

Capítulo 5

Derivación

5.1. Generalidades

5.1.1. Concepto de derivada. Derivadas laterales

Definición 5.1.1. Sea f una función real definida en un intervalo abierto I y sea a un punto de I . Diremos que f es **derivable** en a si existe (en \mathbb{R}) el límite del ‘cociente de incrementos’ o ‘cociente de diferencias’

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Cuando f es derivable en a , el valor del límite anterior recibe el nombre de **derivada** de f en a , y suele denotarse por $f'(a)$; es decir,

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si tal límite existe y es finito.

También se usan otras notaciones: $\frac{d}{dx} f(a)$, $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$, etc.

Nota. En realidad, para definir la derivada no es necesario que el dominio de la función f sea un intervalo: la definición anterior tiene sentido para cualquier tipo de dominio D con tal de que el punto a , además de estar en D , sea punto de acumulación de D . Adviértase igualmente que incluso podemos considerar límites laterales, definiendo entonces de manera obvia la **derivada por la derecha** y la **derivada por la izquierda** de una función en un punto, cuando tales límites laterales del cociente de incrementos tengan sentido.

Definición 5.1.2. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en algún punto, y sea S el subconjunto de puntos de D en los que f es derivable (naturalmente, puede ser $S \neq D$). La **función derivada** de f se define haciendo corresponder a cada $x \in S$ el valor de la derivada de f en el punto x .

Por razones obvias, esta función suele denotarse por f' , de manera que

$$f' : x \in S \rightarrow f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \in \mathbb{R}.$$

Observación. En este punto conviene deshacer un equívoco, que surge quizá del manejo habitual de las derivadas de las funciones elementales: *la definición de derivada en un punto es previa a la de función derivada, y no al revés*. Es decir, por ejemplo, que la derivada de la función seno en un punto x **no** es $\cos x$ **porque** el coseno es la función derivada del seno, **sino** que el coseno es la función derivada del seno **porque** la derivada de la función seno en un punto cualquiera x **resulta ser** igual a $\cos x$, es decir, que existe $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin y - \sin x}{y - x}$ y vale $\cos x$.

5.1.2. Interpretación geométrica y física de la derivada

El cociente de incrementos $(f(x) - f(a))/(x - a)$ corresponde gráficamente a la pendiente de la cuerda que une el punto $(a, f(a))$ con el punto $(x, f(x))$, con lo que en el límite tenemos que la derivada $f'(a)$ (suponiendo que exista) corresponde a la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

En Física, si a cada valor x de una determinada magnitud (la variable independiente) le corresponde el valor $f(x)$ de una segunda magnitud (la variable dependiente), el cociente de incrementos $(f(x) - f(a))/(x - a)$ corresponde a la *variación media* de la variable dependiente en el intervalo $[a, x]$ de variación de la variable independiente, y la derivada $f'(a)$ (suponiendo que exista) corresponde a la *variación instantánea* de la variable dependiente. Por ejemplo, si la variable independiente es el tiempo, cuando la variable dependiente es el espacio tenemos los conceptos de velocidad media y velocidad instantánea; cuando la variable dependiente es la velocidad, pasamos a la aceleración media y la aceleración instantánea.

No es sorprendente la gran cantidad de aplicaciones que encuentra el concepto de derivada, si se tiene en cuenta la formación histórica de este concepto: véanse, por ejemplo, [DURÁN, cap. 3], [RÍBNIKOV, especialmente págs. 182–186], [HAIRER-WANNER, págs. 80 y siguientes]. En este último libro, como motivaciones para la introducción de la derivada a partir de la pendiente de la tangente se señalan:

- El cálculo del ángulo bajo el que se cortan dos curvas (Descartes).
- La construcción de telescopios (Galileo) y de relojes (Huygens, 1673).
- La búsqueda de máximos y mínimos de una función (Fermat, 1638).
- El estudio de la velocidad y aceleración de un movimiento (Galileo, 1638, y Newton, 1686).
- En Astronomía, la verificación de la Ley de Gravitación (Kepler, Newton).

5.1.3. Derivabilidad y continuidad

Proposición 5.1.3. *Si f es una función derivable en un punto a , entonces f es continua en el punto a .*

Demostración.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a). \quad \square$$

El recíproco no es cierto: una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en ese punto. Por ejemplo, la función

$$f(x) = |x|, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua en todos los puntos, pero no es derivable en 0. Tiene derivadas laterales: la derivada por la izquierda es -1 y la derivada por la derecha es 1 . La función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en todos los puntos, pero en 0 no es derivable y ni siquiera tiene derivadas laterales.

5.1.4. Cálculo de derivadas

Teorema 5.1.4 (operaciones algebraicas con funciones derivables). Sean $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D \cap D'$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en a . Se tiene:

- a) $f + g$ es derivable en a , con derivada $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- b) cf es derivable en a , con derivada $(cf)'(a) = cf'(a)$.
- c) fg es derivable en a , con derivada $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- d) si $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a , con derivada $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Demostración. Se deducen fácilmente de las hipótesis y las siguientes propiedades:

- a) $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$.
- b) $\frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x-a} = c \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$.
- c) f es continua en a y $\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x-a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$
- d) $g(x) \neq 0$ cerca de a ; g es continua en a ;

$$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x-a} = \left[g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right] \cdot \frac{1}{g(x)g(a)}$$

□

Ejemplos. (1) Teniendo en cuenta la fórmula ciclotómica, se prueba que fijado $n \in \mathbb{N}$, la función x^n es derivable en todos los puntos y su derivada en un punto x vale nx^{n-1} .

(2) Dados $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, la función

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$$

es derivable en todos los puntos, y su derivada en un punto x vale

$$P'(x) = c_n n x^{n-1} + c_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + c_1.$$

Teorema 5.1.5 (derivación de funciones compuestas: la regla de la cadena). Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(D) \subseteq E$ y supongamos que f es derivable en un punto a y que g es derivable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en a y su derivada en este punto viene dada por la **regla de la cadena**:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

Demostración. Definamos $h(y) = \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}$, si $y \in E \setminus \{f(a)\}$. Entonces, $\lim_{y \rightarrow f(a)} h(y) = g'(f(a))$. Definamos $h(f(a)) = g'(f(a))$, con lo cual tenemos $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el punto $f(a)$. Además,

$$[y - f(a)]h(y) = g(y) - g(f(a)) \quad \forall y \in E$$

En efecto: si $y \neq f(a)$, es cierto por la definición de h ; si $y = f(a)$ se trata de la igualdad $0 = 0$. En particular, para cada $x \in D$ se tiene $f(x) \in E$, luego

$$[f(x) - f(a)]h(f(x)) = g(f(x)) - g(f(a)).$$

De aquí,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (h \circ f)(x) = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}, \quad \forall x \in D \setminus \{a\}.$$

Pero

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$
- $\lim_{x \rightarrow a} (h \circ f)(x) = (h \circ f)(a),$ ya que f es continua en a (por ser derivable) y h lo es en $f(a).$

Por consiguiente,

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = f'(a)h(f(a)) = f'(a)g'(f(a)) \in \mathbb{R}. \quad \square$$

5.1.5. Derivabilidad de la función inversa

Proposición 5.1.6 (condición necesaria para la derivabilidad de la función inversa). Si f es una función inyectiva, derivable en un punto c , y su función inversa f^{-1} es asimismo derivable en $b = f(c)$, necesariamente se tiene $f'(c) \neq 0$. Además

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Demostración. Aplicando la regla de la cadena a $f^{-1} \circ f = \text{id}$, como la derivada de la identidad en todos los puntos vale 1, queda

$$(f^{-1})'(b) f'(c) = 1. \quad \square$$

Aplicación. La función arcosen no es derivable en 1 y -1 .

