

NOTA DEL AUTOR:

Las páginas que tenéis a continuación son el fruto de varias horas de trabajo, de hacer resúmenes e intentar entender las explicaciones y cálculos (muchas veces incorrectos) del libro. Es un material práctico y no teórico que intenta ayudar a aquellos, que como yo, están apasionados por el mundo de las Matemáticas y por ello cursan esta licenciatura. No pretende ser la panacea de la asignatura o el principal material de consulta pero sí una herramienta a utilizar en casos de necesidad.

Como veis, el uso de mi material es gratuito. Así pues agradecería que siempre lo continuara siendo. Si no fuera así, rogaría que me lo comunicarais a la dirección de correo electrónico indicada más abajo.

Los datos han sido extraídos del libro de texto o de varios ejercicios anexos, aunque algunas veces han sido modificados para facilitar la comprensión.

Agradecería que cualquier error me fuera comunicado para su posterior corrección, a la dirección de correo joanpitarque@yahoo.es .

Espero os sea de gran utilidad, tanto para aprender como para aprobar la asignatura.

Un saludo y un abrazo

Joan Pitarque (Curso 2001-2002)

EXPERIMENTO UNIFACTORIAL COMPLETAMENTE ALEATORIZADO

Los siguientes datos se refieren a un experimento destinado a medir los efectos de la conductividad de cuatro tipos diferentes de revestimientos de los tubos de TV

REVESTIMIENTO			
I	II	III	IV
56	64	45	42
55	61	46	39
62	50	45	45
59	55	39	43
60	56	43	41

- a) Mostrar el cuadro del Análisis de la Varianza
- b) Contrastar la hipótesis de que los efectos de los tratamientos son todos nulos
- c) Usar el test de la t de Student para contrastar diferencias entre las medias de los tratamientos
- d) Usar el test HSD de Tuckey para contrastar diferencias entre las medias de los tratamientos
- e) Usar el estadístico S de Scheffé para contrastar las hipótesis $H_0 : \psi = 0$ donde ψ son los contrastes estimables siguientes $\psi_1 = \tau_1 - \tau_2$; $\psi_2 = 3\tau_1 - \tau_2 - \tau_3 - \tau_4$
- f) Contrastar la hipótesis de que cada uno de los contrastes dados por la siguiente tabla es nulo

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
C1	+1	0	0	-1
C2	0	+1	-1	0
C3	+1	-1	-1	+1

Solución comentada:

- a) Para construir la tabla ANOVA son necesarios los siguientes cálculos:
 - Número de tratamientos $t = 4$
 - Numero de observaciones en cada tratamiento $r_i = 5$
 - Número total de observaciones $N = 20$
 - Totales

						T_i
I	56	55	62	59	60	292
II	64	61	50	55	56	286
III	45	46	45	39	43	218
IV	42	39	45	42	41	210
						$G = \sum T_i = 1006$

- Parámetro $C = G^2 / N = 1006^2 / 20 = 50601.8$
- $\sum y_{ij}^2 = 51940$

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
Tratamiento	$S_t = \sum T_i^2 / r_i - C = 51736.8 - 50601.8 = 1135$	$t - 1 = 3$	$M_t = S_t / t - 1 = 378.3$
Error	$S_e = \sum y_{ij}^2 - \sum T_i^2 / r_i = 51940 - 51736.8 = 203.2$	$N - t = 16$	$M_e = s^2 = S_e / N - t = 12.7$
TOTAL	$S_t + S_e = \sum y_{ij}^2 - C = 1338.2$	$N - 1 = 19$	

- b) La hipótesis $H_0 : \tau_1 = \dots = \tau_j$ de que los efectos de los tratamientos son nulos, es decir, no hay diferencias entre los tratamientos, se contrasta con el estadístico

$$F(t-1, N-t) = M_t / s^2 \qquad F(3,16) = 378.33 / 12.7 = 29.79$$

La hipótesis se rechaza si $F > F_{\alpha}$, donde α es el nivel de significación.

En nuestro caso $F(3,16)_{0,05} = 3.24 < F$

$F(3,16)_{0,01} = 5.29 < F$

por lo que rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que los efectos de los tratamientos NO son nulos.

c) Hallaremos la diferencia mínima significativa (LSD)

$$LSD = t_{N-t, \alpha} \sqrt{2s^2 / r} = t_{16, 0.05} \sqrt{2 \cdot 12.7 / 5} = 2.120 \cdot \sqrt{2 \cdot 12.7 / 5} = 4.78$$

teniendo en cuenta que la región crítica siempre está formada por las dos colas de la distribución por lo que se debe tomar $t_{16, 0.025}$.

Si hallamos ahora las medias de los tratamientos

$$y_{1\bullet} = 292 / 5 = 58.4 \quad y_{2\bullet} = 57.2 \quad y_{3\bullet} = 43.6 \quad y_{4\bullet} = 42$$

de donde se deduce que los efectos de los tratamientos $y_{1\bullet}, y_{2\bullet}$ son diferentes a los de los tratamientos $y_{3\bullet}, y_{4\bullet}$, pues

$$y_{1\bullet}, y_{2\bullet} + LSD < y_{3\bullet}, y_{4\bullet}$$

En la práctica es más útil hacer un cuadro de diferencias en valor absoluto

	$y_{1\bullet}$	$y_{2\bullet}$	$y_{3\bullet}$	$y_{4\bullet}$
$y_{1\bullet}$	-----	1.2	14.8	16.4
$y_{2\bullet}$	-----	-----	13.6	15.2
$y_{3\bullet}$	-----	-----	-----	1.6
$y_{4\bullet}$	-----	-----	-----	-----

lo que permite agrupar las medias $\{y_{1\bullet}, y_{2\bullet}\}, \{y_{3\bullet}, y_{4\bullet}\}$

d) El procedimiento es similar al de la t de Student, pero en este caso la LSD se denomina HSD (y desaparece el 2 de dentro de la raíz)

$$HSD = q_{t, N-t}^{\alpha} \sqrt{s^2 / r} = q_{4, 16}^{0.05} \sqrt{12.7 / 5} = 4.05 \sqrt{12.7 / 5} = 6.05$$

donde $q_{t, N-t}^{\alpha}$ se obtiene de las tablas de "studentized range".

Este test es más conservador que el de la t de Student aunque en este caso obtenemos los mismos resultados. Utilizando la tabla anterior se obtienen los grupos $\{y_{1\bullet}, y_{2\bullet}\}, \{y_{3\bullet}, y_{4\bullet}\}$

e) Se trata de un test que se utiliza para contrastar varios tratamientos a la vez. Para ello se utiliza un estimador $\hat{\psi} = c_1 \hat{\tau}_1 + \dots + c_t \hat{\tau}_t$ de una función estimable $\psi = c_1 \tau_1 + \dots + c_t \tau_t$

Dado que los efectos de los tratamientos son desconocidos, se toman sus estimadores (las medias). En nuestro caso obtenemos

$$\hat{\psi}_1 = 1 \cdot 58.4 - 1 \cdot 57.2 = 1.2$$

$$\hat{\psi}_r = 3 \cdot 58.4 - 1 \cdot 57.2 - 1 \cdot 43.6 - 1 \cdot 42 = 32.4$$

El resultado de Scheffé afirma que hay una probabilidad $(1 - \alpha)$ de que para todas las funciones estimables ψ se verifique

$$\hat{\psi} - S \hat{\sigma}_{\hat{\psi}} \leq \psi \leq \hat{\psi} + S \hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$$

donde

$$S = \sqrt{(t-1)F_{\alpha}(t-1, N-t)} = \sqrt{3F_{0.05}(3,16)} = 3.12$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_1} = \sqrt{\sum c_i^2 s^2 / r} = \sqrt{2 \cdot 12.7 / 5} = 2.25$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_2} = \sqrt{\sum c_i^2 s^2 / r} = \sqrt{12 \cdot 12.7 / 5} = 5.52$$

Así pues obtenemos para el primer contraste

$$1.2 - 3.12 \cdot 2.25 \leq \psi \leq 1.2 + 3.12 \cdot 2.25$$

$$-5.82 \leq \psi \leq 8.22$$

por lo que la hipótesis de que $H_0 : \psi = 0$ deberá aceptarse pues el intervalo encontrado contiene al cero.

