \times \frac{\frac{5}{2}\ \mathrm{mol\ Cl_2}}{8\ \mathrm{mol\ HCl}} \times \frac{0{,}082\ \frac{\mathrm{atm \cdot L}}{\mathrm{mol \cdot K}} \times 301\ \mathrm{K}}{\frac{750}{760}\ \mathrm{atm}} = 14{,}62\ \mathrm{L\ Cl_2}$$

**28)** Al calentar al aire una muestra de 2,862 g de un óxido de cobre de color rojo reaccionó dando 3,182 g de un óxido de cobre de color negro. Al calentar éste último óxido en presencia de hidrógeno reaccionó dejando un residuo de 2,542 g de cobre puro. a) ¿qué ley de combinación se puede deducir a partir de los datos anteriores?. Enúnciala. ¿Establece las fórmulas empíricas de los dos óxidos?. [Óxido de cobre(I) y óxido de cobre(II)]. **Respuesta**:

$$2{,}862\ \mathrm{g\ (rojo)} \overset{\mathrm{calor + O_2}}{\rightarrow} 3{,}182\ \mathrm{g\ (negro)} \overset{\mathrm{calor + H_2}}{\rightarrow} 2{,}542\ \mathrm{g\ Cu}$$

$$\left.\begin{matrix}3{,}182\ \mathrm{g\ (negro)}\left\{\begin{matrix}2{,}542\ \mathrm{g\ Cu}\\ 0{,}640\ \mathrm{g\ O}\end{matrix}\right\}\\ 2{,}862\ \mathrm{g\ (rojo)}\left\{\begin{matrix}2{,}542\ \mathrm{g\ Cu}\\ 0{,}320\ \mathrm{g\ O}\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\} \frac{\mathrm{(negro)}}{\mathrm{(rojo)}} = \frac{\dfrac{0{,}640\ \mathrm{g\ O}}{2{,}542\ \mathrm{g\ Cu}}}{\dfrac{0{,}320\ \mathrm{g\ O}}{2{,}542\ \mathrm{g\ Cu}}} = 2 \text{ (ley de las proporciones múltiples)}$$

$$3{,}182\ \mathrm{g\ (negro)}\left\{\begin{matrix}2{,}542\ \mathrm{g\ Cu} \times \dfrac{1\ \mathrm{mol\ Cu}}{63{,}5\ \mathrm{g\ Cu}} = 0{,}04\ \mathrm{mol\ Cu}\\ 0{,}640\ \mathrm{g\ O} \times \dfrac{1\ \mathrm{mol\ O}}{16\ \mathrm{g\ O}} = 0{,}04\ \mathrm{mol\ O}\end{matrix}\right\} \mathrm{CuO}$$

$$2{,}862\ \mathrm{g\ (rojo)}\left\{\begin{matrix}2{,}542\ \mathrm{g\ Cu} \times \dfrac{1\ \mathrm{mol\ Cu}}{63{,}5\ \mathrm{g\ Cu}} = 0{,}04\ \mathrm{mol\ Cu}\\ 0{,}320\ \mathrm{g\ O} \times \dfrac{1\ \mathrm{mol\ O}}{16\ \mathrm{g\ O}} = 0{,}02\ \mathrm{mol\ O}\end{matrix}\right\} \mathrm{Cu_2O}$$

**29)** Para obtener bromobenceno se hace reaccionar 85,5 mL de benceno líquido, de densidad 0,88 g/mL, con un exceso de dibromo, obteniéndose además HBr. Si en la práctica se obtuvieron 50,0 g de bromobenceno determina el rendimiento de la reacción. [33%]

