

# Estudio de las propiedades de un cristal piezoeléctrico. Analogía con circuitos resonantes.

Justo, Dalmacio  
Balpardo, Christian

Laboratorio 4 - Dpto. de Física - FCEyN-UBA -22-9-1998 (2<sup>da</sup> entrega: 4 de Noviembre)

En esta práctica se estudió el comportamiento de un cristal piezoeléctrico sometido a una tensión eléctrica de frecuencia variable. Tomando como base la teoría de circuitos resonantes, se calcularon los distintos parámetros del cristal compatibles con cada modelo teórico propuesto, a partir de mediciones sobre la tensión de salida y su desfase para cada frecuencia. Finalmente, mediante consideraciones estadísticas determinamos cuál de los modelos era el más apropiado.

## [A] Introducción

El principal interés de los fenómenos piezoeléctricos reside en una analogía electromecánica característica de ciertos cristales. Al someter un cristal piezoeléctrico a deformaciones mecánicas, aparece en él una polarización que da origen a un campo eléctrico. Análogamente, la aplicación de un campo eléctrico se acompaña de vibraciones elásticas del material, consecuencia del denominado efecto piezoeléctrico inverso. De este modo, al excitar uno de estos cristales con un campo eléctrico alterno, el cristal oscilará con la misma frecuencia de excitación que el campo, y su amplitud tomará valores extremos para ciertas frecuencias, denominadas "de resonancia".

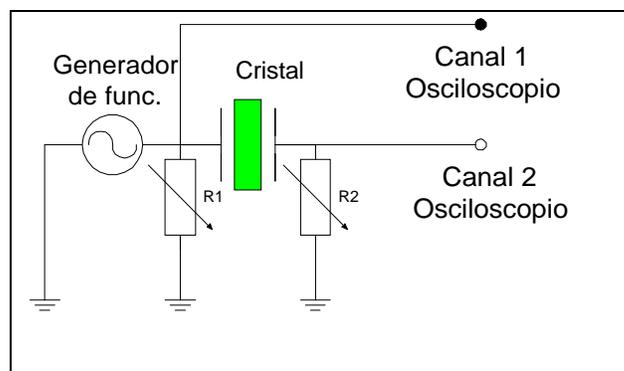
Llegados a este punto, la analogía con los circuitos RLC se hace inevitable (aunque frente a esta comparación, el cristal piezoeléctrico presenta mayor estabilidad de frecuencia, es decir, un pico de resonancia más estrecho que el que podríamos obtener empleando componentes electrónicos comunes). Si bien el modelo del circuito **RLC Serie** surge a priori como el indicado para describir el fenómeno, algunas consideraciones acerca del montaje experimental dan lugar a otro modelo algo similar, el de un circuito **RLC** montado en **Paralelo** con un capacitor  $C'$ . Nuestra tarea se vio entonces orientada a comparar los datos experimentales con los teóricos para determinar cuán buena podía resultar cada modelización.

## [B] Desarrollo experimental

Se usaron para este experimento :

- un generador de tensión alterna sinusoidal de frecuencia y amplitud variables.
- un osciloscopio de dos canales.
- un dispositivo pre-armado con resistencias  $R_1$  y  $R_2$  y el cristal piezoeléctrico montado entre electrodos, dentro de un cilindro de acrílico.
- un multímetro digital

El circuito fue montado como lo indica la **fig.1**.



**Fig.1** Diagrama del circuito

El canal 1 mide directamente la señal constante en frecuencia y amplitud de la fuente, es decir el voltaje de entrada  $V_1$ .

El canal 2 mide el voltaje de salida  $V_2$  del piezoeléctrico, y por consiguiente, también la corriente  $I$  sobre  $R_2$ .

En posición dual, el osciloscopio asigna una componente del plano a cada canal, y así permite determinar el desfase entre la señal de entrada y la de salida del cristal, mediante las figuras de Lissajous.

La metodología experimental adoptada consistió en:

- hacer un barrido en frecuencia afin de detectar la(s) frecuencia(s) de resonancia y antiresonancia del circuito.
- Elegir dos de tales frecuencias (una de resonancia y otra contigua de antiresonancia), en torno a las cuales fuera mayor la densidad de datos que pudiéramos tomar.
- Releva mediciones de  $V_2$  y del desfase alrededor de dichas frecuencias.
- Medir las resistencias  $R_1$  y  $R_2$

Estos datos nos permitieron graficar las curvas de Resonancia y de Desfase, así como las de Susceptancia, Conductancia e Impedancia en función de la frecuencia, que presentamos en el párrafo siguiente.

