

Valor del dinero en el Tiempo:

INTERÉS COMPUESTO

1. CONCEPTO

La modalidad de Interés Compuesto, como ya se anotó, asume la posición de que los montos de intereses generados pero no cancelados renten, así como el capital, su misma tasa de interés.

Este efecto se obtiene con la acción de CAPITALIZACIÓN de los intereses causados. Cada vez que se causan y, por lo tanto se calculan, los intereses generados se llevan a la cuenta del capital, de tal modo que si no son cancelados en el momento (porque así se acordó en el contrato y no por incumplimiento de este) entran a ser objeto de devengar la tasa de interés pactada, como capital que ya son.

Esta modalidad de manejo de los intereses está más acorde con el concepto de Valor del Dinero en el Tiempo que la modalidad de Interés Simple, en la cual el dinero correspondiente a los montos causados de interés no puede generar más intereses sobre sí, así sea cancelado mucho tiempo después de su causación.

2. ELEMENTOS

Los elementos que intervienen en toda situación financiera son:

- El TIEMPO (tiempo de duración del negocio y tiempo o período de capitalización de los intereses).
- La TASA de interés que se aplica al período.
- Los FLUJOS DE FONDOS ó FLUJOS DE DINERO que se ubican en los diferentes momentos.

2.1 El Tiempo

Normalmente el tiempo de duración del negocio se divide en PERÍODOS (días, meses, años, etc.) o intervalos, correspondientemente con la forma de capitalización convenida.

Para el desarrollo de las equivalencias, en principio estos intervalos deben ser de igual longitud, es decir, todos los períodos deben ser iguales; aunque en algunos casos se formulan modelos que atienden situaciones de períodos de diferente longitud, esta situación no se abordará en el tratamiento presentado en este documento, por considerarla de rara ocurrencia.

Es usual ayudarse en el análisis de negocios con GRÁFICOS de las situaciones. El tiempo se representa en una recta numérica, cuyos segmentos corresponden a los períodos (período 0-1 ó período 1, período 1-2 ó período 2, etc.):



2.2 La Tasa de Interés

La Tasa de Interés representa el costo del alquiler del capital involucrado en un negocio. Normalmente se representa con la letra **i**, y se da en porcentaje por unidad de tiempo.

La tasa de interés se aplica al PERÍODO DE COMPOSICIÓN, o sea al período en el que se causan los intereses; es importante anotar que esta tasa se denomina TASA PERÍODICA, y que el período para el que ella se declara debe coincidir con el período de partición del tiempo para el negocio (años, meses, días, etc.).

La tasa de interés periódica puede aplicarse en forma anticipada o vencida, según lo estipule el contrato. Es indispensable identificar la tasa en tal situación; los desarrollos de Equivalencia que se presentarán más adelante considerarán la tasa de interés como vencida, por lo tanto, si la tasa original fuere de carácter anticipado, requeriría de la conversión previa a tasa periódica vencida para operarla en los modelos que se tendrán.

Ejemplos: 24% anual compuesta trimestralmente
 26% efectiva anual
 2% mensual
 20% anual compuesta mensualmente de manera anticipada

2.3 Los Flujos de Fondos

Los Flujos de Fondos representan los Ingresos y los Egresos en cada uno de los períodos de la vida del negocio.

Todas las partidas de un período se agrupan y se ubican al final del mismo, por lo tanto los Flujos de Fondos estarán siempre localizados en las divisiones de la recta de tiempo, es decir en los momentos de final de período e inicio del siguiente.

Por convención, los Ingresos se representan gráficamente por flechas dirigidas hacia arriba, mientras que los Egresos se representan por flechas dirigidas hacia abajo.

En cada momento o período se pueden considerar los Ingresos y los Egresos por separado o bien, aprovechando que partidas de dinero ubicadas en el mismo momento reconocen el mismo nivel de valor, se pueden considerar los correspondientes Flujos Netos (Ingresos menos Egresos).