**Respuesta**:

$$C_6H_{6(l)} + Br_2 \rightleftarrows C_6H_5Br + HBr$$

$$m_{C_6H_5Br} \Rightarrow n_{C_6H_5Br} \Rightarrow n_{C_6H_6} \Rightarrow m_{C_6H_6} \Rightarrow Vol._{C_6H_{6(l)}} \Rightarrow \frac{Vol._{C_6H_{6(l)}}}{85,5\ mL}$$

$$50\ g\ C_6H_5Br \times \frac{1\ mol\ C_6H_5Br}{157\ g\ C_6H_5Br} \times \frac{1\ mol\ C_6H_6}{1\ mol\ C_6H_5Br} \times \frac{78\ g\ C_6H_6}{1\ mol\ C_6H_6} \times \frac{1\ mL\ C_6H_6}{0,88\ g\ C_6H_6} = 28,2\ mL\ C_6H_6$$

$$\frac{28,2\ mL}{85,5\ mL} = 0,33$$

**30)** Una pieza de $Zn_{(s)}$ de 1,96 g reacciona con 25 mL de $H_2SO_{4(aq)}$ de concentración 0,275 mol/L. ¿Qué volumen de $H_{2(g)}$, medido a 298 K y 745 mm de Hg, se obtendrá?. [171 mL]

**Respuesta**:

$$Zn + H_2SO_4 \rightleftarrows ZnSO_4 + H_2$$

$$\left.\begin{array}{l} n_{Zn} = \dfrac{m_{Zn}}{Pa(Zn)} = \dfrac{1,96\ g\ Zn}{65,39\ \frac{g}{mol}} = 0,03\ mol\ Zn \\ n_{H_2SO_4} = C \times V = 0,275\ \dfrac{mol}{L} \times 0,025\ L = 0,006875\ mol\ H_2SO_4 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} n_{H_2SO_4} < n_{Zn} \\ n_{H_2SO_4} \Rightarrow n_{H_2} \Rightarrow V_{H_{2(g)}} = \dfrac{nRT}{p} \end{array}\right.$$

$$0,006875\ mol\ H_2SO_4 \times \frac{1\ mol\ H_2}{1\ mol\ H_2SO_4} \times \frac{0,082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} \times 298\ K}{\frac{745}{760}\ atm} = 0,171\ L\ H_2$$

**31)** Una muestra de caliza de 5 g se hizo reaccionar con una disolución de ácido clorhídrico hasta que dejó de desprenderse gas. Se necesitaron 35 mL de la disolución y el gas obtenido ocupó un volumen de 784 mL medidos en C.N. (1 atm y 0ºC). Escribe la reacción química del proceso, calcula la concentración de la disolución de HCl y la riqueza en carbonato de calcio de la caliza. [2 mol/L (2 M); 70%]

**Respuesta**:

$$CaCO_3 + 2\ HCl \rightleftarrows CaCl_2 + CO_2 + H_2O$$

$$\left\{\begin{array}{l} Vol._{CO_2} \Rightarrow n_{CO_2} \Rightarrow n_{HCl} \Rightarrow C_{HCl} \\ Vol._{CO_2} \Rightarrow n_{CO_2} \Rightarrow n_{CaCO_3} \Rightarrow m_{CaCO_3} \Rightarrow \dfrac{m_{CaCO_3}}{5\ g\ caliza} \end{array}\right.$$

$$0,784\ L\ CO_{2(CN)} \times \frac{1\ mol\ CO_2}{22,4\ L\ CO_{2(CN)}} \times \frac{2\ mol\ HCl}{1\ mol\ CO_2} = 0,07\ mol\ HCl \Rightarrow C = \frac{0,07\ mol\ HCl}{0,035\ L} = 2\frac{mol}{L}$$

$$0,784\ L\ CO_{2(CN)} \times \frac{1\ mol\ CO_2}{22,4\ L\ CO_{2(CN)}} \times \frac{1\ mol\ CaCO_3}{1\ mol\ CO_2} \times \frac{100\ g\ CaCO_3}{1\ mol\ CaCO_3} = 3,5\ g\ CaCO_3 \Rightarrow \frac{3,5\ g\ CaCO_3}{5\ g\ caliza} = 0,7$$

**32)** La urea, $CO(NH_2)_2$, se usa como fertilizante y se hace por la reacción del dióxido de carbono con el amoníaco, produciéndose además agua. Si queremos producir 2,50 kg de urea calcula qué volumen de $CO_2$ y $NH_3$, a 200 atm y 450ºC, es necesario. [37 L]