### [C] Mediciones realizadas

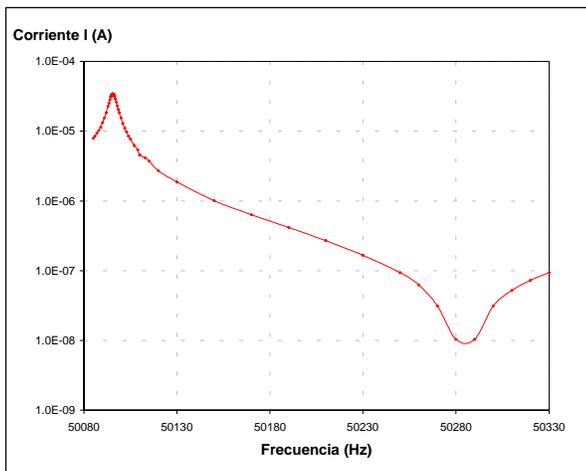
Durante nuestras mediciones, la fuente arrojó una amplitud máxima

$$V_1 = (0.9 \pm 0.02) \text{ Volt}$$

Asimismo obtuvimos:

$$R_1 = (9.46 \times 10^3 \pm 0.01 \times 10^3) \text{ Ohm}$$

$$R_2 = (9.61 \times 10^3 \pm 0.01 \times 10^3) \text{ Ohm}$$



**Gráfico 1- Curva de resonancia**  
*Amplitud de I vs Frecuencia*

Del Gráfico 1 se desprenden las dos primeras frecuencias de resonancia  $f_s$  y antiresonancia  $f_p$  (máximo y mínimo de corriente, respectivamente) de nuestro cristal piezoeléctrico, a saber:

$$f_s = 50095.5 \text{ Hz}$$

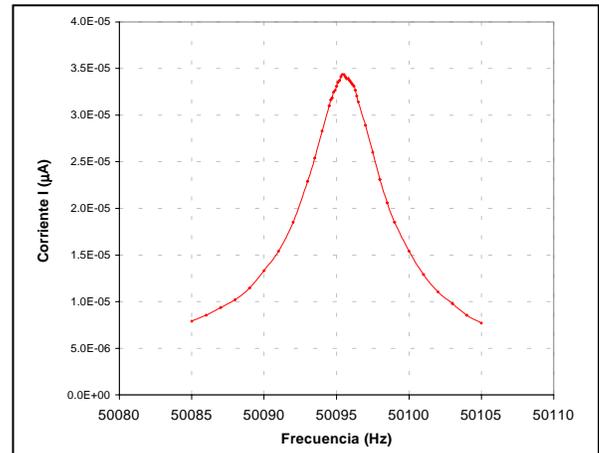
**Resonancia de un cristal piezoeléctrico - Dalmacio Justo, Christian Balpardo**

$$f_p = 50282.0 \text{ Hz}$$

siendo las frecuencias cuadrantales para la resonancia serie (Gráf. 2) :

$$f_{s-} = 50093.3 \text{ Hz} \quad ; \quad f_{s+} = 50097.8 \text{ Hz}$$

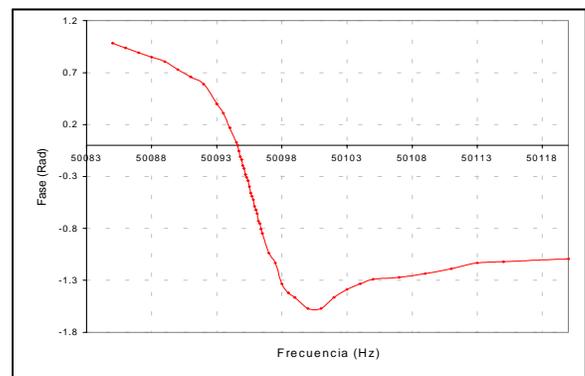
y el factor de calidad  $Q = 11132.33$



**Gráfico 2. Curva de resonancia serie**  
*Frecuencias cuadrantales*

En la resonancia serie, la corriente es máxima con un valor  $I = 34.3 \times 10^{-6} \text{ Amp}$  mientras que en la antiresonancia la corriente es casi nula.