Ejemplo: La empresa Consolas del País S.A. está considerando ingresar en el negocio de los teclados de computador, para lo cual estima una inversión de \$100 millones en un proyecto de cuatro años de vida, con ingresos respectivos de 180, 220, 200 y 200 millones de pesos, y con egresos de 100, 110, 120 y 150 millones de pesos. Consolas del País requiere establecer el diagrama de flujos de fondos para el proyecto:

DIAGRAMA DE FLUJO DE FONDOS (FF)

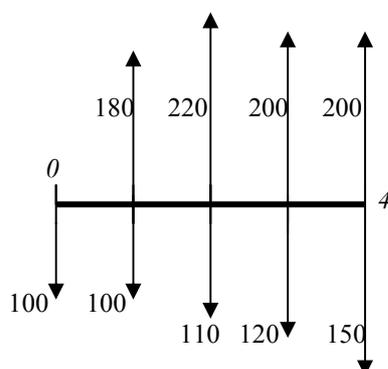
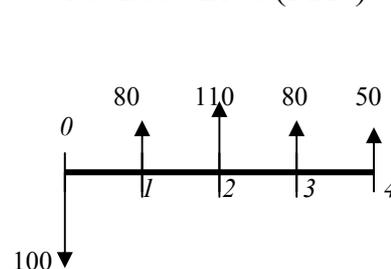


DIAGRAMA DE FLUJO DE FONDOS NETOS (FFN)



3. EQUIVALENCIA

3.1 Comentarios

- El concepto de Equivalencia permite “mover” Flujos de Fondos en el tiempo, conservando su valor, según la tasa de interés asignada.
- Para los cálculos considera todos los Flujos de Fondos ubicados al final de cada período.
- La tasa de Interés que se emplee debe ser PERIÓDICA VENCIDA, es decir, corresponder al período o división del tiempo que se tenga, y aplicarse al finalizar cada período. Cualquier otra modalidad de Tasa de Interés deberá ser convertida a esta antes de aplicar los modelos.
- Los modelos posibilitarán poder agrupar todos los Flujos de Fondos de un negocio en un solo momento en el tiempo, para operar matemáticamente (sumar y restar) dichos flujos equivalentes y obtener un indicador único del negocio.

3.2 Convenciones

FLUJO: Cantidad de dinero originalmente ubicada en un momento en el tiempo.

VALOR: Cantidad de dinero equivalente en un momento distinto al originalmente ubicado.

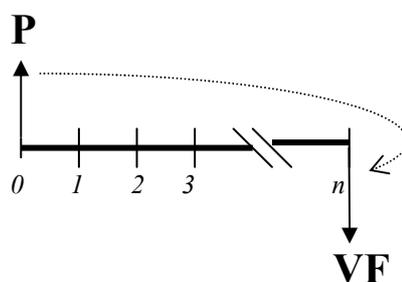
PRESENTE: [P] Fondo ubicado en el momento 0 (cero) o en un momento anterior al cual va a ser trasladado.

FUTURO: [F] Fondo ubicado en el momento n (último) o en un momento posterior al cual va a ser trasladado.



3.3 Equivalencia entre un flujo Presente y un flujo Futuro

3.3.1 Valor Futuro de un Flujo Presente



Como se observa en el diagrama, se trata de trasladar el Flujo Presente (P) desde el momento 0 hasta el momento n , convirtiéndose entonces en un Valor Futuro (VF), el cual connota una partida contraria a la inicial, es decir, si P representa un ingreso o préstamo, VF representará el valor a pagar para cancelar ese préstamo, y si P representare una inversión VF representaría el ingreso al final del negocio, recuperando el capital y los intereses.

Para trasladar un flujo Presente a un valor Futuro se capitalizan periódicamente los intereses, así:

P = Flujo Presente

VF = Valor Futuro

i = Tasa de interés para aplicar en cada período

n = Número de períodos que separan los momentos de P y de VF

Período	Capital al inicio del período	Intereses del período	Capital al final del período
1	P	$P \times i$	$P + P \times i = P(1+i)$
2	$P(1+i)$	$P(1+i) i$	$P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)(1+i)$ $= P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2 i$	$P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i = P(1+i)^2(1+i)$ $= P(1+i)^3$
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*
n	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1} i$	$P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1} i$ $= P(1+i)^{n-1}(1+i)$ $= P(1+i)^n$

Al final del período n el capital acumulado es $P(1+i)^n$, el cual corresponde al valor futuro del respectivo flujo presente.

$$\mathbf{VF = P(1+i)^n}$$

P = Flujo Presente (\$)

VF = Valor Futuro (\$)

i = Tasa de interés para aplicar en cada período (% período/100%)

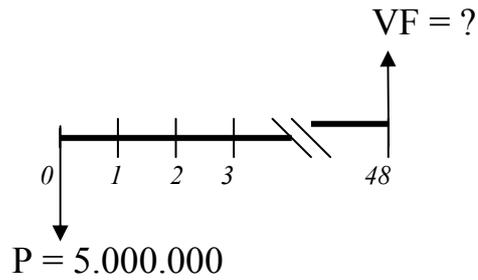
n = Número de períodos que separan los momentos de P y de VF