**Respuesta**:

$$CO_2 + 2\ NH_3 \rightleftarrows CO(NH_2)_2 + H_2O$$

$$m_{CO(NH_2)_2} \Rightarrow n_{CO(NH_2)_2} \Rightarrow n_{(CO_2+NH_3)} \Rightarrow V_{(CO_2+NH_3)}$$

$$2500\ g\ CO(NH_2)_2 \times \frac{1\ mol\ CO(NH_2)_2}{60\ g\ CO(NH_2)_2} \times \frac{3\ mol\ (CO_2 + NH_3)}{1\ mol\ CO(NH_2)_2} \times \frac{0,082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} \times 723\ K}{200\ atm} = 37\ L\ (CO_2 + NH_3)$$

**33)** Las reacciones que se producen en el "airbag" de un automóvil se inician por un impulso eléctrico en una mezcla formada de tres sustancias ($NaN_3$, $KNO_3$, $SiO_2$), que libera un volumen de nitrógeno gas que llena el globo de poliamida. Calcula los gramos de azida de sodio que hay que colocar para que se liberen 70 L de nitrógeno en C.N. [127 g]. A 573K:

$$\left\{\begin{array}{l} 10\ NaN_3 \rightarrow 10\ Na + 15\ N_2 \\ 10\ Na + 2\ KNO_3 \rightarrow 5\ Na_2O + K_2O + N_2 \\ 5\ Na_2O + K_2O + 6\ SiO_2 \rightarrow 5\ Na_2SiO_3 + K_2SiO_3 \end{array}\right.$$

**Respuesta**:

$$\left.\begin{matrix}10\ NaN_3 \rightarrow 10\ Na + 15\ N_2 \\ 10\ Na + 2\ KNO_3 \rightarrow 5\ Na_2O + K_2O + N_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{-\Delta n_{NaN_3}}{10} = \frac{\Delta n_{N_2}}{16}$$

$$5\ Na_2O + K_2O + 6\ SiO_2 \rightarrow 5\ Na_2SiO_3 + K_2SiO_3$$

$$70\ L\ N_{2(CN)} \times \frac{1\ mol\ N_2}{22,4\ L\ N_{2(CN)}} \times \frac{10\ mol\ NaN_3}{16\ mol\ N_2} \times \frac{65\ g\ NaN_3}{1\ mol\ NaN_3} = 126,95\ g\ NaN_3$$

**34)** El mejor método para preparar oxígeno puro es mediante la descomposición del permanganato de potasio sólido, en vacío y a 215ºC, del que se obtiene oxígeno gas, dióxido de manganeso sólido y manganato de potasio sólido. a) Escribe y ajusta la reacción. b) Calcula la presión del oxígeno gas si reaccionan 1,58 g de permanganato de potasio y se realiza en un recipiente cerrado de 1 L de volumen. Datos: (K)=39; (Mn)=55; (O)=16. [0,20 bar]

**Respuesta**:

$$2\ KMnO_{4(s)} \overset{215ºC}{\rightleftarrows} \rightarrow O_{2(g)} + MnO_{2(s)} + K_2MnO_{4(s)}$$

$$m_{KMnO_{4(s)}} \Rightarrow n_{KMnO_{4(s)}} \Rightarrow n_{O_2} \Rightarrow p_{O_2}$$

$$1,58\ g\ KMnO_4 \times \frac{1\ mol\ KMnO_4}{158\ g\ KMnO_4} \times \frac{1\ mol\ O_2}{2\ mol\ KMnO_4} \times \frac{0,08314\ \frac{bar \cdot L}{mol \cdot K} \times 488\ K}{1\ L} = 0,20\ bar$$

**35)** En la Naturaleza existen dos isótopos del boro el $^{10}B$ y el $^{11}B$. El boro-10 tiene una masa atómica relativa de 10,013 y una abundancia del 19,61%. Si el elemento químico Boro tiene un peso atómico de 10,811 determina la masa atómica relativa del isótopo boro-11. [11,01]