También obtuvimos en el gráfico 3 la dependencia del desfase vs frecuencia (desfase en la tensión provocado por el piezoeléctrico), el cual ya anticipa una contradicción del modelo RLC Serie : el desfase cero **no** corresponde a la frecuencia de resonancia.



**Gráfico 3. Curva de Desfase vs**  
*Frecuencia*

Hallamos también otras “parejas” de frecuencias resonantes y antiresonantes, tales como\*:

$$f_{s1} = 50095.5 \text{ Hz} \quad Q_1 = 11132$$

$$f_{p1} = 50282.0 \text{ Hz}$$

$$f_{s2} = 150155 \text{ Hz} \quad Q_2 = 42502$$

$$f_{p2} = 150217 \text{ Hz}$$

$$f_{s3} = 248287 \text{ Hz}$$

$$f_{p3} = 248327 \text{ Hz}$$

$$f_{s4} = 427417 \text{ Hz}$$

$$f_{p4} = 427673 \text{ Hz}$$

\*estas últimas dos parejas de frec. con menor amplitud

### [D] Análisis de datos y modelización

Llegados aquí, tenemos todos los datos necesarios para hallar los parámetros de cada modelo.

#### →Circuito RLC Serie

En la frecuencia de resonancia, el circuito se hace puramente resistivo, así que conociendo  $I_{\max}$ ,  $R_2$ , y  $V_e$  (tensión de la fuente), hallamos que la resistencia equivalente del cristal vale

$$R = 1.659 \times 10^4 \pm 0.143 \times 10^4 \text{ Ohms} \quad (\epsilon_R = 9\%)$$

Además, sabemos que en un circuito RLC Serie se cumple para la frecuencia de resonancia:

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (1)$$

y para el factor de calidad Q :

$$Q = \frac{f_s}{\Delta f_s} = \frac{2\pi f_s \cdot L}{R + R_2} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2)$$

siendo  $\Delta f_s$  el ancho cuadrantal.

De (1) y (2) se despejan los valores de L y C, inductancia y capacidad del cristal, con

$$L = 926.96 \pm 153.05 \text{ Henry} \quad (\epsilon_L = 17\%)$$

$$C = 1.088 \times 10^{-14} \pm 1.733 \times 10^{-15} \text{ Farad} \quad (\epsilon_C = 16\%)$$

#### →Circuito RLC Paralelo

La "única" diferencia concreta que este modelo presenta con respecto al anterior, es una segunda capacidad  $C'$ , introducida debido a que los electrodos metalizados que tienen al cristal como dieléctrico pueden muy razonablemente ser considerados como un segundo capacitor en paralelo con el sistema.

Ya hallados los valores de R, L y C, en el párrafo anterior, la frecuencia de antiresonancia nos permite calcular  $C'$  por la fórmula

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right)} \quad (3)$$

donde  $f_p$  representa dicha frecuencia. Así,

$$C' = 1.452 \times 10^{-12} \pm 4.375 \times 10^{-11} \text{ Farad (!!!)}$$

El error en la determinación de  $C'$  es un orden de magnitud mayor que el propio  $C'$ ! Este será un gran inconveniente a la hora de comparar los dos modelos, ya que un margen de error tan grande de por sí le quita confianza al modelo. La magnitud del error se debe a la propagación de errores involucrada en el cálculo de  $C'$  (Apendice).. En efecto, este error recoge todos los demás errores.

#### →Comparación de los Modelos con el Experimento

Para ver mejor en qué modo difieren los dos modelos teóricos propuestos con el experimento y entre sí mismos, graficamos algunas funciones dependientes de la frecuencia, y cuyas propiedades matemáticas nos son conocidas. Dada una impedancia  $Z(w)$ , su inversa  $Y(w) = Z(w)^{-1}$  es llamada admitancia, con  $Y(w) = G(w) + jB(w)$

donde  $G(w)$  es la conductancia y  $B(w)$  es la susceptancia.