Para el segundo contraste

$$32.4 - 3.12 \cdot 5.52 \leq \psi \leq 32.4 + 3.12 \cdot 5.52$$

$$15.18 \leq \psi \leq 49.62$$

por lo que la hipótesis de que $H_0 : \psi = 0$ deberá rechazarse pues el intervalo encontrado no contiene al cero.

f) Se utilizan para comparar a la vez varios contrastes. Los contrastes ortogonales tienen la forma

$$z_i = (c_1 T_1 + \dots + c_n T_n) / \sqrt{\sum c_i^2 r} \quad \text{con} \quad \sum c_i = 0$$

que en nuestro caso tomando las medias como los efectos de los tratamientos, obtenemos

$$z_1 = (1 \cdot 292 + 0 \cdot 286 + 0 \cdot 218 - 1 \cdot 210) / \sqrt{2 \cdot 5} = 25.93 \Rightarrow z_1^2 = 672.4$$

$$z_2 = (0 \cdot 292 + 1 \cdot 286 + -1 \cdot 218 + 0 \cdot 210) / \sqrt{2 \cdot 5} = 21.50 \Rightarrow z_2^2 = 462.4$$

$$z_3 = (1 \cdot 292 - 1 \cdot 286 - 1 \cdot 218 + 1 \cdot 210) / \sqrt{4 \cdot 5} = -0.44 \Rightarrow z_3^2 = 0.2$$

y verifican $S_t = z_1^2 + \dots + z_n^2 = 1135$ (donde S_t es la suma de cuadrados de los tratamientos).

Así, el estadístico z^2 / s^2 sigue una distribución F de Snedecor con 1 y $N - t$ grados de libertad, y la hipótesis $H_0 : \psi = 0$ deberá aceptarse si el estadístico es inferior a $F_{1, N-t}$ con un nivel de confianza α

En nuestro caso,

$$z_1^2 / s^2 = 672.4 / 12.7 = 52.9 > F_{1,16} = 4.49 \quad \text{Se rechaza la hipótesis}$$

$$z_2^2 / s^2 = 462.4 / 12.7 = 36.41 > F_{1,16} = 4.49 \quad \text{Se rechaza la hipótesis}$$

$$z_3^2 / s^2 = 0.2 / 12.7 = 0.016 < F_{1,16} = 4.49 \quad \text{Se acepta la hipótesis}$$

EXPERIMENTO UNIFACTORIAL DE BLOQUES COMPLETOS ALEATORIZADOS

Los siguientes datos se refieren a un experimento realizado sobre un tipo de gasolina aplicando cinco tratamientos (A, B, C, D, E) para medir su octanaje. Para ello hemos cogido cuatro barriles y hemos realizado cada uno de los tratamientos con la gasolina del barril obteniendo

	Barril 1	Barril 2	Barril 3	Barril 4
A	91.7	91.2	90.9	90.6
B	91.7	91.9	90.9	90.9
C	92.4	91.2	91.6	91.0
D	91.8	92.2	92.0	91.4
E	93.1	92.9	92.4	92.4

- Mostrar el cuadro del Análisis de la Varianza
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de los tratamientos son todos nulos
- Contrastar la hipótesis de igualdad efectos de los bidones
- Usar el test de la t de Student para contrastar diferencias entre las medias de los tratamientos
- Usar el test HSD de Tuckey para contrastar diferencias entre las medias de los tratamientos
- Usar el estadístico S de Scheffé para contrastar la hipótesis $H_0 : \psi = 0$ donde ψ es el contraste estimable siguiente $\psi = \tau_1 + \tau_2 - \tau_4 - \tau_5$

Solución comentada:

- Para construir la tabla ANOVA son necesarios los siguientes cálculos:

- Número de tratamientos $t = 5$
- Numero de bloques $b = 4$
- Número total de observaciones $N = 20$
- Totales

	B1	B2	B3	B4	T_i
A	91.7	91.2	90.9	90.6	364.4
B	91.7	91.9	90.9	90.9	365.4
C	92.4	91.2	91.6	91.0	366.2
D	91.8	92.2	92.0	91.4	367.4
E	93.1	92.9	92.4	92.4	370.8
B_i	460.7	459.4	457.8	456.3	$G = \sum T_i = 1834.2$

- Parámetro $C = G^2 / N = 168214.482$
- $\sum y_{ij}^2 = 168223.96$

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
Tratamientos	$S_t = \sum T_i^2 / b - C = 168220.59 - 168214.482 = 6.108$	$t - 1 = 4$	$M_t = S_t / t - 1 = 1.527$
Bloques	$S_b = \sum B_j^2 / t - C = 168216.676 - 168214.482 = 2.194$	$b - 1 = 3$	$M_b = S_b / b - 1 = 0.731$
Error	$S_e = \sum y_{ij}^2 - S_t - S_b - C = 1.176$	$(t - 1)(b - 1) = 12$	$M_e = s^2 = S_e / 12 = 0.098$
TOTAL	$S_t + S_b + S_e = \sum y_{ij}^2 - C = 9.478$	$N - 1 = 19$	

- La hipótesis $H_0 : \tau_1 = \dots = \tau_j$ de que los efectos de los tratamientos son nulos, es decir, no hay diferencias entre los tratamientos, se contrasta con el estadístico

$$F(t-1, (t-1)(b-1)) = M_t / s^2 \quad F(4,12) = 1.527 / 0.098 = 15.58$$

La hipótesis se rechaza si $F > F_\alpha$, donde α es el nivel de significación.

En nuestro caso $F(4,12)_{0.05} = 3.26 < F$

$$F(4,12)_{0.01} = 5.41 < F$$

por lo que rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que los efectos de los tratamientos NO son nulos.