Ejemplo: Un depósito de \$5.000.000 se mantiene por cuatro años en una fiducia, que rinde el 1,5% mensual, capitalizando los intereses. ¿Cuánto se retira al final del contrato de fiducia?

$$P = \$5.000.000$$

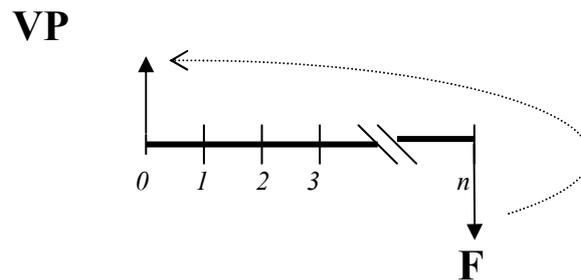
$$n = 4 \times 12 = 48 \text{ meses}$$

$$i = 1,5\% = 0,015$$



$$VF = 5.000.000 \times (1 + 0,015)^{48} = \underline{\$ 10.217.391}$$

3.3.2 Valor Presente de un Flujo Futuro



Despejando el valor futuro de la fórmula anterior se obtiene:

$$\boxed{VP = F / (1+i)^n}$$

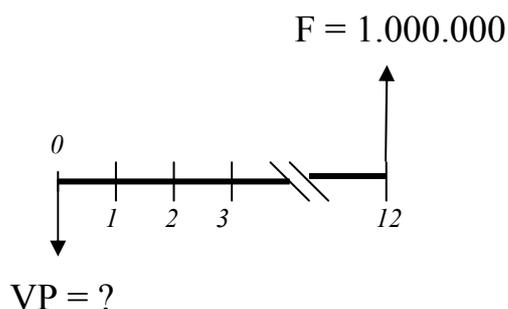
- F = Flujo Futuro (\$)
- VP = Valor Presente (\$)
- i = Tasa de interés para aplicar en cada período (% período/100%)
- n = Número de períodos que separan los momentos de VP y de F

Ejemplo: Calcular el monto de la inversión en un CDT a un año, para que permita retirar una cantidad de \$1.000.000 dentro de doce meses, si el título paga un interés del 1% mensual:

$$F = \$1.000.000$$

$$n = 12 \text{ meses}$$

$$i = 1\% \text{ o } 0,01$$



$$VP = 1.000.000 / (1 + 0,01)^{12} = \underline{\$ 887.449}$$

3.3.3 Tasa de Interés Equivalente

Si se tienen los valores presente y futuro de un negocio es posible calcular la tasa de equivalencia entre ellos, despejándola de la ecuación anterior:

$$i = (F / P)^{1/n} - 1$$

F = Flujo Futuro (\$)

P = Flujo Presente (\$)

i = Tasa de interés para aplicar en cada período (% período/100%)

n = Número de períodos que separan los momentos de VP y de F

Ejemplo: Calcular la tasa de interés anual que convierte un capital en el doble a los cuatro años:

$$P = X$$

$$F = 2X$$

$$n = 4$$

$$i = (2X / X)^{1/4} - 1 = 2^{1/4} - 1 = 0,1892 = \underline{18,92\% \text{ anual}}$$

3.3.4 Período de Equivalencia

Conociendo los flujos y la tasa de interés se encuentra el período de equivalencia:

$$n = \log (F/P) / \log (1+i)$$

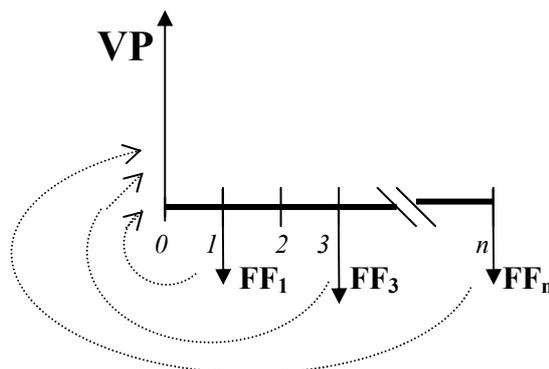
- F = Flujo Futuro (\$)
- P = Flujo Presente (\$)
- i = Tasa de interés para aplicar en cada período (% período/100%)
- n = Número de períodos que separan los momentos de VP y de F
- log = Función logaritmo