$G(w)$  es una misma función de la frecuencia tanto en el caso Serie como en el Paralelo, siendo

$$G(\omega) = \frac{R}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (4)$$

$B(w)$ , en cambio, difiere según de cuál modelo se trate, ya que:

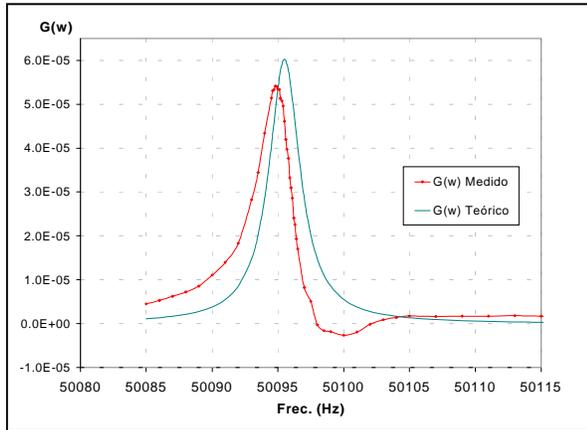
- en RLC serie:

$$B(\omega) = - \frac{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (5)$$

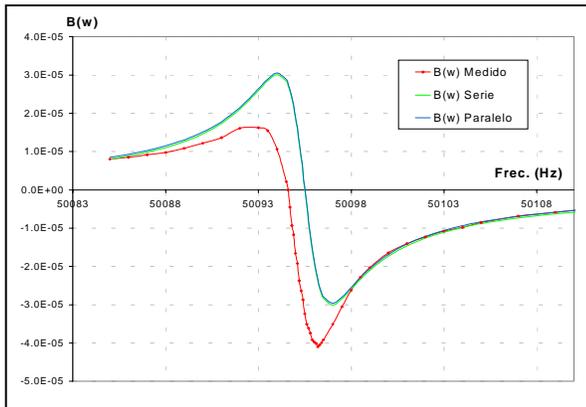
- en RLC paralelo:

$$B(\omega) = \omega C' - \frac{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (6)$$

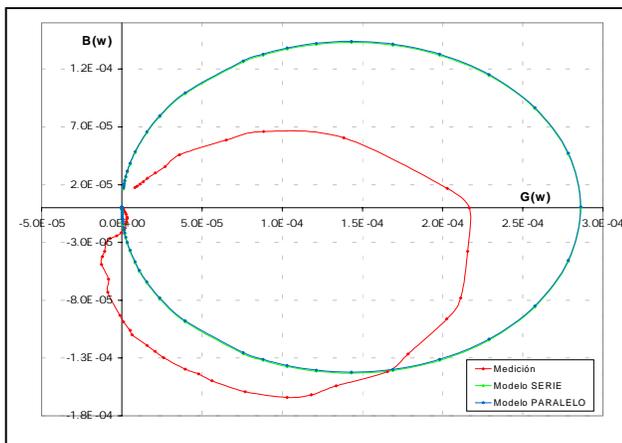
Los resultados obtenidos se grafican a continuación.



**Gráfico 4.  $G(w)$  Experimental y Teórico**  
*El experimental denota el medido (a partir de  $V_2$  y de la fase) mientras que el teórico se refiere al calculado en función de los R, L, C, equivalentes (ver fórmula 4)*

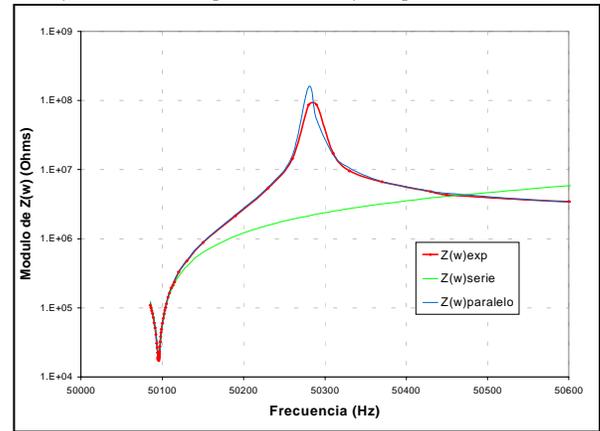


**Gráfico 5.  $B(w)$  Experimental y Teórico**  
*Como en el gráfico anterior, el  $B(w)$  teórico de cada modelo se calcula según los parámetros equivalentes hallados en cada caso (ver fórmulas 5 y 6)*



**Gráfico 6. Comparación  $B(w)$  vs  $G(w)$**

*Se grafican aquí las curvas obtenidas en los Gráficos 4 y 5 en las componentes x e y respectivamente.*



**Gráfico 7.  $Z(w)$  Experimental y Teórico**  
*El modelo paralelo describe más acertadamente el comportamiento del cristal ya que prevé la antiresonancia.*