Sin hipótesis adicionales, que la derivada no se anule no implica la derivabilidad de la inversa. Un recíproco parcial, suficiente en la práctica, es el siguiente:

Teorema 5.1.7 (condición suficiente para la derivabilidad de la función inversa). Sea f una función continua e inyectiva en un intervalo I y sea $J = f(I)$. Si f es derivable en $c \in I$ y $f'(c) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $b = f(c)$ con derivada

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Demostración. Señalemos primero que J es un intervalo abierto, puesto que f ha de ser estrictamente monótona. Además, sabemos que f^{-1} es continua en b (aplicar el teorema de continuidad de la función inversa). Para mayor comodidad, pondremos $g = f^{-1}$. Con esta notación, $g(b) = c$.

Definamos $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ haciendo, para cada $x \in I$,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{si } x \neq c \\ f'(c) & \text{si } x = c \end{cases}$$

Evidentemente, h es continua en c .

Tomando ahora $y \in J$ distinto de b , sea $x = g(y) \in I$, por lo que $y = f(x)$ y $x \neq c$, lo que permite escribir

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{h(g(y))}.$$

En resumen, para todo $y \in J$ distinto de b ,

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{h(g(y))}.$$

Pero g es continua en b y h es continua en $c = g(b)$, luego $h \circ g$ es continua en b , de donde podemos concluir que existe

$$g'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{1}{h(g(b))} = \frac{1}{h(c)} = \frac{1}{f'(c)}. \quad \square$$

Nota. Repasando la demostración, se observa que los mismos argumentos prueban en realidad lo siguiente: dada una función inyectiva $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si f es derivable en un punto $c \in D'$ con $f'(c) \neq 0$, $b := f(c) \in [f(D)]'$ y f^{-1} es continua en b , entonces f^{-1} es derivable en $b = f(c)$ con derivada

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(c)}.$$

No obstante, el enunciado previo es más directo de utilizar en muchas aplicaciones prácticas.

Ejemplos. (1) La función arc sen es derivable en $(-1, 1)$.

(2) Sean $f(x) = e^x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y $g(x) = \log x$, $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- si sabemos que f es derivable para cada $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) = f(x)$, entonces deducimos que g es derivable para cada $x \in (0, +\infty)$ y $g'(x) = 1/x$;
- si sabemos que g es derivable para cada $x \in (0, +\infty)$ y $g'(x) = 1/x$, entonces deducimos que f es derivable para cada $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) = f(x)$.

5.2. El teorema del valor medio

5.2.1. Extremos relativos y derivada nula

Definición 5.2.1. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in D$. Diremos que f tiene un **máximo relativo** en c si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $|x - c| < \delta$ es $f(x) \leq f(c)$ (también se dice que f tiene un máximo local en c).

Diremos que f tiene un **máximo relativo estricto** en c si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $0 < |x - c| < \delta$ es $f(x) < f(c)$ (también se dice que f tiene un máximo local estricto en c).

Diremos que f tiene un **mínimo relativo** en c si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $|x - c| < \delta$ es $f(x) \geq f(c)$ (también se dice que f tiene un mínimo local en c).

Diremos que f tiene un **mínimo relativo estricto** en c si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $0 < |x - c| < \delta$ es $f(x) > f(c)$ (también se dice que f tiene un mínimo local estricto en c).

Que f tiene un **extremo relativo** en c significa que tiene un máximo relativo o un mínimo relativo.

Definición 5.2.2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Diremos que c es un **punto interior** de S si para algún $\delta > 0$ se verifica que $(c - \delta, c + \delta) \subseteq S$.

Ejemplo. Si S es un intervalo, los extremos no son puntos interiores, mientras que los demás puntos sí son interiores a S .

Proposición 5.2.3. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y c un punto interior de D . Si f es derivable en c y tiene en c un extremo relativo, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración. Supongamos que f tiene en c un máximo relativo (si tiene un mínimo relativo solo hay que cambiar de sentido algunas desigualdades o pasar a la función opuesta). Como c es un punto interior de D y f es derivable en c , se deduce que existen las dos derivadas laterales de f en c . Además,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Pero según las hipótesis existen un $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)$ siempre que $x \in D$ y $|x - c| < \delta_1$, y un $\delta_2 > 0$ tal que $(c - \delta_2, c + \delta_2) \subseteq D$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, encontramos que

- si $x \in (c - \delta, c)$, entonces $x \in D$ y $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$,
- si $x \in (c, c + \delta)$, entonces $x \in D$ y $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$,

de donde se deduce que

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

y finalmente que $f'(c) = 0$. □

Nota. En la demostración anterior solo se utiliza realmente que c es un punto interior para poder asegurar que tienen sentido las dos derivadas laterales, de modo que esta condición puede sustituirse por la (más complicada de enunciar) de que c sea punto de acumulación de los conjuntos $D \cap [c, +\infty)$ y $D \cap (-\infty, c]$.

Cuando no se impone ninguna condición de este tipo a c , el resultado es falso. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ definida en el intervalo $[0, 1]$ tiene extremos en los puntos 0 y 1, y f es derivable en los dos puntos, pero su derivada no es 0, sino 1 en ambos.

Definición 5.2.4. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y c un punto de $D \cap D'$. Diremos que c es un **punto crítico** de f si f es derivable en c y $f'(c) = 0$.

Corolario 5.2.5. Supongamos que $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en un punto c . Entonces, o bien c es un punto crítico de f , o bien c no es un punto interior de D , o bien f no es derivable en c .

Ejemplos. Examínese lo que ocurre en los extremos relativos de las siguientes funciones:

- a) $x \in [-1, 1] \rightarrow x \in \mathbb{R}$;
- b) $x \in [-1, 1] \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$;
- c) $x \in [-1, 1] \rightarrow x^3 \in \mathbb{R}$;
- d) $x \in [-1, 1] \rightarrow |x| \in \mathbb{R}$;
- e) $x \in \mathbb{R} \rightarrow [x] \in \mathbb{R}$.

5.2.2. Teoremas de Rolle y del valor medio (o de los incrementos finitos)

Teorema 5.2.6 (de Rolle). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) una función continua en $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) y supongamos que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Demostración. Puesto que f es continua en $[a, b]$, tiene máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass.

Si ambos extremos absolutos están en a y b , entonces f tiene que ser constante, ya que $f(a) = f(b)$. Y f' se anula en todos los puntos de (a, b) .

En caso contrario, f tiene algún extremo absoluto (que también es relativo) en un punto interior $x \in (a, b)$. Y es derivable en x , así que sabemos que $f'(x) = 0$. □

Geoméricamente, que la función valga lo mismo en dos puntos obliga a que haya tangente horizontal en algún punto intermedio de la gráfica.