**Respuesta**:

$$P.a.(B) = 10,811 = 10,013 \times \frac{19,61}{100} + A_r\left(^{11}B\right) \times \frac{(100 - 19,61)}{100}$$

$$A_r\left(^{11}B\right) = \frac{10,811 - (10,013 \times 0,1961)}{0,8039} = 11,005$$

**36)** Se prepara el oxígeno por calentamiento de clorato de potasio comercial, según la reacción $2\ KClO_3 \rightleftarrows 2\ KCl + 3\ O_2$. Calcule: a) el peso de KCl, en gramos, que se obtendrá a partir de 3 g de $KClO_3$ del 90% de riqueza; b) el volumen de oxígeno medido a 700 mm de Hg de presión y 25ºC. Datos: R; (O)=16; (Cl)=35,5; (K)=39. [a) 1,64 g; b) 0,875 L]

**Respuesta**:

$$2\ KClO_3 \rightleftarrows 2\ KCl + 3\ O_2$$

$$m_{KClO_3(90\%)} \Rightarrow m_{KClO_3} \Rightarrow n_{KClO_3} \Rightarrow n_{KCl} \Rightarrow m_{KCl}$$

$$3\ g\ KClO_{3(90\%)} \times \frac{90\ g\ KClO_3}{100\ g\ KClO_{3(90\%)}} \times \frac{1\ mol\ KClO_3}{122,8\ g\ KClO_3} \times \frac{2\ mol\ KCl}{2\ mol\ KClO_3} \times \frac{74,5\ g\ KCl}{1\ mol\ KCl} = 1,64\ g\ KCl$$

$$m_{KClO_3(90\%)} \Rightarrow m_{KClO_3} \Rightarrow n_{KClO_3} \Rightarrow n_{O_2} \Rightarrow V_{O_2}$$

$$3\ g\ KClO_{3(90\%)} \times \frac{90\ g\ KClO_3}{100\ g\ KClO_{3(90\%)}} \times \frac{1\ mol\ KClO_3}{122,8\ g\ KClO_3} \times \frac{3\ mol\ O_2}{2\ mol\ KClO_3} \times \frac{0,082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} \times 298\ K}{\frac{700}{760}\ atm} = 0,875\ L$$

**37)** Cuando se queman 0,436 g de un compuesto que contiene C, H y O se obtiene 0,958 g de $CO_2$ y 0,522 g de $H_2O$. Calcule la fórmula empírica del compuesto. Calcule la fórmula molecular sabiendo que su densidad, medida en condiciones normales, es de 2,679 g/L. [$C_3H_8O$]

**Respuesta**:

$$0,436\ g\ C_xH_yO_z \left\{\begin{matrix} m_C = 0,958\ g\ CO_2 \times \frac{12\ g\ C}{44\ g\ CO_2} = 0,26\ g\ C \Rightarrow n_C = 0,022\ mol\ C \\ m_H = 0,522\ g\ H_2O \times \frac{2\ g\ H}{18\ g\ H_2O} = 0,058\ g\ H \Rightarrow n_H = 0,058\ mol\ H \\ m_O = 0,436\ g\ C_xH_yO_z - (0,26\ g\ C + 0,058\ g\ H) = 0,118\ g\ O \Rightarrow n_O = 0,0074\ mol\ O \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Fórmula empírica} \left\{\begin{matrix} C_{0,022}H_{0,058}O_{0,0074} \\ C_3H_8O_1 \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Peso Molecular: } pV = nRT = \frac{m}{Pm}RT \Rightarrow Pm = \frac{mRT}{pV} = \frac{dRT}{p} = \frac{2,679\ \frac{g}{L} \times 0,082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} \times 273\ K}{1\ atm} = 59,97\ \frac{g}{mol}$$

$$\text{Fórmula: } \left(C_3H_8O_1\right)_n \Rightarrow (3 \cdot 12 + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 16) \cdot n = 60 \cdot n \left\{\begin{matrix} n = 1 \Rightarrow Pm = 60 \\ n = 2 \Rightarrow Pm = 120 \end{matrix}\right\} \left(C_3H_8O_1\right)_1 = C_3H_8O$$