- c) En este caso se debe realizar de nuevo la tabla ANOVA pero tomando como tratamientos a los bidones y como bloques a las gasolinas. Así se obtiene

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
Tratamientos	$S_t = \sum T_i^2 / b - C = 168216.676 - 168214.482 = 2.194$	$t - 1 = 3$	$M_t = S_t / t - 1 = 0.731$
Bloques	$S_b = \sum B_j^2 / t - C = 168220.59 - 168214.482 = 6.108$	$b - 1 = 4$	$M_b = S_b / b - 1 = 1.527$
Error	$S_e = \sum y_{ij}^2 - S_t - S_b - C = 1.176$	$(t - 1)(b - 1) = 12$	$M_e = s^2 = S_e / 12 = 0.098$
TOTAL	$S_t + S_b + S_e = \sum y_{ij}^2 - C = 9.478$	$N - 1 = 19$	

por lo que la hipótesis $H_0 : \tau_1 = \dots = \tau_j$ de que los efectos de los tratamientos son nulos, es decir, no hay diferencias entre los bidones, se contrasta con el estadístico

$$F(t-1, (t-1)(b-1)) = M_t / s^2 \quad F(3,12) = 0.731 / 0.098 = 7.45$$

La hipótesis se rechaza si $F > F_{\alpha}$, donde α es el nivel de significación.

En nuestro caso $F(3,12)_{0.05} = 3.49 < F$

$$F(4,12)_{0.01} = 5.45 < F$$

por lo que rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que los efectos de los tratamientos NO son nulos.

- d) Los test de LSD, HSD de Tuckey o de Scheffé están pensados para diseños completamente aleatorizados y no por bloques.

En nuestro caso, al obtener un rechazo de la hipótesis de igualdad de tratamientos. Una posibilidad consistiría en contrastar la hipótesis de igualdad de los bloques (tomando los bloques como tratamientos y los tratamientos como bloques) y en caso de obtener igualdad de los bloques, tomar una nueva muestra mediante un diseño completamente aleatorizado (ya que los bloques no influirían por ser similares). Pero este tampoco es nuestro caso ya que los efectos de los bidones tampoco son los mismos.

En el libro, este razonamiento no aparece y se propone, al igual que en el modelo completamente aleatorizado, hacer un cuadro de diferencias en valor absoluto, partiendo de las medias de los tratamientos

$$y_{1\bullet} = 364.4 / 4 = 91.1 \quad y_{2\bullet} = 91.35 \quad y_{3\bullet} = 91.55 \quad y_{4\bullet} = 91.85 \quad y_{5\bullet} = 92.7$$

	$y_{1\bullet}$	$y_{2\bullet}$	$y_{3\bullet}$	$y_{4\bullet}$	$y_{5\bullet}$
$y_{1\bullet}$	-----	0.25	0.45	0.75	1.6
$y_{2\bullet}$	-----	-----	0.2	0.5	1.35
$y_{3\bullet}$	-----	-----	-----	0.3	1.15
$y_{4\bullet}$	-----	-----	-----	-----	0.85
$y_{5\bullet}$	-----	-----	-----	-----	-----

Hallemos la diferencia mínima significativa (LSD)

$$LSD = t_{(t-1)(b-1), \alpha} \sqrt{2s^2 / b} = t_{12, 0.05} \sqrt{2 \cdot 0.098 / 4} = 2.179 \cdot \sqrt{2 \cdot 0.098 / 4} = 0.482$$

teniendo en cuenta que la región crítica siempre está formada por las dos colas de las distribución por lo que se debe tomar $t_{16, 0.025}$.

Así se pueden agrupar los tratamientos $\{y_{1\bullet}, y_{2\bullet}, y_{3\bullet}\}$, $\{y_{2\bullet}, y_{3\bullet}\}$, $\{y_{3\bullet}, y_{4\bullet}\}$

- e) El procedimiento es similar al de la t de Student, pero en este caso la LSD se denomina HSD (y desaparece el 2 de dentro de la raíz)

$$HSD = q_{t, (t-1)(b-1)}^{\alpha} \sqrt{s^2 / b} = q_{5, 12}^{0.05} \sqrt{0.098 / 4} = 4.51 \sqrt{0.0245} = 0.706$$

donde $q_{t,(t-1)(b-1)}^\alpha$ se obtiene de las tablas de “studentized range”.

Este test es más conservador que el de la t de Student, aunque, en este caso, utilizando la tabla anterior, se obtienen los mismos grupos.

f) Se trata de un test que se utiliza para contrastar varios tratamientos a la vez. Para ello se utiliza un estimador $\hat{\psi} = c_1 \hat{\tau}_1 + \dots + c_t \hat{\tau}_t$ de una función estimable $\psi = c_1 \tau_1 + \dots + c_t \tau_t$

Dado que los efectos de los tratamientos son desconocidos, se toman sus estimadores (las medias). En nuestro caso obtenemos

$$\hat{\psi} = 1 \cdot 91.1 + 1 \cdot 91.35 - 1 \cdot 91.85 - 1 \cdot 92.7 = -2.1$$

El resultado de Scheffé afirma que hay una probabilidad $(1 - \alpha)$ de que para todas las funciones estimables ψ se verifique

$$\hat{\psi} - S \hat{\sigma}_{\hat{\psi}} \leq \psi \leq \hat{\psi} + S \hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$$

donde

$$S = \sqrt{(t-1)F_{\alpha}(t-1, (t-1)(b-1))} = \sqrt{4F_{0.05}(4,12)} = 3.61$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}} = \sqrt{\sum c_i^2 s^2 / b} = \sqrt{4 \cdot 0.098 / 4} = 0.31$$

Así pues obtenemos

$$-2.1 - 3.61 \cdot 0.31 \leq \psi \leq -2.1 + 3.61 \cdot 0.31$$

$$-3.22 \leq \psi \leq -0.98$$

por lo que la hipótesis de que $H_0 : \psi = 0$ deberá rechazarse pues el intervalo encontrado NO contiene al cero.

EXPERIMENTO BIFACTORIAL CON INTERACCION

La cantidad vendida de un artículo la podemos clasificar atendiendo al tipo de tienda en la que se vende y a la región en que está situada. Supongamos que tenemos cuatro tipos de tiendas (4 niveles de A) situadas en tres regiones diferentes (3 niveles de B). Se quiere contrastar la igualdad de efectos al nivel del 10%, es decir las tres hipótesis $\alpha_i = 0, \forall i = 1,2,3,4$, $\beta_j = 0, \forall j = 1,2,3$, $(\alpha\beta)_{ij} = 0, \forall i, j$.

Las cantidades vendidas se recogen en el siguiente cuadro

	1	2	3
1	59	61	71
	61	64	70
	61	67	68
	59	62	74
2	60	69	66
	63	64	72
	55	62	67
	57	69	72
3	63	66	75
	67	71	69
	65	68	76
	60	68	68
4	66	62	69
	64	69	70
	61	68	69
	68	71	77

- Mostrar el cuadro del Análisis de la Varianza
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de las tiendas son todos nulos
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de las regiones son todos nulos
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de las interacciones son todos nulos

Solución comentada:

- Para construir la tabla ANOVA son necesarios los siguientes cálculos:
 - Número de niveles del concepto A $a = 4$
 - Número de niveles del concepto B $b = 3$
 - Número de observaciones en cada combinación de niveles de A y de B, es decir, número de observaciones por celda $n = 4$
 - Número total de observaciones $N = abn = 48$
 - Totales: Se suman las observaciones de cada celda $T_{ij\bullet}$, por ejemplo, $T_{11\bullet} = 59 + 61 + 61 + 59 = 240$ y se obtiene la siguiente tabla

	R1	R2	R3	$T_{i\bullet\bullet}$
T1	240	254	283	777
T2	235	264	277	776
T3	255	273	288	816
T4	259	270	285	814
$T_{\bullet j\bullet}$	989	1061	1133	$G = \sum T_{i\bullet\bullet} = 3183$