Nota. Una vez más, si el dominio de f no es un intervalo el resultado no es cierto. Basta considerar funciones definidas en un intervalo menos un punto para encontrar derivada distinta de cero en todo el dominio aunque tengamos el mismo valor en los ‘extremos’; por ejemplo, la función valor absoluto en $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

Teorema 5.2.7 (del valor medio o de los incrementos finitos). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) una función continua en $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) . Entonces existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a).$$

Demostración. Basta definir en el intervalo $[a, b]$ la función $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, que cumple las hipótesis del teorema 5.2.6 de Rolle. Por lo tanto, existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $g'(x) = 0$, es decir, $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. \square

Dicho de otra manera, la variación media de f en el intervalo coincide con la variación instantánea en algún punto del intervalo. Por ejemplo, si un vehículo ha recorrido 180 km en 2 horas, en algún instante ha marchado exactamente a 90 km/h.

Geoméricamente, la pendiente de la cuerda que une los extremos de la gráfica coincide con la pendiente de la tangente en algún punto.

5.3. Aplicaciones del teorema del valor medio

5.3.1. Funciones con derivada acotada y con derivada nula

Corolario 5.3.1. *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en todos los puntos interiores del intervalo. Si la derivada está acotada, entonces f es uniformemente continua en I .*

Demostración. Hay alguna constante $K > 0$ tal que $|f'(x)| \leq K$ en todo punto x interior a I . Sean dos puntos cualesquiera $a, b \in I$ (por ejemplo, con $a < b$); como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , será

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$$

para algún $x \in (a, b)$, y por lo tanto

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|.$$

Las funciones que satisfacen una desigualdad como esta se llaman *funciones de Lipschitz*. Y cualquier función de Lipschitz es uniformemente continua, ya que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon/K$ y resulta que

$$a, b \in I, |b - a| < \delta \implies |f(b) - f(a)| < \varepsilon. \quad \square$$

Corolario 5.3.2. *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en todos los puntos interiores del intervalo. Si $f'(x) = 0$ en cada x interior a I , entonces f es constante en I .*

Demostración. La función f toma el mismo valor en todos los puntos de I , pues dados dos puntos cualesquiera $a, b \in I$ (por ejemplo, con $a < b$) como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , será

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$$

para algún $x \in (a, b)$, por el teorema 5.2.7 del valor medio. Por lo tanto,

$$f(b) - f(a) = 0. \quad \square$$

Corolario 5.3.3. Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I y derivables en todos los puntos interiores del intervalo. Si $f'(x) = g'(x)$ en cada x interior a I , entonces hay una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$ en todo punto de I .

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior a la función $f - g$. □

Nota. Estas conclusiones no son aplicables a funciones cuyos dominios no son intervalos.

5.3.2. Signo de la derivada y monotonía

Corolario 5.3.4. Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en todos los puntos interiores del intervalo. Se tiene:

- a) si $f'(x) > 0$ en todo punto interior de I , entonces f es estrictamente creciente en I .
- b) si $f'(x) < 0$ en todo punto interior de I , entonces f es estrictamente decreciente en I .
- c) $f'(x) \geq 0$ en todo punto interior de $I \iff f$ es monótona no decreciente en I .
- d) $f'(x) \leq 0$ en todo punto interior de $I \iff f$ es monótona no creciente en I .

Demostración. a) Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Como f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , será

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$$

para algún $x \in (a, b)$, por el teorema 5.2.7 del valor medio. Dado que x es interior a I , $f'(x) > 0$ por hipótesis, y se sigue

$$f(b) - f(a) > 0,$$

o sea, $f(a) < f(b)$, que es lo que necesitábamos probar.

La demostración de b) es similar, así como las implicaciones \implies de c) y d). Falta demostrar las implicaciones \impliedby de c) y d). Supongamos, por ejemplo, que f es monótona no decreciente en el intervalo I . Si x es un punto interior de I , entonces existen $y \in I$ tales que $x < y$; para estos, se tiene

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0,$$

ya que f es no decreciente. Luego

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Esto demuestra la implicación \impliedby de c). La otra es análoga. □

Nota. Sin embargo, los recíprocos de a) y b) no son ciertos. Si la función f es estrictamente creciente en I , su derivada puede que se anule en algunos puntos (eso sí, según el apartado c), $f'(x) \geq 0$ para todos los x).

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es derivable en todos los puntos y estrictamente creciente, pero hay algún punto donde su derivada se anula.

Aplicaciones. (1) Estudio de extremos absolutos y relativos.

(2) Obtención de desigualdades.

5.3.3. Propiedad del valor intermedio para derivadas

Si una función es la derivada de otra en un intervalo, puede que no sea continua (ver por ejemplo [Ross, Ejercicio 28.4, pág. 160]). Pero en el siguiente resultado se prueba que, lo mismo que las funciones continuas, tiene la propiedad de los valores intermedios.

Teorema 5.3.5 (del valor intermedio para derivadas). *Sea f una función derivable en un intervalo I . Si la derivada f' toma dos valores, toma también todos los valores intermedios; es decir, si $a, b \in I$, $a < b$, y λ está entre $f'(a)$ y $f'(b)$, existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = \lambda$.*

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $f'(a) < \lambda < f'(b)$; si fuera $f'(a) > \lambda > f'(b)$ se procedería de manera análoga.

Definamos la función $g(x) = f(x) - \lambda x$, para $x \in [a, b]$. Es una función derivable en $[a, b]$, porque lo es f . Además, $g'(x) = f'(x) - \lambda$ para cada $x \in [a, b]$. En particular, g es continua en $[a, b]$, así que tiene mínimo absoluto (por el teorema de Weierstrass). Ahora bien,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) = f'(a) - \lambda < 0,$$

luego existe $x \in (a, b]$ tal que $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$ y, por lo tanto, $g(x) < g(a)$. Esto significa que el mínimo absoluto de g no está en a . Análogamente,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = g'(b) = f'(b) - \lambda > 0,$$

de donde se deduce que existe $x \in [a, b)$ tal que $\frac{g(x) - g(b)}{x - b} > 0$; como $x - b < 0$, resulta que $g(x) < g(b)$. Esto significa que el mínimo absoluto de g tampoco está en b .

Por lo tanto, el mínimo absoluto de g está en algún punto $x \in (a, b)$. Y como es un extremo relativo de g en el interior del intervalo y g es derivable, se tendrá $g'(x) = 0$, por la proposición 5.2.3. Es decir, $f'(x) = \lambda$. \square

Notas. (1) Este resultado indica que, dada una función arbitraria g , puede que no exista ninguna función derivable cuya derivada sea g (es decir, una *función primitiva* de g). Basta con que g no cumpla la propiedad de los valores intermedios. Por ejemplo, la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

no es la derivada de ninguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(2) Cuando hayamos definido la integral, probaremos que cualquier función continua en un intervalo tiene primitiva.