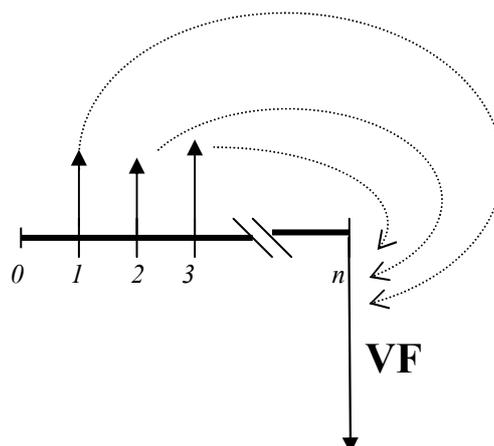
Ejemplo: ¿En cuánto tiempo se triplica un capital al 33% anual?

$$\begin{aligned} P &= X \\ F &= 3X \\ i &= 33\% = 0,33 \end{aligned}$$

$$n = \log (3X/X) / \log (1+ 0,33) = 0,477 / 0,124 = \underline{3,85 \text{ años}}$$

3.4 Valor Presente y Valor Futuro de varios Flujos de Fondos





Es de sentido común deducir que para obtener el Valor Presente de varios Flujos futuros se deben obtener los valores presentes de cada uno de ellos y después, todos ubicados en el momento 0 (cero), se deben sumar algebraicamente (positivos los valores presentes de los ingresos, negativos los valores presentes de los egresos).

Asimismo, para obtener el Valor Futuro de varios flujos de momentos anteriores se deben obtener los valores futuros de cada uno de ellos y después, todos ubicados en el momento n, se deben sumar algebraicamente:

$$\mathbf{VP} = \sum_{j=1}^n \mathbf{FF}_j / (1 + i)^j$$

$$\mathbf{VF} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{FF}_j \times (1 + i)^{n-j}$$

VP = Valor Presente (\$)

VF = Valor Futuro (\$)

i = Tasa de interés para aplicar en cada período (% período/100)

n = Número de períodos que separan los momentos de VP y de VF

FF_j = Flujo de Fondos en el momento j (\$)

\sum = Sumatoria de términos

Ejemplo: Su empresa debe cancelar tres partidas de impuestos, la primera de \$15 millones dentro de tres meses, la segunda de \$12 millones dentro de seis meses y la tercera de \$8 millones dentro de diez meses. ¿Cuánto dinero debe depositar hoy en un fondo de mutuo que otorga un interés del 2% mensual, de tal modo que pueda retirar exactamente el valor de los pagos en los momentos indicados?

$$\begin{aligned} FF_3 &= \$15.000.000 \\ FF_6 &= \$12.000.000 \\ FF_{10} &= \$ 8.000.000 \\ i &= 2\% = 0,02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VP &= 15.000.000 / (1+0,02)^3 + 12.000.000 / (1+0,02)^6 \\ &+ 8.000.000 / (1+0,02)^{10} = \underline{\underline{\$ 31.353.278}} \end{aligned}$$

Ejemplo: Un empleado necesita contar con \$5.000.000 dentro de dos años para realizar un viaje alrededor del mundo. Estima que puede aportar a un fondo de inversiones que genera el 1.85% mensual de interés sumas de \$1.500.000 dentro de 10 meses y de \$2.500.000 dentro de 20 meses. Hoy tiene en su poder una suma de \$1.000.000, de la cual aportará inmediatamente al fondo lo necesario para que pueda lograr su propósito dentro de dos años, y el resto lo gastará en vestuario. ¿Cuánto dinero puede gastar hoy comprando vestidos?

$$\begin{aligned} VF_{24} &= \$5.000.000 \\ FF_{20} &= \$2.500.000 \\ FF_{10} &= \$1.500.000 \\ FF_0 &= X \\ i &= 1,85\% = 0,0185 \end{aligned}$$

$$5.000.000 = 2.500.000(1+0,0185)^{24-20} + 1.500.000 (1+0,0185)^{24-10} + X (1+0,0185)^{24-0}$$

$$5.000.000 = 2.500.000 \times 1,0185^4 + 1.500.000 \times 1,0185^{14} + X \times 1,0185^{24}$$

$$5.000.000 = 4.629.054 + X (1,5526)$$

$$X = 238.919$$

$$\text{Excedente} = 1.000.000 - 238.919 = \underline{\underline{\$ 761.081}} \text{ para gastar en vestuario}$$