- Parámetro $C = G^2 / N = 211072.69$
- $\sum y_{ijk}^2 = 212245$

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
A	$S_A = \sum T_{i\bullet\bullet}^2 / bn - C = 211196.42 - C = 123.73$	$a - 1 = 3$	$M_A = S_A / a - 1 = 41.24$
B	$S_B = \sum T_{\bullet j\bullet}^2 / an - C = 211720.68 - C = 648$	$b - 1 = 2$	$M_B = S_B / b - 1 = 324$
Interacción	$S_{AB} = \sum T_{ij\bullet}^2 / n - C - S_A - S_B = 45.33$	$(a - 1)(b - 1) = 6$	$M_{AB} = S_{AB} / 6 = 7.56$
Error	$S_e = \sum y_{ijk}^2 - \sum T_{ij\bullet}^2 / n = 355.25$	$ab(n - 1) = 36$	$M_e = s^2 = S_e / 36 = 9.87$
TOTAL	$S_A + S_B + S_{AB} + S_e = \sum y_{ij}^2 - C = 1172.31$	$N - 1 = 47$	

- b) La hipótesis $H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_i$ de que los efectos de los tratamientos son nulos en el nivel A, es decir, no hay diferencias entre los tratamientos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_A / s^2 = 41.24 / 9.87 = 4.18$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(a - 1, ab(n - 1))_\alpha$, donde α es el nivel de significación.

En nuestro caso $F(3,36)_{0.10} = 2.24 < F$

por lo que rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que los efectos de los tratamientos en el nivel A, NO son nulos.

- c) La hipótesis $H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_j$ de que los efectos de los tratamientos son nulos en el nivel B, es decir, no hay diferencias entre los tratamientos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_B / s^2 = 324 / 9.87 = 32.83$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(b - 1, ab(n - 1))_\alpha$, donde α es el nivel de significación.

En nuestro caso $F(2,36)_{0.10} = 2.43 < F$

por lo que rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que los efectos de los tratamientos en el nivel B, NO son nulos.

- d) Finalmente la hipótesis $H_0 : (\alpha\beta)_i = 0$ de que los efectos de los tratamientos en las interacciones son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_{AB} / s^2 = 7.56 / 9.87 = 0.77$$

La hipótesis se rechaza si $F > F((a - 1)(b - 1), ab(n - 1))_\alpha$, donde α es el nivel de significación.

En nuestro caso $F(6,36)_{0.10} = 1.95 > F$

por lo que aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que los efectos de los tratamientos en las interacciones son nulos, es decir, no existe interacción entre las regiones y las tiendas.

EXPERIMENTO ANIDADO O JERARQUIZADO BIETÁPICO

Un ingeniero quiere estudiar las deformaciones longitudinales de los tubos de vidrio fabricados por cinco máquinas diferentes. Cada máquina tiene cuatro compartimentos en los cuales se fabrican los tubos y decide tomar cuatro muestras de cada compartimento.

Observando que los compartimentos de la máquina A no pueden desmontarse para ponerlos en la B, ni los de la B en la C, llegamos a la conclusión de que máquinas y compartimentos no constituyen un experimento factorial ya que cada máquina tiene sus propios compartimentos. Así pues consideraremos los compartimentos anidados dentro de las máquinas.

Compartimento	Máquina				
	A	B	C	D	E
1	6	10	0	11	1
	2	9	0	0	4
	0	7	5	6	7
	8	12	5	4	9
2	13	2	10	5	6
	3	1	11	10	7
	9	1	6	8	0
	8	10	7	3	3
3	1	4	8	1	3
	10	1	5	8	0
	0	7	0	9	2
	6	9	7	4	2
4	7	0	7	0	3
	4	3	2	8	7
	7	4	5	6	4
	9	1	4	5	0

- Mostrar el cuadro del Análisis de la Varianza
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de las máquinas en las deformaciones son todos nulos
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de los compartimentos en las deformaciones son todos nulos

Solución comentada:

- Para construir la tabla ANOVA son necesarios los siguientes cálculos:

- Número de niveles principales (máquinas) $b = 5$
- Número de niveles secundarios (compartimentos) contenidos en cada nivel principal $s = 4$
- Número de observaciones por nivel y máquina $n = 4$
- Número total de observaciones $N = bns = 80$
- Totales: Se suman las observaciones de cada celda $T_{ij\bullet}$, por ejemplo,

$T_{11\bullet} = 59 + 61 + 61 + 59 = 240$ y se obtiene la siguiente tabla

	A	B	C	D	E	
1	16	38	10	21	21	
2	33	14	34	26	16	
3	17	21	20	22	7	
4	27	8	18	19	14	
$T_{i\bullet\bullet}$	93	81	82	88	58	$G = \sum T_{i\bullet\bullet} = 402$

- Parámetro $C = G^2 / N = 2020.05$
- $\sum T_{ij\bullet}^2 = 16^2 + 38^2 + \dots + 14^2 = 9392$
- $\sum y_{ijk}^2 = 2990$

EXPERIMENTO TRIFACTORIAL COMPLETO

En un experimento se da de comer caroteno a un grupo de cabras durante periodos consecutivos de dos días utilizando dos métodos para medir la digeribilidad del caroteno. La tabla de datos que se muestra corresponde a los resultados para cuatro cabras C_1, C_2, C_3, C_4 durante cinco periodos. En cada celda el primer número corresponde a la digeribilidad medida por el método 1, y el segundo número, la medida por el método 2. Las combinaciones cabras-periodos pueden considerarse como $4 \times 5 = 20$ parcelas completas. Cada parcela completa se divide en dos subparcelas (una en la que se aplica el método 1 y otra en la que se aplica el método 2).

	I	II	III	IV	V
C_1	75.1;75.2	69.0;63.5	74.3;80.7	51.2;46.7	72.6;71.0
C_2	65.4;62.7	63.3;61.2	59.4;65.3	62.9;62.1	63.8;63.1
C_3	61.9;60.1	57.7;59.6	74.4;75.8	62.9;55.3	54.3;58.3
C_4	69.4;70.1	60.7;57.0	57.0;54.5	56.6;49.5	64.3;63.3

Los efectos principales (o sea no relacionados con las interacciones) debidos a los factores: cabras (C) y periodos (P) se contrastarían frente al cuadrado medio para la interacción cabras-periodos. La interacción métodos-cabras-periodos se utilizará para contrastar los efectos de los métodos, la interacción métodos-cabras y la interacción métodos-periodos.