Corolario 5.3.6. *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en todos los puntos interiores del intervalo. Si la derivada f' no se anula en ninguno de esos puntos, entonces la función f es estrictamente monótona en I (o bien estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente).*

Demostración. Existen las siguientes posibilidades:

- $f'(x) > 0$ en todos los puntos x interiores a I . En tal caso f es estrictamente creciente.
- $f'(x) < 0$ en todos los puntos x interiores a I . En tal caso f es estrictamente decreciente.
- Hay puntos x_1, x_2 , interiores a I , tales que $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$. Pero esto no puede suceder, porque el teorema del valor intermedio para derivadas obligaría entonces a que la derivada se anulase en algún punto entre x_1 y x_2 .

\square

5.3.4. Teorema del valor medio generalizado. Regla de L'Hospital

Teorema 5.3.7 (del valor medio generalizado). Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) y derivables en el intervalo abierto (a, b) . Existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que

$$f'(x)[g(b) - g(a)] = g'(x)[f(b) - f(a)].$$

Demostración. Basta definir en el intervalo $[a, b]$ la función $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$, que cumple las hipótesis del teorema 5.2.6 de Rolle. Luego existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = 0$, es decir, $f'(x)[g(b) - g(a)] = g'(x)[f(b) - f(a)]$. \square

Proposición 5.3.8 (regla de L'Hospital). Sean I un intervalo, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de I . Denotemos mediante s uno de los símbolos a, a^+, a^- . Supongamos que:

a) f y g son derivables en $I \setminus \{a\}$ y $g'(x) \neq 0$ en cada $x \in I \setminus \{a\}$.

b) se verifica alguna de las tres condiciones siguientes:

- $\lim_{x \rightarrow s} f(x) = \lim_{x \rightarrow s} g(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow s} g(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow s} g(x) = -\infty$.

c) existe

$$\lim_{x \rightarrow s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Entonces, existe el límite de $f(x)/g(x)$ y es igual a L :

$$\lim_{x \rightarrow s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow s} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Demostración. Para empezar, veamos que basta considerar el caso $a = 0$ y $s = 0^+$. En efecto, una vez demostrado este caso se deducen los demás:

- Si $a \neq 0$ y $s = a^+$, hacemos el cambio $y = x - a$, aplicamos la regla en el caso conocido y deshacemos el cambio:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y+a)}{g(y+a)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(y+a)}{g'(y+a)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Si $a \in \mathbb{R}$ y $s = a^-$, hacemos el cambio $y = -x$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ y $s = a$, hacemos los dos límites laterales.
- Si $a = \pm\infty$, hacemos el cambio $y = 1/x$; por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{y^2} f'(1/y)}{-\frac{1}{y^2} g'(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Así que a partir de ahora, suponemos que $a = 0$ y $s = 0^+$.

Aparte de esto, el caso $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ se deduce del caso $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ tomando la función $G(x) = -g(x)$ en lugar de g , y el caso $L = -\infty$ del caso $L = +\infty$, tomando la función $F(x) = -f(x)$ en lugar de f .

En resumen, solo necesitamos considerar los siguientes casos:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty.$$

a) Supongamos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$. Definamos las siguientes funciones:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0, x \in I \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > 0, x \in I \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Las dos funciones F y G son continuas en 0 por la derecha y derivables en $I \setminus \{0\}$. Además, del teorema de Rolle 5.2.6 se deduce que para cada $x > 0$ tiene que ser $G(x) \neq G(0)$, ya que de lo contrario se tendría $0 = G'(c) = g'(c)$ para algún c .

Por el teorema 5.3.7 del valor medio generalizado, para cada $x > 0$, $x \in I$, existe algún c tal que $0 < c < x$ y

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(0)}{G(x) - G(0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ahora sea $(x_n) \subseteq I$ una sucesión cualquiera tal que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \rightarrow 0$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos un c_n que cumpla la fórmula anterior, entonces $c_n \rightarrow 0^+$ y

$$\lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_n \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L.$$

Por la caracterización de límites mediante sucesiones, deducimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

b) Supongamos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ y que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$.

Dado que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, $x > 0$, deducimos del teorema de Rolle 5.2.6 que g es inyectiva en $I \cap (0, +\infty)$.

Para cada par de puntos distintos $x, y \in I$ positivos, podemos escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Por el teorema 5.3.7 del valor medio generalizado,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{1}{g(x)} \left[-\frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot g(y) + f(y) \right] \end{aligned}$$

para algún c comprendido entre x e y . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| &= \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L + \frac{1}{g(x)} \left[-\frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot g(y) + f(y) \right] \right| \\ &\leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| + \frac{1}{|g(x)|} \left[\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \cdot |g(y)| + |f(y)| \right] \\ &\leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| + \frac{1}{|g(x)|} \left[\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| \cdot |g(y)| + |L| \cdot |g(y)| + |f(y)| \right]. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe algún $r > 0$ tal que

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si } 0 < c < r.$$

Fijemos $y = r$. Ahora existe algún $\delta > 0$, con $\delta < r$, tal que

$$g(x) > \frac{2}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{\varepsilon}{2} |g(r)| + |L| \cdot |g(r)| + |f(r)| \right], \quad \text{si } 0 < x < \delta.$$

Entonces, para cada x con $0 < x < \delta$ se tiene (teniendo en cuenta que $0 < x < c < y = r$)

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| + \frac{1}{|g(x)|} \left[\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| \cdot |g(r)| + |L| \cdot |g(r)| + |f(r)| \right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

c) Supongamos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ y que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Volvemos a la expresión

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right) + \frac{f(y)}{g(x)},$$

donde c está comprendido entre x e y . Dado $M > 0$, existe algún número $r > 0$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} > 2(M + 1), \quad \text{si } 0 < c < r.$$

Fijamos $y = r$ y ahora existe algún $\delta_1 > 0$ tal que

$$1 - \frac{g(r)}{g(x)} > \frac{1}{2}, \quad \text{si } 0 < x < \delta_1$$

y también algún $\delta_2 > 0$ tal que

$$\frac{f(r)}{g(x)} > -1, \quad \text{si } 0 < x < \delta_2.$$

Elegimos $\delta = \min\{r, \delta_1, \delta_2\}$. Para cada x con $0 < x < \delta$, teniendo en cuenta también que $0 < x < c < y = r$, resulta que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left(1 - \frac{g(r)}{g(x)} \right) + \frac{f(r)}{g(x)} > 2(M + 1) \cdot \frac{1}{2} - 1 = M.$$

Esto prueba que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty. \quad \square$$

Corolario 5.3.9. Sea I un intervalo, $a \in I$, f una función definida en I . Supongamos que:

- a) f es continua en a ;
- b) para algún $r > 0$, f es derivable en $\{x \in I : 0 < |x - a| < r\}$;
- c) existe $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = c$.

Entonces f es también derivable en a y $f'(a) = c$.

Demostración. Basta aplicar la regla de L'Hospital 5.3.8 a las funciones F y G dadas por $F(x) = f(x) - f(a)$, $G(x) = x - a$. □

5.4. Aproximación polinómica local

5.4.1. Desarrollos polinómicos. Teorema de Taylor-Young

Definición 5.4.1 (derivadas de orden superior). Sea f una función derivable en un conjunto D . Dado $c \in D \cap D'$, si la función derivada f' es derivable en c diremos que f es **dos veces derivable** en c , y a la derivada de f' en c , que denotaremos por $f''(c)$, la llamaremos **derivada segunda** de f en c .