De la comparación de estos gráficos experimentales con los de ambos modelos, se desprende inmediatamente que el modelo RLC serie no puede ser una buena aproximación del comportamiento de nuestro cristal, ya que no contempla de ninguna manera el máximo en la impedancia para frecuencias de antiresonancia (ver Gráfico 7). Para corroborar estadísticamente esta afirmación, podemos recurrir también a la prueba del  $\chi^2$ , que da una idea de cuán bien se ajustan las mediciones a los valores deterministas de un modelo teórico. El mejor ajuste es el que minimiza  $\chi^2$ . Lo calculamos para los modelos serie y paralelo de la impedancia y obtuvimos:

-  $\chi^2_{\text{serie}} = 18,10$

-  $\chi^2_{\text{paral}} = 16,33$

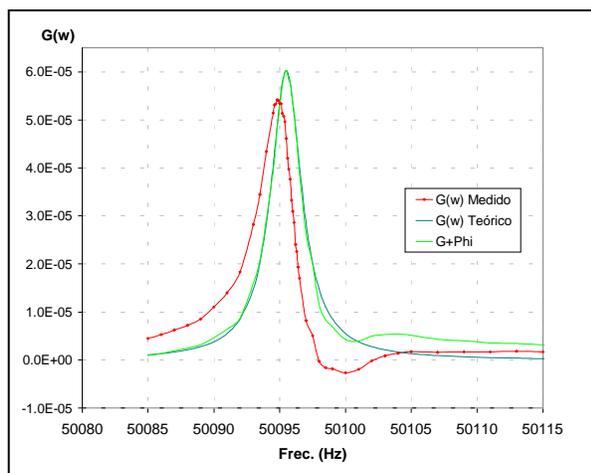
siendo 
$$\chi^2 = \sum_i \frac{(Z_i - Z(\omega_i))^2}{\sigma_i^2}$$

donde  $Z$  es la impedancia  
 $\sigma$  es el error de  $Z$

Es importante aclarar que en algunas frecuencias, el error del modelo serie alcanza a ser  $10^7$  veces mayor que el del modelo paralelo ( $\epsilon_s \approx 10^{-6}$  contra  $\epsilon_p \approx 10^{-13}$ ) en cuanto al ajuste de los datos medidos. Sin embargo, se podría esperar mirando el gráfico 7 que el  $\chi^2$  del modelo serie fuera mucho mayor al del modelo paralelo debido a la discrepancia en la zona de la antiresonancia. El

hecho es que en esa zona el  $\sigma$  de la impedancia se hace tan grande que este último termina predominando por sobre el error de ajuste de cada modelo.

Del gráfico 7 uno estaría tentado de aceptar el modelo paralelo. Sin embargo, analizando los demás gráficos, aparece un corrimiento importante entre lo experimental y ambos modelos. La diferencia es tal que aún siendo distintos entre sí, los modelos serie y paralelo aparecen solapados frente a lo experimental, más distante de estos. Sin embargo, como la forma de las curvas es muy similar, podemos atribuir este corrimiento a un problema de desfase constante. En el gráfico 8, aparece en verde la curva experimental a cuya fase se le ha sumado un  $\Delta\phi$  arbitrario para que se acople lo experimental a lo teórico. Como este término es pequeño (0,3) y constante, lo podemos atribuir a desfases por efectos capacitivos e inductivos de otros elementos del circuito no tenidos en cuenta (cables, por ejemplo)..



**Gráfico 8.**  $G(w)$  con desfase 0,3 en la fórmula (7)

En el gráfico de  $G(w)$  y de  $B(w)$  vs  $G(w)$  se observa que  $G$  toma valores negativos, lo cual no concuerda con la teoría (ver ecuación (4)). Esto es porque nuestras mediciones de  $G$  se realizaron en base a la fórmula

$$G = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \cos\phi - 1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 2\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \cos\phi + 1} \quad (7)$$

de donde vemos que si, por ejemplo,  $\phi = \pi/2$ ,  $G < 0$ . La susceptancia  $B$  está también definida por una fórmula similar. Este fenómeno también podría explicar el corrimiento de nuestros resultados frente a los dos modelos teóricos.