- Mostrar el cuadro del Análisis de la Varianza
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de los métodos son nulos
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de las cabras son nulos
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de los periodos son nulos
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de la interacción cabras-periodos son nulos
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de la interacción métodos-cabras son nulos
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de la interacción métodos-periodos son nulos

Solución comentada:

- a) Para construir la tabla ANOVA son necesarios los siguientes cálculos:

- Número de niveles del factor A (métodos) $a = 2$
- Número de niveles del factor B (cabras) $b = 4$
- Número de niveles del factor C (periodos) $c = 5$
- Número de observaciones por celda $n = 1$
- Número total de observaciones $N = abc = 40$
- Totales:

	I	II	III	IV	V	$T_{1j..}; T_{2j..}$
C_1	75.1;75.2	69.0;63.5	74.3;80.7	51.2;46.7	72.6;71.0	342.2;337.1
C_2	65.4;62.7	63.3;61.2	59.4;65.3	62.9;62.1	63.8;63.1	314.8;314.4
C_3	61.9;60.1	57.7;59.6	74.4;75.8	62.9;55.3	54.3;58.3	311.2;309.1
C_4	69.4;70.1	60.7;57.0	57.0;54.5	56.6;49.5	64.3;63.3	308.0;294.4
$T_{1..k}; T_{2..k}$	271.8;268.1	250.7;241.3	265.1;276.3	233.6;213.6	255.0;255.7	$G = 2531.2$

- Suma de totales del factor 1 (métodos)
 $T_{1...} = 342.2 + 314.8 + 311.2 + 308.0 = 1276.2; T_{2...} = 1255$
- Suma de totales del factor 2 (cabras)
 $T_{..1.} = 75.1 + 75.2 + 69.0 + 63.5 + \dots + 72.6 + 71.0 = 679.3$ $T_{..2.} = 629.2; T_{..3.} = 620.3; T_{..4.} = 602.4$
- Suma de totales del factor 3 (periodos)
 $T_{..1.} = 150.3 + \dots + 139.5 = 539.9$ $T_{..2.} = 492; T_{..3.} = 541.4; T_{..4.} = 447.2; T_{..5.} = 255.7$
- Parámetro $C = G^2 / N = 160174.336$
- $\sum y_{ijk}^2 = 162499.72$

EXPERIMENTO TRIFACTORIAL SPLIT-SPLIT

Se realizó un experimento para investigar los efectos de diferentes variedades de cultivo de avena y de abonos (nitrógeno). En este experimento se tomaron tres bloques de tres parcelas cada uno, y en cada una de las parcelas de cada bloque se sembró una de las tres variedades de avena seleccionadas para el experimento. Cada parcela fue dividida en cuatro subparcelas en cada una de las cuales se asignó aleatoriamente un nivel del factor nitrógeno. Estos cuatro niveles eran: Sin abono, 0.01, 0.02 y 0.03 toneladas por acre. Los tratamientos principales eran las variedades de avena y los subtratamientos eran los niveles de nitrógeno. Los datos están recogidos en la siguiente tabla.

Bloque	Variedad	N1	N2	N3	N4
I	A1	111	130	157	174
	A2	117	120	161	141
	A3	105	140	118	190
II	A1	74	93	81	122
	A2	64	103	132	152
	A3	70	95	104	117
III	A1	64	91	97	103
	A2	70	108	126	149
	A3	96	133	121	144

- Mostrar el cuadro del Análisis de la Varianza
- Contrastar la hipótesis de que las tres variedades de avena son iguales
- Contrastar la hipótesis de que los bloques son iguales
- Contrastar la hipótesis de que los niveles del factor nitrógeno son homogéneos
- Contrastar la hipótesis de que existe interacción variedades de avena- abono

Solución comentada:

- Para construir la tabla ANOVA son necesarios los siguientes cálculos:

- Número de bloques $b = 3$
- Número de variedades $v = 3$
- Número de niveles del factor B $s = 4$
- Número total de observaciones $N = bvs = 36$
- Totales:

Bloque	Variedad	N1	N2	N3	N4	$T_{ij\bullet\bullet}$	$T_{i\bullet\bullet\bullet}$
I	A1	111	130	157	174	572	1664
	A2	117	120	161	141	539	
	A3	105	140	118	190	553	
II	A1	74	93	81	122	370	1207
	A2	64	103	132	152	451	
	A3	70	95	104	117	356	
III	A1	64	91	97	103	355	1302
	A2	70	108	126	149	453	
	A3	96	133	121	144	494	
	$T_{\bullet\bullet k\bullet}$	771	1013	1097	1292	$G = 4173$	

- Totales en cada bloque $T_{i\bullet\bullet\bullet}$ (ver tabla anterior)
- Totales en cada bloque-variedad $T_{ij\bullet\bullet}$ (ver tabla anterior)
- Totales en cada nivel del factor B $T_{\bullet\bullet k\bullet}$ (ver tabla anterior)
- Totales en cada variedad-nivel del factor B $T_{\bullet\bullet jk\bullet}$

$$T_{\bullet 11\bullet} = 111 + 74 + 64, \dots$$

- Suma total $G = 4173$

EXPERIMENTO TRIFACTORIAL CON CUADRADOS LATINOS

Se efectúa un experimento para medir la incidencia de tres factores (estator, rotor, calidad del revestimiento) en el voltaje producido por un alternador de corriente en un equipo eléctrico. Para llevar a cabo el experimento se ha seleccionado aleatoriamente un cuadrado latino y se han obtenido los siguientes voltajes:

	Estator				
Rotores	145	150	155	160	165
230	310 (C)	312 (B)	320 (A)	306 (D)	300 (E)
240	309 (D)	310 (C)	324 (B)	300 (E)	305 (A)
250	312 (B)	303 (E)	325 (C)	307 (A)	302 (D)
260	316 (A)	306 (D)	318 (E)	304 (C)	294 (B)
270	314 (E)	308 (A)	323 (D)	309 (B)	303 (C)

Se trata de determinar qué factores están más relacionados con un mejor rendimiento del alternador, es decir, mayor voltaje. Calcúlese:

- Mostrar el cuadro del Análisis de la Varianza
- Contrastar la hipótesis de que los efectos de los tres factores no son nulos (son significativos)
- Determinense intervalos de confianza del 95% para los efectos de los estators.

Solución comentada:

- a) Para construir la tabla ANOVA son necesarios los siguientes cálculos:

- Número de niveles de cada factor $p = 5$
- Número total de observaciones $N = p^2 = 25$
- Totales:

	Estator					
Rotores	145	150	155	160	165	T_f
230	310 (C)	312 (B)	320 (A)	306 (D)	300 (E)	1548
240	309 (D)	310 (C)	324 (B)	300 (E)	305 (A)	1548
250	312 (B)	303 (E)	325 (C)	307 (A)	302 (D)	1549
260	316 (A)	306 (D)	318 (E)	304 (C)	294 (B)	1538
270	314 (E)	308 (A)	323 (D)	309 (B)	303 (C)	1557
T_c	1561	1539	1610	1526	1504	$G = 7740$

- Totales de la calidad del revestimiento

	A	B	C	D	E
T_n	1556	1551	1552	1546	1535

- $C = G^2 / N = 2396304$
- $\sum y_{ijk}^2 = 2397840$

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
Filas (Rotores)	$S_f = \sum T_f^2 / p - C = 2396340.4 - C = 36.4$	$p - 1 = 4$	$M_f = S_f / 4 = 9.1$
Columnas (Estators)	$S_c = \sum T_c^2 / p - C = 2397606.8 - C = 1302.8$	$p - 1 = 4$	$M_c = S_c / 4 = 325.7$
Números (Calidad)	$S_n = \sum T_n^2 / p = 2396356.4 - C = 52.4$	$p - 1 = 4$	$M_n = S_n / 4 = 13.1$
Error	$S_e = S_T - S_f - S_c - S_n = 144.4$	$(p - 1)(p - 2) = 12$	$M_e = S_e / 12 = 12.03$
TOTAL	$S_T = \sum y_{ijk}^2 - C = 1536.4$	$N - 1 = 24$	