Diremos que f es dos veces derivable en un conjunto D si f es dos veces derivable en cada punto de D . Si esto sucede, la función f'' definida en D asociando a cada $x \in D$ el valor $f''(x)$ se denomina **función derivada segunda** de f en D .

Reiterando, se define para cada $n \in \mathbb{N}$ el concepto de **función n veces derivable** en un punto, en un conjunto, la **derivada** de orden n en un punto, que se escribe $f^{(n)}(c)$, y la **función derivada** de orden n .

Ejercicio (derivadas sucesivas de un producto: regla de Leibniz). Sea I un intervalo, c un punto de I , f y g funciones definidas en I . Dado $n \in \mathbb{N}$, si f y g son funciones derivables hasta el orden n en el punto c , entonces el producto fg es derivable hasta el orden n en el punto c , y se tiene

$$(fg)^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(c) g^{(n-k)}(c).$$

Teorema 5.4.2 (de Taylor-Young). Sea I un intervalo, c un punto de I , f una función definida en I . Supongamos que f es derivable en todos los puntos hasta el orden $n-1$ ($n \geq 1$) y que existe $f^{(n)}(c)$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x-c)^n} \left[f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right] = 0.$$

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre n . Fijados I y $c \in I$, sea \mathcal{P}_n la propiedad: “dada una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en todos los puntos hasta el orden $n-1$ y tal que existe $f^{(n)}(c)$, se verifica

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x-c)^n} \left[f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right] = 0”.$$

La propiedad \mathcal{P}_1 es cierta, puesto que tenemos entonces una función f derivable en c y, por la definición de derivada en un punto, será

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x-c)} [f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)] = \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{(x-c)} - f'(c) \right] = 0.$$

Veamos ahora que si es cierta \mathcal{P}_n , también lo es \mathcal{P}_{n+1} . Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en todos los puntos hasta el orden n y tal que existe $f^{(n+1)}(c)$. Su función derivada $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en todos los puntos hasta el orden $n-1$ para la que existe la derivada de orden n en c . Aplicando la hipótesis de inducción a f' ,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x-c)^n} \left[f'(x) - f'(c) - f''(c)(x-c) - \frac{f'''(c)}{2}(x-c)^2 - \dots - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \right] = 0.$$

Definamos $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

La función F es derivable en cada $x \in I$ con derivada

$$F'(x) = f'(x) - f'(c) - f''(c)(x-c) - \frac{f'''(c)}{2}(x-c)^2 - \dots - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n;$$

teniendo en cuenta la regla de L'Hospital 5.3.8 se deduce que existe

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x-c)^{n+1}} \left[f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 - \dots - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right] \\ = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x)}{(x-c)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F'(x)}{(n+1)(x-c)^n} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Podemos expresar el teorema de Taylor-Young de otras formas, introduciendo algunos conceptos nuevos.

Definición 5.4.3. Dada una función f derivable n veces en un punto c , se llama **polinomio de Taylor en c de orden n** al polinomio

$$P_{n,c,f}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

(nótese que se trata de un polinomio de grado menor o igual que n).

Entonces, la fórmula del teorema de Taylor-Young se puede escribir así:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - P_{n,c,f}(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

Si definimos

$$u(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - P_{n,c,f}(x)}{(x-c)^n}, & \text{si } x \neq c \\ 0, & \text{si } x = c \end{cases}$$

entonces la fórmula del teorema de Taylor-Young es:

$$f(x) = P_{n,c,f}(x) + (x-c)^n u(x),$$

con una función u continua en c y $u(c) = 0$. También se suele usar la notación “o pequeña” de Landau:

Definición 5.4.4. Si f y g son dos funciones, se dice que $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow c$ si

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

También se escribe $f(x) = h(x) + o(g(x))$ si $f(x) - h(x) = o(g(x))$, es decir, si

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - h(x)}{g(x)} = 0.$$

Con esto, la fórmula del teorema de Taylor-Young es

$$f(x) = P_{n,c,f}(x) + o((x-c)^n), \quad x \rightarrow c.$$

Es interesante saber que para una función dada solo puede haber un polinomio **de grado menor o igual que n** que cumpla esa condición, como pasamos a demostrar.

Proposición 5.4.5 (unicidad de la aproximación polinómica). Sea I un intervalo, $c \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existen polinomios P y Q de grado menor o igual que n tales que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - P(x)}{(x - c)^n} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - Q(x)}{(x - c)^n} = 0$$

Entonces $P = Q$.

Demostración. Como $P - Q$ es un polinomio de grado menor o igual que n , se tendrá que

$$P(x) - Q(x) = b_0 + b_1(x - c) + \dots + b_n(x - c)^n$$

para ciertos coeficientes b_0, b_1, \dots, b_n . Y como

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x) - Q(x)}{(x - c)^n} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{[f(x) - Q(x)] - [f(x) - P(x)]}{(x - c)^n} = 0,$$

resulta en primer lugar que

$$b_0 = \lim_{x \rightarrow c} [P(x) - Q(x)] = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x) - Q(x)}{(x - c)^n} \cdot (x - c)^n = 0.$$

Luego realmente

$$P(x) - Q(x) = b_1(x - c) + \dots + b_n(x - c)^n.$$

Pero entonces

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x) - Q(x)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x) - Q(x)}{(x - c)^n} \cdot (x - c)^{n-1} = 0,$$

y reiterando el proceso,

$$b_2 = \dots = b_n = 0,$$

es decir, $P = Q$. □

Este resultado permite denominar a P *el desarrollo polinómico* de f de orden n en el punto c (se usa también el nombre de *desarrollo limitado*). No toda función admite un desarrollo polinómico; el teorema de Taylor-Young da una condición *suficiente*, aunque *no necesaria*, para su existencia.

Ejemplos. (1) La función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no tiene derivada segunda en el origen, pero es fácil comprobar que

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

cuando $x \rightarrow 0$.

(2) La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable en el origen, y por tanto admite un desarrollo polinómico en el origen de orden 1. Sin embargo, no admite desarrollos polinómicos de orden superior a 1.

Observación. En algunas ocasiones, podemos calcular derivadas n -ésimas en un punto a partir del teorema de Taylor-Young y de la unicidad del desarrollo. Por ejemplo, sea $f(x) = 1/(1-x)$. Como

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \frac{x^7}{1-x}$$

y $\frac{x^7}{1-x}$ es una $o(x^6)$ cuando $x \rightarrow 0$, se deduce que

$$P_{6,0,f}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Es decir,

$$f(0) = f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 3!, \quad f^{(4)}(0) = 4!, \quad f^{(5)}(0) = 5!, \quad f^{(6)}(0) = 6!.$$

Si conocemos el desarrollo polinómico de la derivada de una función podemos obtener fácilmente un desarrollo polinómico para la función misma. Concretamente:

Proposición 5.4.6. *Sea I un intervalo, $c \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f es continua en I y derivable en $I \setminus \{c\}$. Si*

$$f'(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n + o((x-c)^n), \quad x \rightarrow c,$$

entonces

$$f(x) = f(c) + a_0(x-c) + \frac{a_1}{2}(x-c)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} + o((x-c)^{n+1}), \quad x \rightarrow c.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la regla de L'Hospital 5.3.8:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - a_0(x-c) - \frac{a_1}{2}(x-c)^2 - \cdots - \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} \\ = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - a_0 - a_1(x-c) - \cdots - a_n(x-c)^n}{(n+1)(x-c)^n} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