**38)** Se hacen reaccionar 10 g de cinc metálico con ácido sulfúrico en exceso. Si el rendimiento de la reacción es del 80% calcule: a) el volumen de hidrógeno que se obtiene, medido a 27ºC y 740 mm de Hg de presión; b) la masa de sulfato de cinc formado. Datos: R; (O)=16; (S)=32; (Zn)=65,39. [a) 3,09 L; b) 19,745 g]

**Respuesta**:

$$Zn + H_2SO_4 \rightleftarrows ZnSO_4 + H_2$$

$$m_{Zn} \Rightarrow n_{Zn} \overset{80\%}{\Rightarrow} n_{H_2} \Rightarrow V_{H_{2(g)}} = \frac{nRT}{p}$$

$$10\text{ g Zn} \times \frac{1\text{ mol Zn}}{65,39\text{ g Zn}} \times \frac{80\text{ mol Zn}_{(\text{reaccionan})}}{100\text{ mol Zn}_{(\text{presentes})}} \times \frac{1\text{ mol } H_2}{1\text{ mol Zn}} \times \frac{0,082\,\frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times 300\text{ K}}{\frac{740}{760}\text{ atm}} = 3,09\text{ L } H_2$$

$$m_{Zn} \Rightarrow n_{Zn} \overset{80\%}{\Rightarrow} n_{ZnSO_4} \Rightarrow n_{ZnSO_4}$$

$$10\text{ g Zn} \times \frac{1\text{ mol Zn}}{65,39\text{ g Zn}} \times \frac{80\text{ mol Zn}_{(\text{reaccionan})}}{100\text{ mol Zn}_{(\text{presentes})}} \times \frac{1\text{ mol } ZnSO_4}{1\text{ mol Zn}} \times \frac{161,39\text{ g } ZnSO_4}{1\text{ mol } ZnSO_4} = 19,745\text{ g } ZnSO_4$$

**39)** Para calcular la cantidad de alcohol en la sangre, un método sencillo consiste en determinar el alcohol etílico o etanol en el aliento. El alcohol de la sangre se difunde a través de los pulmones y llega al aliento, siendo la proporción, aproximada, en 1 mL de sangre hay la misma cantidad de etanol que en 2100 mL de aliento. Luego determinando el etanol en el aliento se determina el de la sangre, la reacción química que se utiliza es la siguiente:

$3\,CH_3CH_2OH + 2\,K_2Cr_2O_{7(\text{naranja})} + 8\,H_2SO_4 \rightleftarrows 3\,CH_3COOH + 2\,Cr_2(SO_4)_{3(\text{verde})} + 2\,K_2SO_4 + 11\,H_2O$. Si la cantidad máxima que se puede expulsar de los pulmones es de 4600 mL y la concentración máxima permitida de alcohol en sangre es del 0,08%, determina los gramos de $K_2Cr_2O_7$ que reaccionarán. [7,47 mg]

**Respuesta**:

$$3\,CH_3CH_2OH + 2\,K_2Cr_2O_{7(\text{naranja})} + 8\,H_2SO_4 \rightleftarrows 3\,CH_3COOH + 2\,Cr_2(SO_4)_{3(\text{verde})} + 2\,K_2SO_4 + 11\,H_2O$$

$$V_{\text{aliento}} \Rightarrow V_{\text{sangre(con } C_2H_6O)} \Rightarrow m_{C_2H_6O(\text{permitida en sangre})} \Rightarrow n_{C_2H_6O(\text{sangre})} \Rightarrow n_{K_2Cr_2O_7} \Rightarrow m_{K_2Cr_2O_7}$$

$$4600\text{ mL}_{(\text{aliento})} \times \frac{1\text{ mL}_{(\text{sangre})}}{2100\text{ mL}_{(\text{aliento})}} \times \frac{0,08\text{ g } C_2H_6O}{100\text{ mL}_{(\text{sangre})}} \times \frac{1\text{ mol } C_2H_6O}{46\text{ g } C_2H_6O} \times \frac{2\text{ mol } K_2Cr_2O_7}{3\text{ mol } C_2H_6O} \times \frac{294\text{ g } K_2Cr_2O_7}{1\text{ mol } K_2Cr_2O_7} = 7,47 \cdot 10^{-3}\text{ g}$$