EXPERIMENTO CUATRIFACTORIAL CON CUADRADOS GRECO-LATINOS

Mediante un experimento se pretende determinar el efecto de las siguientes variables en el grado de acidez de una solución ácida:

- ácido nítrico decolorado (1, 2, 3, 4, 5)
- volumen de ácido (1, 2, 3, 4, 5)
- tamaño de las barras de silicio (A, B, C, D, E)
- tiempo de elaboración de la solución ácida ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$)

Como un indicador de la concentración de ácido se tomó nota de la pérdida de peso en cada barra de silicio y se recogieron los datos en la siguiente tabla.:

	Color				
Volumen	1	2	3	4	5
1	65 (A) α	82 (B) γ	108 (C) ϵ	101 (D) β	126 (E) δ
2	84 (B) β	109 (C) δ	73 (D) α	97 (E) γ	83 (A) ϵ
3	105 (C) γ	129 (D) ϵ	89 (E) β	89 (A) δ	52 (B) α
4	119 (D) δ	72 (E) α	76 (A) γ	117 (B) ϵ	84 (C) β
5	97 (E) ϵ	59 (A) β	94 (B) δ	78 (C) α	106 (D) γ

- a) Mostrar el cuadro del Análisis de la Varianza
- b) Contrastar la hipótesis de que los efectos de los tres factores son nulos

Solución comentada:

- a) Para construir la tabla ANOVA son necesarios los siguientes cálculos:

- Número de niveles de cada factor $p = 5$
- Número total de observaciones $N = p^2 = 25$
- Totales:

	Color					
Volumen	145	150	155	160	165	T_f
230	65 (A) α	82 (B) γ	108 (C) ϵ	101 (D) β	126 (E) δ	482
240	84 (B) β	109 (C) δ	73 (D) α	97 (E) γ	83 (A) ϵ	446
250	105 (C) γ	129 (D) ϵ	89 (E) β	89 (A) δ	52 (B) α	464
260	119 (D) δ	72 (E) α	76 (A) γ	117 (B) ϵ	84 (C) β	468
270	97 (E) ϵ	59 (A) β	94 (B) δ	78 (C) α	106 (D) γ	434
T_c	470	451	440	482	451	$G = 2294$

- Totales del tamaño de las barras

	A	B	C	D	E
T_{n1}	372	429	484	528	481

- Totales del tiempo de elaboración

	α	β	γ	δ	ϵ
T_{n2}	340	417	466	537	534

- $C = G^2 / N = 210497.44$
- $\sum y_{ijk}^2 = 220378$

HIPÓTESIS NECESARIAS PARA EL DISEÑO DE EXPERIMENTOS

EXPERIMENTOS DE ANALISIS DE VARIANZA

- a) Normalidad de la variable en estudio
- b) Las e_{ij} son variables con distribución normal incorreladas de media cero (hipótesis de normalidad) y varianza común σ^2 (homocedasticidad)
- c) Los tratamientos son independientes.

EXPERIMENTOS DE ANALISIS DE COVARIANZA

- a) Se selecciona una muestra de tamaño n de cada una de las subpoblaciones
- b) Cada una de las poblaciones sigue una distribución normal
- c) Las medias poblacionales dentro de cada grupo, siguen una linea recta
- d) La pendiente de las rectas es la misma para cada grupo.

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
Filas (Volumen)	$S_f = \sum T_f^2 / p - C = 210783.2 - C = 285.76$	$p - 1 = 4$	$M_f = S_f / 4 = 71.44$
Columnas (Color)	$S_c = \sum T_c^2 / p - C = 210725.2 - C = 227.76$	$p - 1 = 4$	$M_c = S_c / 4 = 56.94$
Números (Tamaño)	$S_{n1} = \sum T_{n1}^2 / p = 213365.2 - C = 2867.76$	$p - 1 = 4$	$M_{n1} = S_{n1} / 4 = 716.94$
Números (Tiempo)	$S_{n2} = \sum T_{n2}^2 / p = 216034 - C = 5536.56$	$p - 1 = 4$	$M_{n2} = S_{n2} / 4 = 1384.14$
Error	$S_e = S_T - S_f - S_c - S_{n1} - S_{n2} = 962.72$	$(p - 1)(p - 3) = 8$	$M_e = S_e / 8 = 120.34$
TOTAL	$S_T = \sum y_{ijk}^2 - C = 9880.56$	$N - 1 = 24$	

b) La hipótesis $H_0 : \rho_i = 0$ de que los efectos de los volúmenes son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_f / M_e = 71.44 / 120.34 = 0.59$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,8)_{0.05} = 3.84$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos de los volúmenes.

La hipótesis $H_0 : \gamma_i = 0$ de que los efectos de los colores son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_c / M_e = 56.94 / 120.34 = 0.47$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,8)_{0.05} = 3.84$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos de los colores.

La hipótesis $H_0 : \tau_i = 0$ de que los efectos del tamaño son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_{n1} / M_e = 716.94 / 120.34 = 5.96$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,8)_{0.05} = 3.84$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que hay efectos debidos al tamaño.

La hipótesis $H_0 : \omega_i = 0$ de que los efectos del tiempo son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_{n2} / M_e = 1384.14 / 120.34 = 11.50$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,8)_{0.05} = 3.84$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que hay efectos debidos al tiempo.

b) La hipótesis $H_0 : \rho_i = 0$ de que los efectos de los rotores son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_f / M_e = 9.1 / 12.03 = 0.76$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,12)_{0.05} = 3.26$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos de los rotores.

La hipótesis $H_0 : \gamma_i = 0$ de que los efectos de los estatores son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_c / M_e = 325.7 / 12.03 = 27.07$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,12)_{0.05} = 3.26$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que el estator es un factor altamente significativo.

La hipótesis $H_0 : \tau_i = 0$ de que los efectos de la calidad del revestimiento son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_n / M_e = 13.1 / 12.03 = 1.09$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,12)_{0.05} = 3.26$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos por el revestimiento.

c) PENDIENTE

- Parámetro $C = G^2 / N = 483720.25$
- $\sum y_{ijk}^2 = 517237$
-

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
Bloques	$S_B = \sum T_{i\bullet\bullet}^2 / vs - C = 9692.17$	$b - 1 = 2$	$M_B = S_B / 2 = 4846.08$
Variedades	$S_V = \sum T_{\bullet j\bullet}^2 / bs - C = 1108.67$	$v - 1 = 2$	$M_V = S_V / 2 = 554.33$
Error en el plot (bloque + variedad)	$S_{B(V)} = \sum T_{ij\bullet\bullet}^2 / s - C - S_B - S_V = 2499.16$	$(b - 1)(v - 1) = 4$	$M_{B(V)} = S_{B(V)} / 4 = 624.79$
Factor B	$S_S = \sum T_{\bullet\bullet k\bullet}^2 / bv - C = 15533.42$	$(s - 1) = 3$	$M_S = S_S / 3 = 5177.81$
Variedad + Factor	$S_{V(S)} = \sum T_{\bullet jk\bullet}^2 / b - C - S_B - S_S = 1446$	$(s - 1)(v - 1) = 6$	$M_{V(S)} = S_{V(S)} / 6 = 241$
Error	$S_e = S_T - S_B - S_V - S_S - S_{B(V)} - S_{V(S)} = 3237.33$	$v(b - 1)(s - 1) = 18$	$s^2 = S_e / 18 = 179.85$
TOTAL	$\sum y_{ijk}^2 - C = 33516.75$	$N - 1 = 35$	

- b) La hipótesis $H_0 : v_i = 0$ de que los efectos de las variedades son nulos, es decir, que las tres variedades de avena son iguales, se contrasta con el estadístico

$$F = M_V / M_{B(V)} = 554.33 / 624.79 = 0.89$$

La hipótesis se rechaza si $F < F(2,4)_{0.05} = 6.94$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay diferencias entre las variedades.