Otro fenómeno interesante que observamos fue el de la distribución del espectro de frecuencias. En efecto, las tres primeras frecuencias de resonancia serie –detectables–  $f_1=50\text{KHz}$ ,  $f_2=150\text{KHz}$ ,  $f_3=250\text{KHz}$ , aparecen equiespaciadas en 100 KHz, siendo este número un múltiplo de la fundamental ( $f_1$ ). Sin embargo, esta relación especial sólo dura para estas tres primeras frecuencias, ya que las frecuencias resonantes siguientes valen  $f_4=427\text{KHz}$  y  $f_5=615\text{KHz}$ , con lo cual tenemos que descartar la hipótesis de que sean armónicas superiores de la fundamental. Aún así, esto nos advierte que los dos modelos vistos son apenas una simplificación de lo que sucede en realidad, ya que sólo admiten una frecuencia de resonancia y una de antiresonancia, y por ende, sólo son válidos alrededor de las frecuencias que fueron estudiadas. No se explica por ellos el fenómeno “multiresonante” observado.

## [E] Conclusiones

La modelización del comportamiento de un cristal piezoeléctrico excitado por un campo eléctrico alterno, se puede aproximar por dos modelos bastante similares entre sí: el de un circuito RLC serie y otro en paralelo con un capacitor. Una mera observación del dispositivo experimental daría más crédito al segundo modelo, los electrodos del cristal actuando como un condensador de placas paralelas. Pero además, los gráficos comparativos, en particular el de la impedancia, y la prueba estadística de la  $\chi^2$  confirmarían esta hipótesis, además de refutar definitivamente el modelo serie. Sin embargo, el modelo paralelo resulta poco confiable debido al enorme error de  $C'$ , diez veces mayor que su propio valor. Esto se debe a la gran propagación del error, ya que  $C'$  fue obtenido de forma indirecta a través de todas las demás variables que entran en juego en la antiresonancia. Un método alternativo para obtener  $C'$  que minimice este error indirecto, sería midiendo este parámetro de manera directa ya que representa la capacidad de los electrodos del cristal. Además, el modelo RLC paralelo no parece ser el óptimo para describir el comportamiento del cristal; las múltiples frecuencias resonantes lo evidencian.

A pesar de esto, era de esperar que este comportamiento fuera algo más complicado que el de un simple circuito RLC, debido a que es un sólido que vibra, con lo cual existen distintos

modos normales de oscilación, hecho que podría explicar las distintas frecuencias de resonancia.

Un punto interesante a analizar hubiera sido el de hacer un análisis del espectro de frecuencias del cristal para tener una mejor idea de la distribución espacial de las frecuencias resonantes y antiresonantes,

## Apéndice : Errores

$$- \Delta I = \sqrt{\frac{1}{R_2^2} \Delta V_2^2 + \left(\frac{V_2}{R_2}\right)^2 \Delta R_2^2}$$

$$- \Delta R = \sqrt{\frac{1}{I^2} \Delta V_1^2 + \frac{V_1^2}{I^4} \Delta I^2 + \Delta R_2}$$

donde  $V_1$  es la tensión de la fuente  
I es la corriente en resonancia

$$- \Delta L = \sqrt{\frac{1}{[2\pi(f_+ - f_-)]^2} (\Delta R^2 + \Delta R_2^2) + 2 \left[ \frac{R + R_2}{2\pi(f_+ - f_-)} \right]^2 \Delta f^2}$$

donde  $f_+$  y  $f_-$  son las frecuencias cuadrantales  
 $f$  es el error de estimación en la frecuencia de la fuente

$$- \Delta C = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi^2 f_s^2 L^2}\right)^2 \Delta L^2 + \left(\frac{1}{2\pi^2 L f_s^3}\right)^2 \Delta f^2}$$

donde  $f_s$  es la frecuencia de resonancia

$$- \Delta C' = \frac{1}{(4\pi^2 L f_p^2 - 1/C)^2} \sqrt{(8\pi^2 L f_p)^2 \Delta f^2 + (4\pi^2 f_p^2)^2 \Delta L^2 + \frac{1}{C^4} \Delta C^2}$$

donde  $f_p$  es la frecuencia de antiresonancia

$$\Delta Z = \sqrt{\Psi \cdot \Delta R_2^2 + R_2^2 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2^2} - \frac{\cos \phi}{V_2}\right)^2 \frac{1}{\Psi} \cdot \Delta V_1^2 + R_2^2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \left(\frac{\cos \phi}{V_2} - \frac{V_1}{V_2^2}\right)^2 \frac{1}{\Psi} \cdot \Delta V_2^2 + R_2^2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \sin^2 \phi \cdot \frac{1}{\Psi} \cdot \Delta \phi^2}$$

$$\text{con } \Psi = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right) \cos \phi + 1 .$$

así como el de evaluar el factor de mérito en cada resonancia, y estudiar la dependencia de los parámetros equivalentes con la frecuencia.