5.4.2. Aplicación al cálculo de límites

Corolario 5.4.7. *Sea I un intervalo, c un punto de I , f una función definida en I . Supongamos que f es derivable en todos los puntos hasta el orden $n-1$ ($n \geq 1$) y que existe $f^{(n)}(c)$. Si $f^{(n)}(c) \neq 0$, entonces*

$$f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \sim \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad x \rightarrow c.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que para $x \rightarrow c$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}}{(f^{(n)}(c)/n!)(x-c)^n} - 1 \\ = \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n}{(f^{(n)}(c)/n!)(x-c)^n} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad \square$$

Nota. Las equivalencias que vimos para funciones elementales se obtienen como caso particular de este corolario, conociendo los valores de las derivadas de tales funciones. Además, podemos 'afinar' esas equivalencias, lo que resulta especialmente útil cuando hay que manejar sumas o diferencias de funciones conocidas.

Observación. Este resultado, junto con el teorema 5.4.2 de Taylor-Young, permite en muchos casos resolver con comodidad indeterminaciones del tipo “0/0” en el cálculo de límites. Disponemos así de procedimientos que en algunos casos sustituyen con ventaja a la aplicación repetida de la regla de L’Hospital 5.3.8.

Ejemplo. Calculemos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8}.$$

Para empezar, utilizando el teorema 5.4.2 de Taylor-Young, se deduce que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

cuando $x \rightarrow 0$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x - x = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),$$

cuando $x \rightarrow 0$. Elevando al cuadrado, es fácil comprobar que

$$(\operatorname{sen} x - x)^2 = \frac{1}{36}x^6 - \frac{1}{360}x^8 + o(x^8)$$

cuando $x \rightarrow 0$. Entonces,

$$\frac{(\operatorname{sen} x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8} = -\frac{1}{360} + \frac{o(x^8)}{x^8}$$

cuando $x \rightarrow 0$ y, finalmente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8} = -\frac{1}{360}.$$

5.4.3. Fórmula de Taylor con resto

Seguimos la exposición del [ORTEGA, pág. 119 y siguientes].

Teorema 5.4.8 (de Taylor). *Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I . Entonces, dados $a, x \in I$, se cumple*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x, a)$$

donde $R_n(x, a)$ (**resto de Taylor o término complementario**) es una función que depende de x y de a y que puede expresarse de las siguientes formas:

a) **Término complementario de Lagrange:**

Existe un punto s interior al intervalo de extremos a y x [equivalentemente: existe un $s = \lambda a + (1-\lambda)x$ con $\lambda \in (0, 1)$] tal que

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

b) **Término complementario de Cauchy:**

Existe un punto c interior al intervalo de extremos a y x [equivalentemente: existe un $c = \lambda a + (1-\lambda)x$ con $\lambda \in (0, 1)$] tal que

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-a)(x-c)^n.$$

Demostración. Está claro que

$$R_n(x, a) = f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right].$$

Lo que hay que probar es que $R_n(x, a)$ puede escribirse de las formas anteriores (fórmulas de Lagrange y de Cauchy, respectivamente).

Definamos $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$h(t) = f(t) + (x-t)f'(t) + (x-t)^2 \frac{f''(t)}{2} + \cdots + (x-t)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} + (x-t)^n \frac{f^{(n)}(t)}{n!}$$

(obsérvese que la variable es t , y que x es una constante). Según las hipótesis, h es derivable en I . Además, para cada $t \in I$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t) + [-f'(t) + (x-t)f''(t)] + \left[-(x-t)f''(t) + (x-t)^2 \frac{f'''(t)}{2} \right] + \cdots \\ &+ \left[-(x-t)^{n-2} \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!} + (x-t)^{n-1} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} \right] + \left[-(x-t)^{n-1} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} + (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \right] \\ &= (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}. \end{aligned}$$

Demostremos ahora las fórmulas de Lagrange y de Cauchy, empezando por esta última.

(b) Por el teorema 5.2.7 del valor medio, existe algún c comprendido entre x y a tal que $h(x) = h(a) + h'(c)(x-a)$, es decir,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + \cdots + (x-a)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \\ &+ (x-c)^n \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-a). \end{aligned}$$

Esto demuestra la fórmula de Cauchy para el resto $R_n(x, a)$.

(a) Ahora consideremos la función $g(t) = (x-t)^{n+1}$. Por el teorema 5.3.7 del valor medio generalizado, existe algún s comprendido entre x y a tal que

$$\frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{h'(s)}{g'(s)} = -\frac{(x-s)^n f^{(n+1)}(s)}{n!(n+1)(x-s)^n} = -\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!},$$

es decir,

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) = h(a) - \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} [g(x) - g(a)] \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + \cdots + (x-a)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Esto demuestra la fórmula de Lagrange para el resto $R_n(x, a)$. □

El resto de Taylor es el error cometido al sustituir la función por su polinomio de Taylor. El teorema anterior proporciona expresiones explícitas del resto, muy útiles en la práctica para controlar ese error. Nótese que los resultados obtenidos pueden reescribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-a)(x-c)^n \end{aligned}$$

para s, c adecuados.

La fórmula de Taylor-Young nos daba también una expresión del resto de Taylor, aunque menos informativa sobre su ‘tamaño’: tan solo da idea de su comportamiento en el límite (aunque con menos exigencias sobre la función).

- Aplicaciones.** (1) Cálculos aproximados [ORTEGA, pág. 123].
 (2) Demostración de algunas desigualdades [ORTEGA, págs. 124–125].
 (3) e es irracional.

Nota. La fórmula y el polinomio de Taylor se llaman de Taylor-Maclaurin en el caso particular $a = 0$.

ALGUNOS POLINOMIOS DE TAYLOR-MACLAURIN

FUNCIÓN	POLINOMIO DE TAYLOR-MACLAURIN	RESTO
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$	$\frac{1}{(1-t)^{n+2}} x^{n+1}$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$	$\frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}$
$\log(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$	$\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+t)^{n+1}}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n$	$\binom{\alpha}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+t)^{n+1-\alpha}}$
$\text{sen } x$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$\frac{(-1)^{n+1} \cos t}{(2n+3)!} x^{2n+3}$
$\text{cos } x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$\frac{(-1)^{n+1} \cos t}{(2n+2)!} x^{2n+2}$
$\text{tg } x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7$	$o(x^8)$
$\text{sec } x$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6$	$o(x^7)$
$\text{arc sen } x$	$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$o(x^{2n+2})$
$\text{arc tg } x$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$	$o(x^{2n+2})$
$\text{senh } x$	$x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$\frac{\cosh t}{(2n+3)!} x^{2n+3}$
$\text{cosh } x$	$1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$	$\frac{\cosh t}{(2n+2)!} x^{2n+2}$
$\text{tgh } x$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7$	$o(x^8)$
$\text{arg senh } x$	$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$o(x^{2n+2})$
$\text{arg tgh } x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$	$o(x^{2n+2})$

5.4.4. Extremos relativos

Recordemos que, por definición, una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tiene en un punto $a \in D$ un máximo relativo si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $|x - a| < \delta$ es $f(a) \geq f(x)$. Se dice que el máximo relativo es estricto si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$ es $f(a) > f(x)$. Análogamente, f tiene un mínimo relativo en a si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $|x - a| < \delta$ es $f(a) \leq f(x)$. Y es un mínimo relativo estricto si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$ es $f(a) < f(x)$. Se dice que f tiene un extremo relativo en a si tiene en a un máximo relativo o un mínimo relativo.