- c) La hipótesis $H_0 : b_i = 0$ de que los bloques son iguales se contrasta con el estadístico

$$F = M_B / s^2 = 4846.08 / 179.85 = 26.94$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(2,18)_{0.05} = 3.55$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que hay diferencias entre los bloques.

- d) La hipótesis $H_0 : \sigma_i = 0$ de que los niveles del factor nitrógeno son iguales se contrasta con el estadístico

$$F = M_S / s^2 = 5177.81 / 179.85 = 18.82$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(2,18)_{0.05} = 3.55$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que hay diferencias entre los niveles de nitrógeno.

- e) La hipótesis $H_0 : (v\sigma)_i = 0$ de que los efectos de las interacciones avena-abono son nulos, se contrasta con el estadístico

$$F = M_{V(S)} / s^2 = 241 / 179.85 = 1.34$$

La hipótesis se rechaza si $F < F(6,18)_{0.05} = 2.66$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay interacciones avena-abono.

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
Métodos (A)	$S_A = \sum T_{i\bullet\bullet}^2 / bcn - C = 160185.572 - C = 11.236$	$a - 1 = 1$	$M_A = S_A / 1 = 11.236$
Cabras (B)	$S_B = \sum T_{\bullet j\bullet}^2 / acn - C = 160499.898 - C = 325.562$	$b - 1 = 3$	$M_B = S_B / 3 = 108.52$
Periodos (C)	$S_C = \sum T_{\bullet\bullet k}^2 / abn - C = 160934.0375 - C = 759.7015$	$c - 1 = 4$	$M_C = S_C / 4 = 189.93$
Interacción (AB)	$S_{AB} = \sum T_{ij\bullet}^2 / cn - S_A - S_B - C =$ $= 160521.452 - C - S_A - S_B = 10.318$	$(a - 1)(b - 1) = 3$	$M_{AB} = S_{AB} / 3 = 3.44$
Interacción (AC)	$S_{AC} = \sum T_{i\bullet k}^2 / bn - S_A - S_C - C =$ $= 161012.535 - C - S_A - S_C = 67.2615$	$(a - 1)(c - 1) = 4$	$M_{AC} = S_{AC} / 4 = 16.82$
Interacción (BC)	$S_{BC} = \sum T_{\bullet jk}^2 / an - S_B - S_C - C =$ $= 162351.68 - C - S_B - S_C = 1092.0805$	$(b - 1)(c - 1) = 12$	$M_{BC} = S_{BC} / 12 = 91.01$
Interacción (ABC)	$S_{ABC} = \sum T_{ijk}^2 / n - S_A - S_B - S_C -$ $- S_{AB} - S_{AC} - S_{BC} - C = 59.2245$	$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = 12$	$M_{ABC} = S_{ABC} / 12 = 4.94$
Error	$S_e = 0$ (ya que sólo hay una observación por celda)		
TOTAL	$\sum y_{ijk}^2 - C = 2325.384$	$N - 1 = 39$	

- b) La hipótesis $H_0 : a_i = 0$ de que los efectos de los métodos son nulos, es decir, no hay diferencias entre los métodos para medir la digeribilidad del caroteno, se contrasta según el planteamiento, con el estadístico

$$F = M_A / M_{ABC} = 11.236 / 4.94 = 2.27$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(1,12)_{0.05} = 4.75$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos de los métodos.

- c) La hipótesis $H_0 : b_i = 0$ de que los efectos de las cabras son nulos, es decir, no hay diferencias entre las cabras para medir la digeribilidad del caroteno, se contrasta según el planteamiento, con el estadístico

$$F = M_B / M_{BC} = 108.52 / 91.01 = 1.19$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(3,12)_{0.05} = 3.49$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos de las cabras.

- d) La hipótesis $H_0 : c_i = 0$ de que los efectos de los periodos son nulos, es decir, no hay diferencias entre los periodos para medir la digeribilidad del caroteno, se contrasta según el planteamiento, con el estadístico

$$F = M_C / M_{BC} = 189.93 / 91.01 = 2.09$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,12)_{0.05} = 3.26$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos de los periodos.

- e) La hipótesis $H_0 : (bc)_i = 0$ de que los efectos de las interacciones cabras-periodos son nulos, se contrasta según el planteamiento, con el estadístico

$$F = M_{BC} / M_{ABC} = 91.01 / 4.94 = 18.82$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(12,12)_{0.05} = 2.69$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que hay efectos de la interacción cabras-periodos.

- f) La hipótesis $H_0 : (ab)_i = 0$ de que los efectos de las interacciones métodos-cabras son nulos, se contrasta según el planteamiento, con el estadístico

$$F = M_{AB} / M_{ABC} = 3.44 / 4.94 = 0.7$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(3,12)_{0,05} = 3.49$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos de la interacción métodos-cabras.

g) La hipótesis $H_0 : (ac)_i = 0$ de que los efectos de las interacciones métodos-periodos son nulos, se contrasta según el planteamiento, con el estadístico

$$F = M_{AC} / M_{ABC} = 16.82 / 4.94 = 3.40$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(4,12)_{0,05} = 3.26$, donde $\alpha = 0.05$ es el nivel de significación.

En nuestro caso rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que hay efectos de la interacción métodos-periodos.

Fuente	Suma de cuadrados (MC)	G de l	EMC (Esperanza de la media de cuadrados)
Máquinas	$S_B = \sum T_{i\bullet\bullet}^2 / ns - C = 2065.125 - C = 45.075$	$b - 1 = 4$	$M_B = S_B / b - 1 = 11.27$
Compartimentos de las máquinas	$S_{S(B)} = \sum T_{ij\bullet}^2 / n - C - S_B = 2348 - C - S_B = 282.875$	$b(s - 1) = 15$	$M_{S(B)} = S_{S(B)} / b(s - 1) = 18.86$
Error	$S_e = \sum y_{ijk}^2 - \sum T_{ij\bullet}^2 / n = 642$	$sb(n - 1) = 60$	$M_e = s^2 = S_e / 60 = 10.7$
TOTAL	$\sum y_{ijk}^2 - C = 969.95$	$N - 1 = 79$	

- b) La hipótesis $H_0 : \sigma_2^2 = 0$ de que los efectos de las máquinas en las deformaciones son nulos, es decir, no hay diferencias entre las máquinas, se contrasta con el estadístico

$$F = M_B / s^2 = 11.27 / 10.7 = 1.05$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(b - 1, sb(n - 1))_\alpha$, donde α es el nivel de significación.

