

Capítulo 4

Continuidad

4.1. Límites de funciones reales de una variable real

4.1.1. Definición de límite de una función. Unicidad del límite. Límite por sucesiones

Definición 4.1.1. Dado $a \in \mathbb{R}$, llamaremos **entorno** de a a todo conjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ para el que exista algún $\varepsilon > 0$ de manera que V contenga al intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Si V es un entorno de a , diremos que el conjunto $V \setminus \{a\}$ es un **entorno reducido** de a .

Ejemplos. a) Si $b < a < c$, los intervalos (b, c) , $[b, c)$, $(b, c]$ y $[b, c]$ son entornos de a . También lo son los intervalos $(b, +\infty)$, $[b, +\infty)$, $(-\infty, c)$ y $(-\infty, c]$.

b) Todo conjunto que contenga un entorno de un punto es a su vez entorno de ese punto.

Definición 4.1.2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$; a es un **punto de acumulación** de A si todo entorno reducido de a contiene puntos de A ; equivalentemente, si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $y \in A$ tal que $y \neq a$, $|y - a| < \varepsilon$, o sea, tal que $0 < |y - a| < \varepsilon$.

El conjunto de puntos de acumulación de un conjunto A suele denominarse **conjunto derivado** de A y representarse por A' .

Informalmente, $a \in A'$ si y solo si hay puntos de A , distintos de a , arbitrariamente próximos al punto a .

Ejemplos. a) Si A es finito, $A' = \emptyset$.

b) $\mathbb{N}' = \mathbb{Z}' = \emptyset$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

c) $(a, b)' = [a, b]' = [a, b]$.

d) Si $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, $0 \in A'$ (aunque $0 \notin A$) y $1 \notin A'$ (aunque $1 \in A$).

Ejercicio. Probar que $a \in A'$ si y solo si existe una sucesión (x_n) de puntos de A distintos de a que converge a a .

Definición 4.1.3 (límite de una función en un punto). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$, $b \in \mathbb{R}$. Se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

cuando se cumple lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ se tiene $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Se dice entonces que “ b es límite de $f(x)$ cuando x tiende al punto a ”.

La condición de que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ se puede escribir de esta otra forma:

$$f(U) \subseteq (b - \varepsilon, b + \varepsilon), \quad U = [A \cap (a - \delta, a + \delta)] \setminus \{a\}.$$

Podemos parafrasear esta definición diciendo que $f(x)$ “se acerca” a b cuando x “se acerca” a a dentro del dominio de f , o que b puede ser aproximado “tanto como se quiera” por valores de f en puntos de su dominio “suficientemente próximos” al punto a , pero **distintos** de a .

Ejemplo. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0; \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (sin que importe que $f(0) = 1$).

Proposición 4.1.4 (unicidad del límite). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2,$$

entonces $b_1 = b_2$.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $b_1 < b_2$. Elijamos $\varepsilon = \frac{b_2 - b_1}{2}$. Deben existir un $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta_1$ es $f(x) < b_1 + \varepsilon = \frac{b_1 + b_2}{2}$ y un $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta_2$ es $\frac{b_1 + b_2}{2} = b_2 - \varepsilon < f(x)$. Definiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, resulta que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ es $\frac{b_1 + b_2}{2} < f(x) < \frac{b_1 + b_2}{2}$. Esto es una contradicción. \square

El resultado anterior también se puede obtener como una consecuencia de la proposición siguiente y de la unicidad del límite para sucesiones.

Proposición 4.1.5 (límite a través de sucesiones). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$, $b \in \mathbb{R}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

b) para cada sucesión (s_n) de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$ se verifica $\lim_n f(s_n) = b$.

Demostración. (a) \implies (b) Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ se cumple $|f(x) - b| < \varepsilon$. Sea (s_n) una sucesión de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$. Dado $\delta > 0$, existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se verifica $|s_n - a| < \delta$, y como $s_n \neq a$, se deduce que $|f(s_n) - b| < \varepsilon$; en otras palabras, $\lim_n f(s_n) = b$.