Habíamos visto el siguiente resultado:

Proposición 5.4.9. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y c un punto interior de D . Supongamos que f es derivable en c . Entonces, si f tiene en c un extremo relativo, necesariamente $f'(c) = 0$.*

Tenemos así una condición necesaria para la existencia de extremos relativos que, según sabemos, no es condición suficiente. Usando el teorema de Taylor-Young se puede dar una condición suficiente mediante las derivadas de orden superior.

Teorema 5.4.10 (condiciones para la existencia de extremos relativos). *Sea f una función derivable $n - 1$ veces ($n > 1$) en un intervalo abierto I ; sea $a \in I$ tal que existe $f^{(n)}(a)$ y además*

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces:

- a) n par, $f^{(n)}(a) > 0 \implies f$ tiene en a un mínimo relativo estricto;
- b) n par, $f^{(n)}(a) < 0 \implies f$ tiene en a un máximo relativo estricto;
- c) n impar $\implies f$ no tiene un extremo relativo en a .

Demostración. Observemos que podemos aplicar el corolario 5.4.7 y, por lo tanto,

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \sim \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \rightarrow a.$$

Como

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

quedará

$$f(x) - f(a) \sim \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \rightarrow a,$$

de donde

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Puesto que $f^{(n)}(a) \neq 0$ se sigue que, para algún $r > 0$, se cumplirá para todo $x \in I$ con $0 < |x - a| < r$ que

$$\text{signo} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \text{signo} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \text{signo} f^{(n)}(a).$$

Estudiemos ahora los distintos casos posibles.

- a) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, para los $x \in I$ con $0 < |x - a| < r$ es

$$\text{signo}(f(x) - f(a)) = \text{signo} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \text{signo} f^{(n)}(a).$$

ya que por ser n par, se tiene $(x-a)^n > 0$. Luego para todo $x \in I$ con $0 < |x - a| < r$ queda

$$f(x) > f(a)$$

y f tiene en a un mínimo relativo estricto.

- b) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, se procede de la misma manera y se llega a que f tiene en a un máximo relativo estricto.
- c) Si n es impar, entonces $(x - a)^n < 0$ si $x < a$; y $(x - a)^n > 0$ si $x > a$. Luego $f(x) - f(a)$ tiene un signo si $x \in I \cap (a - r, a)$ y el signo contrario si $x \in I \cap (a, a + r)$. Por lo tanto, f no tiene un extremo relativo en a .

□

5.4.5. Convexidad y concavidad

Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Recordemos que si a y b son dos puntos distintos de I , la recta (en \mathbb{R}^2) que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene la ecuación:

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o, de otra manera,

$$y(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Definición 5.4.11. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervalo. Se dice que f es **convexa** en I si para cualesquiera $a, b, c \in I$ tales que $a < c < b$ se tiene

$$f(c) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$$

(es decir, la gráfica de f está por debajo de todas las cuerdas) o, lo que es igual,

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(es decir, la pendiente de la cuerda crece al crecer una de las abscisas).

Se dice que f es **cóncava** en I si para cualesquiera $a, b, c \in I$ tales que $a < c < b$ se tiene

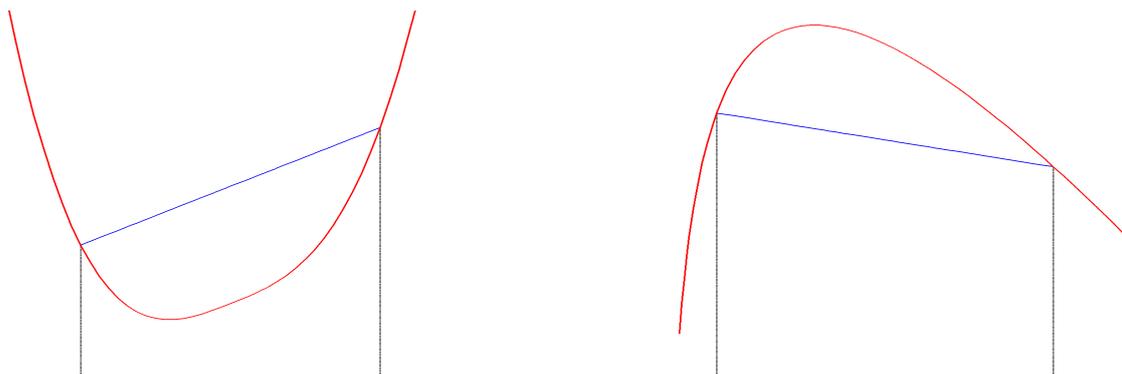
$$f(c) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$$

o, lo que es igual,

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observación. Que $c \in (a, b)$ equivale a que $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$, con $\lambda \in (0, 1)$. Es fácil ver entonces que

$$f(c) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) \iff f(c) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$



Función convexa y función cóncava

El siguiente resultado se deduce inmediatamente de las definiciones.

Proposición 5.4.12. *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervalo. La función f es cóncava en I si y solo si $-f$ es convexa en I .*

Teorema 5.4.13. *Sea f una función derivable en un intervalo I (derivable lateralmente en los extremos si estos pertenecen al intervalo). Son equivalentes:*

a) f es convexa en I ;

b) “la gráfica de f está por encima de sus tangentes”:

$$f(b) \geq f(a) + f'(a)(b - a) \quad \forall a, b \in I;$$

c) f' es no decreciente en I .

Demostración. (a) \implies (b): sean $a, b \in I$; supongamos que $a < b$. Entonces, $\forall x \in (a, b)$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

puesto que f es derivable en a , haciendo $x \rightarrow a^+$ se obtiene

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y como $b - a > 0$, resulta $f'(a)(b - a) + f(a) \leq f(b)$, como teníamos que demostrar.

Si, por el contrario, $b < a$, entonces se tiene para todo $x \in (b, a)$

$$f(x) \leq f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

de donde, haciendo $x \rightarrow a^-$,

$$f'(a) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

y como $b - a < 0$, resulta también en este caso $f'(a)(b - a) + f(a) \leq f(b)$.

(b) \implies (c): sean $a, b \in I$, $a < b$. Por hipótesis,

$$f'(a)(b - a) \leq f(b) - f(a)$$

y, cambiando los papeles de a y b ,

$$f(b) - f(a) \leq f'(b)(b - a);$$

luego $f'(a)(b - a) \leq f'(b)(b - a)$ y, por ser $b - a > 0$, $f'(a) \leq f'(b)$. Es decir, f' es no decreciente.