**40)** La primera etapa en la producción de ácido nítrico por el proceso de Ostwald es la oxidación del amoníaco, y se produce monóxido de nitrógeno y agua. Escribe y ajusta la reacción. Calcula: a) la masa de óxido nítrico que se puede producir si reaccionan 150 L de amoníaco a 15,0 atm y 200ºC con un exceso de oxígeno; b) el volumen que ocupará el agua producida si se condensa, a estado líquido, que tiene una densidad de 1 g/mL. [a) 1,74 kg; b) 1,566 L]

**Respuesta**:

$$4\,NH_3 + 5\,O_2 \rightleftarrows 4\,NO + 6\,H_2O$$

$$V_{NH_3} \Rightarrow n_{NH_3} \Rightarrow n_{NO} \Rightarrow m_{NO}$$

$$n_{NH_3} = \frac{pV}{RT} = \frac{15,0\text{ atm} \times 150\text{ L}}{0,082\,\frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times 473\text{ K}} \times \frac{4\text{ mol NO}}{4\text{ mol } NH_3} \times \frac{30\text{ g NO}}{1\text{ mol NO}} = 1740\text{ g NO}$$

$$V_{NH_3} \Rightarrow n_{NH_3} \Rightarrow n_{H_2O} \Rightarrow m_{H_2O} \Rightarrow V_{H_2O}$$

$$n_{NH_3} = \frac{pV}{RT} = \frac{15,0\text{ atm} \times 150\text{ L}}{0,082\,\frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times 473\text{ K}} \times \frac{6\text{ mol } H_2O}{4\text{ mol } NH_3} \times \frac{18\text{ g } H_2O}{1\text{ mol } H_2O} \times \frac{1\text{ mL } H_2O}{1\text{ g } H_2O} = 1566,3\text{ mL } H_2O$$

**41)** El carbonato de magnesio reacciona con el ácido clorhídrico y se obtiene cloruro de magnesio, dióxido de carbono y agua. Determine: a) la cantidad de carbonato de magnesio que se necesita para obtener 5 L de $CO_2$ a 12ºC y 743 mmHg; b) el volumen de ácido clorhídrico del 36% de riqueza y densidad 1,17 g/mL que se necesita para que reaccione todo el carbonato de magnesio calculado en el apartado anterior. [a) 17,6 g; b) 36,4 mL]

**Respuesta**:

$$MgCO_3 + 2\,HCl \rightleftarrows MgCl_2 + CO_2 + H_2O \quad \text{Vol.}_{CO_2} \Rightarrow n_{CO_2} \Rightarrow n_{MgCO_3} \Rightarrow m_{MgCO_3}$$

$$n_{CO_2} = \frac{pV}{RT} = \frac{\frac{743}{760}\text{atm} \times 5\text{ L}}{0,082\,\frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times 285\text{ K}} \times \frac{1\text{ mol } MgCO_3}{1\text{ mol } CO_2} \times \frac{84,31\text{ g } MgCO_3}{1\text{ mol } MgCO_3} = 17,6\text{ g } MgCO_3$$

$$\text{Vol.}_{CO_2} \Rightarrow n_{CO_2} \Rightarrow n_{HCl} \Rightarrow V_{HCl}$$

$$n_{CO_2} = \frac{pV}{RT} = \frac{\frac{743}{760}\text{atm} \times 5\text{ L}}{0,082\,\frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \times 285\text{ K}} \times \frac{2\text{ mol HCl}}{1\text{ mol } CO_2} \times \frac{36,5\text{ g HCl}}{1\text{ mol HCl}} \times \frac{100\text{ g HCl}_{(36\%)}}{36\text{ g HCl}} \times \frac{1\text{ mL}}{1,17\text{ g HCl}_{(36\%)}} = 36,3\text{ mL HCl}_{(36\%)}$$