En nuestro caso $F(4, 60)_{0.05} = 2.36 > F$

por lo que aceptamos la hipótesis H_0 y admitimos que no hay efectos de las máquinas en las deformaciones de los tubos.

- c) La hipótesis $H_0 : \sigma_1^2 = 0$ de que los efectos de los compartimentos en las deformaciones son nulos, es decir, no hay diferencias entre los compartimentos de las máquinas, se contrasta con el estadístico

$$F = M_{S(B)} / s^2 = 18.86 / 10.7 = 1.76$$

La hipótesis se rechaza si $F > F(b(s - 1), sb(n - 1))_\alpha$, donde α es el nivel de significación.

En nuestro caso $F(15, 60)_{0.05} = 1.60 < F$

por lo que rechazamos la hipótesis H_0 y admitimos que hay efectos de los compartimentos de las máquinas en las deformaciones de los tubos.

TABLAS

Critical Values of the F Distribution
($\alpha = .05$)

df within	df between										
	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.68	4.53	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.79	2.61	2.41
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.69	2.51	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.38	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.20	2.01	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.12	1.91	1.66
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.92	1.70	1.39
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.88	1.65	1.33
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.85	1.63	1.28
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.83	1.61	1.26
∞	3.84	3.00	2.61	2.37	2.22	2.10	2.01	1.94	1.75	1.52	1.00

Critical Values of the F Distribution
($\alpha = .01$)

df within	df between										
	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	9.89	9.47	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.72	7.31	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.47	6.07	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.67	5.28	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.11	4.73	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.71	4.33	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.40	4.02	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.16	3.78	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	3.96	3.59	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.80	3.43	3.01
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.67	3.29	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.55	3.18	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.46	3.08	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.37	3.00	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.30	2.92	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.23	2.86	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.17	2.80	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.12	2.75	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.07	2.70	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.03	2.66	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	2.99	2.62	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	2.96	2.58	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	2.93	2.55	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	2.90	2.52	2.07
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	2.87	2.49	2.04
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.84	2.47	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.66	2.29	1.81
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.50	2.12	1.60
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.42	2.03	1.50
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.37	1.98	1.43
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.34	1.95	1.38
∞	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.19	1.79	1.00

Critical Values of the t Distribution

df	2-tailed testing / (1-tailed testing)					
	0.2 (0.1)	0.1 (0.05)	0.05 (0.025)	0.02 (0.01)	0.01 (0.005)	0.001 (0.0005)
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.327	2.576	3.291

Critical Values of the Studentized Range Statistic¹

df _{WG}	α	Number of Groups									
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	
	.01	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	
7	.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	
	.01	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	
9	.05	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	
	.01	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	
	.01	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	
	.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	
15	.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	
	.01	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	
	.01	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	
17	.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	
	.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	
19	.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	
	.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	
	.01	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	
30	.05	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	
	.01	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	
120	.05	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	
∞	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	

¹ This table is abridged from Table 29 in E.S. Pearson and H.O. Hartley (Eds.), *Biometrika tables for statisticians* (3rd ed., Vol 1), Cambridge University Press, 1970.

Critical Values of the Dunnett Test²

n	α	Number of Groups, Including Control Group								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	.05	2.57	3.03	3.29	3.48	3.62	3.73	3.82	3.90	3.97
	.01	4.03	4.63	4.98	5.22	5.41	5.56	5.69	5.80	5.89
6	.05	2.45	2.86	3.10	3.26	3.39	3.49	3.57	3.64	3.71
	.01	3.71	4.21	4.51	4.71	4.87	5.00	5.10	5.20	5.28
7	.05	2.36	2.75	2.97	3.12	3.24	3.33	3.41	3.47	3.53
	.01	3.50	3.95	4.21	4.39	4.53	4.64	4.74	4.82	4.89
8	.05	2.31	2.67	2.88	3.02	3.13	3.22	3.29	3.35	3.41
	.01	3.36	3.77	4.00	4.17	4.29	4.40	4.48	4.56	4.62
9	.05	2.26	2.61	2.81	2.95	3.05	3.14	3.20	3.26	3.32
	.01	3.25	3.63	3.85	4.01	4.12	4.22	4.30	4.37	4.43
10	.05	2.23	2.57	2.76	2.89	2.99	3.07	3.14	3.19	3.24
	.01	3.17	3.53	3.74	3.88	3.99	4.08	4.16	4.22	4.28
11	.05	2.20	2.53	2.72	2.84	2.94	3.02	3.08	3.14	3.19
	.01	3.11	3.45	3.65	3.79	3.89	3.98	4.05	4.11	4.16
12	.05	2.18	2.50	2.68	2.81	2.90	2.98	3.04	3.09	3.14
	.01	3.05	3.39	3.58	3.71	3.81	3.89	3.96	4.02	4.07
13	.05	2.16	2.48	2.65	2.78	2.87	2.94	3.00	3.06	3.10
	.01	3.01	3.33	3.52	3.65	3.74	3.82	3.89	3.94	3.99
14	.05	2.14	2.46	2.63	2.75	2.84	2.91	2.97	3.02	3.07
	.01	2.98	3.29	3.47	3.59	3.69	3.76	3.83	3.88	3.93
15	.05	2.13	2.44	2.61	2.73	2.82	2.89	2.95	3.00	3.04
	.01	2.95	3.25	3.43	3.55	3.64	3.71	3.78	3.83	3.88
16	.05	2.12	2.42	2.59	2.71	2.80	2.87	2.92	2.97	3.02
	.01	2.92	3.22	3.39	3.51	3.60	3.67	3.73	3.78	3.83
17	.05	2.11	2.41	2.58	2.69	2.78	2.85	2.90	2.95	3.00
	.01	2.90	3.19	3.36	3.47	3.56	3.63	3.69	3.74	3.79
18	.05	2.10	2.40	2.56	2.68	2.76	2.83	2.89	2.94	2.98
	.01	2.88	3.17	3.33	3.44	3.53	3.60	3.66	3.71	3.75
19	.05	2.09	2.39	2.55	2.66	2.75	2.81	2.87	2.92	2.96
	.01	2.86	3.15	3.31	3.42	3.50	3.57	3.63	3.68	3.72
20	.05	2.09	2.38	2.54	2.65	2.73	2.80	2.86	2.90	2.95
	.01	2.85	3.13	3.29	3.40	3.48	3.55	3.60	3.65	3.69
24	.05	2.06	2.35	2.51	2.61	2.70	2.76	2.81	2.86	2.90
	.01	2.80	3.07	3.22	3.32	3.40	3.47	3.52	3.57	3.61
30	.05	2.04	2.32	2.47	2.58	2.66	2.72	2.77	2.82	2.86
	.01	2.75	3.01	3.15	3.25	3.33	3.39	3.44	3.49	3.52
40	.05	2.02	2.29	2.44	2.54	2.62	2.68	2.73	2.77	2.81
	.01	2.70	2.95	3.09	3.19	3.26	3.32	3.37	3.41	3.44
60	.05	2.00	2.27	2.41	2.51	2.58	2.64	2.69	2.73	2.77
	.01	2.66	2.90	3.03	3.12	3.19	3.25	3.29	3.33	3.37

² This table is abridged from C.W. Dunnett, New tables for multiple comparisons with a control, *Biometrics*, 1964, 482-491.