(c) \implies (a): sean $a, b, c \in I$, $a < c < b$. Por el teorema del valor medio,

$$\exists \alpha \in (a, c) \text{ tal que } f(c) - f(a) = f'(\alpha)(c - a);$$

$$\exists \beta \in (c, b) \text{ tal que } f(b) - f(c) = f'(\beta)(b - c).$$

Por hipótesis, $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, luego

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f'(\alpha)(c - a) + f'(\beta)(b - c) \\ &\geq f'(\alpha)(c - a) + f'(\alpha)(b - c) = f'(\alpha)(b - a) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a); \end{aligned}$$

como $b - a > 0$, se deduce que

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Y f es convexa. □

Corolario 5.4.14. Sea f derivable en un intervalo I (derivable lateralmente en los extremos si estos pertenecen al intervalo). Son equivalentes:

a) f es cóncava en I ;

b) “la gráfica de f está por debajo de sus tangentes”:

$$f(b) \leq f(a) + f'(a)(b - a) \quad \forall a, b \in I;$$

c) f' es no creciente en I .

Corolario 5.4.15. Sea f derivable dos veces en un intervalo I . Son equivalentes:

a) f es convexa en I ;

b) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Corolario 5.4.16. Sea f derivable dos veces en un intervalo I . Son equivalentes:

a) f es cóncava en I ;

b) $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

Definición 5.4.17. Sea f una función y sea $a \in \text{dom } f$. Se dice que f tiene en a un **punto de inflexión** si existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq \text{dom } f$ y o bien f es convexa en $(a - \delta, a]$ y cóncava en $[a, a + \delta)$, o bien es cóncava en $(a - \delta, a]$ y convexa en $[a, a + \delta)$.

Proposición 5.4.18. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto interior de D . Supongamos que f es derivable en un intervalo abierto $I \subseteq D$ tal que $a \in I$. Entonces, si f tiene un punto de inflexión en a y existe $f''(a)$, necesariamente $f''(a) = 0$.

Demostración. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que f es convexa en $(a - \delta, a]$ y cóncava en $[a, a + \delta)$ (si es al revés, se procede de manera análoga). A su vez, para algún $\rho > 0$ se tendrá $(a - \rho, a + \rho) \subseteq I$. Haciendo $r = \min\{\delta, \rho\}$, la función f es derivable en $(a - r, a + r) \subseteq I$, convexa en $(a - r, a]$ y cóncava en $[a, a + r)$.

En consecuencia la función f' es monótona no decreciente en $(a - r, a]$ y monótona no creciente en $[a, a + r)$, por lo que tiene en a un máximo local; como f' es derivable en a , su derivada se anula; es decir, $f''(a) = 0$. \square

Observación. Aun suponiendo que f sea derivable en a , que f tenga en a un punto de inflexión no tiene ninguna relación con el valor de $f'(a)$ y, en particular, no tiene por qué ser $f'(a) = 0$.

Proposición 5.4.19 (condición suficiente para la existencia de puntos de inflexión). Sea f una función derivable $n - 1$ veces ($n \geq 3$) en un intervalo abierto I ; sea $a \in I$ tal que existe $f^{(n)}(a)$ y además

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Si n es impar, entonces f tiene en a un punto de inflexión.

Demostración. Por el corolario 5.4.7(aplicado a la función f''),

$$f''(x) \sim \frac{(f'')^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} (x-a)^{n-2},$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{(x-a)^{n-2}} = \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!} \neq 0$$

y $f''(x)/(x-a)^{n-2}$ tiene signo constante en $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ para algún $\delta > 0$; por ser $n - 2$ impar, resulta que f'' tiene un signo en $(a - \delta, a)$ y el otro en $(a, a + \delta)$. Como $f''(a) = 0$, se deduce que o bien f es convexa en $(a - \delta, a]$ y cóncava en $[a, a + \delta)$ o al revés. Es decir, f tiene un punto de inflexión en a . \square

Corolario 5.4.20. Sea f una función derivable $n - 1$ veces ($n \geq 3$) en un intervalo abierto I ; sea $a \in I$ tal que existe $f^{(n)}(a)$ y además

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Si n es impar, entonces f tiene en a un punto de inflexión con tangente horizontal y no un extremo local.

Demostración. Ver el resultado anterior y el teorema 5.4.10. □

5.4.6. Representación gráfica de funciones

Si f es una función real de una variable real, su estudio y representación gráfica puede sistematizarse en los siguientes pasos (de los que han de llevarse a cabo tan solo los que resulten imprescindibles para responder a las cuestiones que se traten de resolver, y siempre de la manera más sencilla posible):

1) Generalidades.

- a) Determinación de su dominio.
- b) Simplificación del estudio: paridad [$f(-x) = f(x)$] o imparidad [$f(-x) = -f(x)$]; periodicidad [$f(x+p) = f(x)$]. Otras simetrías. Regiones planas sin puntos de la gráfica.
- c) Límites de la función en puntos del dominio; continuidad.
- d) Límites de la función en los puntos de acumulación del dominio que no pertenezcan a él. En particular, *asíntotas verticales*: si para algún punto a de acumulación del dominio de f se cumple $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* (lo mismo si el límite es $-\infty$ o si el límite es por la derecha).
- e) Comportamiento en el infinito: *asíntotas horizontales y oblicuas*.
 - Si el dominio de f no está acotado superiormente y para algún $b \in \mathbb{R}$ es $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, la recta $y = b$ es una *asíntota horizontal*.
 - Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, la recta $y = ax + b$ es una *asíntota oblicua*. En este caso,

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax].$$

Una asíntota horizontal es un caso particular de asíntota oblicua, con $a = 0$.

- Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, la recta $y = ax$ es una *dirección asíntótica* de la gráfica (aun cuando no exista asíntota). En este caso, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = +\infty$ se dice que la gráfica de f tiene una *rama parabólica* de dirección asíntótica $y = ax$.
 - Lo mismo para $x \rightarrow -\infty$ (si el dominio de f no está acotado inferiormente).
- f) Crecimiento y decrecimiento.

2) Estudio de la derivada.

- a) Derivabilidad de la función. Puntos con tangente vertical.
- b) Signo de la derivada: crecimiento y decrecimiento; extremos relativos y absolutos.
- c) Crecimiento y decrecimiento de la derivada: convexidad y concavidad; puntos de inflexión.
- d) Puntos críticos o singulares.

- 3) Estudio de la derivada segunda.
 - a) Existencia de la derivada segunda.
 - b) Signo de la derivada segunda: convexidad y concavidad; puntos de inflexión.
- 4) Otras consideraciones: valores particulares de la función o de sus derivadas; cortes con los ejes; cortes con las asíntotas.

Bibliografía

- [DURÁN] **Durán, A. J.:** *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Alianza, Madrid, 1996. Citado en la(s) página(s) 72
- [HAIRER-WANNER] **Hairer, E.; Wanner, G.:** *Analysis by Its History*. Springer, Nueva York, 1996. Citado en la(s) página(s) 72
- [ORTEGA] **Ortega, J. M.:** *Introducción al Análisis Matemático*. Labor, Barcelona, 1995. Citado en la(s) página(s) 87, 89
- [RÍBNIKOV] **Ríbnikov, K.:** *Historia de las Matemáticas*. Mir, Moscú, 1987. Citado en la(s) página(s) 72
- [ROSS] **Ross, K.A.:** *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*. Springer, Berlín, 1980. Citado en la(s) página(s) 79