(b) \implies (a) Vamos a probar que si (a) no se cumple, entonces (b) tampoco. Que no se cumpla (a) significa que existe algún $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay al menos un $x_\delta \in A$ que cumple $0 < |x_\delta - a| < \delta$ y sin embargo $|f(x_\delta) - b| \geq \varepsilon$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos $\delta = \frac{1}{n}$. Hay algún punto $s_n \in A$ que cumple $0 < |s_n - a| < \frac{1}{n}$ y sin embargo $|f(s_n) - b| \geq \varepsilon$. La sucesión (s_n) así obtenida tiene las siguientes propiedades:

- está contenida en $A \setminus \{a\}$, porque $s_n \in A$, pero $0 < |s_n - a|$;
- $\lim_n s_n = a$, porque $0 < |s_n - a| < \frac{1}{n}$ (basta aplicar la definición de límite, o bien la regla del sandwich).
- pero la sucesión $f(s_n)$ no tiende a b , porque para todos los $n \in \mathbb{N}$, $|f(s_n) - b| \geq \varepsilon$.

Por lo tanto, no se cumple (b). \square

4.1.2. Límites infinitos y límites en el infinito

Definición 4.1.6. Llamaremos **entorno reducido** de $+\infty$ o $-\infty$ a todo conjunto $V \subseteq \mathbb{R}$ para el que exista un r de manera que $(r, +\infty) \subseteq V$ (respectivamente, $(-\infty, r) \subseteq V$).

Definición 4.1.7. Diremos que $+\infty$ es un **punto de acumulación** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si A no está acotado superiormente, en cuyo caso escribiremos $+\infty \in A'$. Diremos que $-\infty$ es un **punto de acumulación** de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si A no está acotado inferiormente, en cuyo caso escribiremos $-\infty \in A'$.

Definición 4.1.8 (límites infinitos y límites en el infinito). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a \in A'$. Pondremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

si para cada entorno V de b existe un entorno **reducido** U de a tal que $f(U) \subseteq V$.

Pueden darse definiciones en términos de desigualdades, desglosando los diferentes casos posibles. Concretamente, sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ cumplen $f(x) > M$.
- b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ cumplen $f(x) < M$.
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x > K$ cumplen $|f(x) - b| < \varepsilon$.
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x > K$ cumplen $f(x) > M$.
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x > K$ cumplen $f(x) < M$.
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x < K$ cumplen $|f(x) - b| < \varepsilon$.
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x < K$ cumplen $f(x) > M$.
- h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x < K$ cumplen $f(x) < M$.

Con esta ampliación, sigue habiendo unicidad de límite. Igualmente se mantiene la caracterización mediante sucesiones:

Proposición 4.1.9. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a \in A'$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.
- b) para cada sucesión (s_n) de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$ se verifica $\lim_n f(s_n) = b$.

Demostración. Basta adaptar a cada caso la demostración de la proposición 4.1.5. □

4.1.3. Cálculo de límites

Proposición 4.1.10 (operaciones algebraicas con límites). Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A , $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene:

- a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, si estos últimos límites existen y su suma está definida en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, si este último límite existe y su producto por c está definido en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, si estos últimos existen y su producto está definido en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, si estos últimos límites existen y su cociente está definido en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Demostración. Basta aplicar la proposición 4.1.9 y el resultado análogo para sucesiones. \square

Proposición 4.1.11 (acotación y límite cero). Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A , y $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que:

- a) la función f está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in A$.
- b) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;

Entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Demostración. Basta aplicar la proposición 4.1.9 y el resultado análogo para sucesiones. \square

Proposición 4.1.12 (cambios de variable). Sean A, B subconjuntos de \mathbb{R} , a un punto de acumulación de A , b un punto de acumulación de B , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(A) \subseteq B$ y supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

Si $b \notin f(A)$, entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, existe algún $r > 0$ tal que para todo $y \in B$ con $0 < |y - b| < r$, se tiene $|g(y) - c| < \varepsilon$.

Ahora, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, existe algún $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - b| < r$.

Sea $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$. No solo es $|f(x) - b| < r$, sino que como $b \notin f(A)$ y $f(A) \subseteq B$, resulta

$$0 < |f(x) - b| < r, \quad f(x) \in B$$

Por lo tanto, $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$. \square

La hipótesis adicional $b \notin f(A)$ es suficiente, aunque no necesaria para que se verifique la tesis. Bastaría también, por ejemplo, que f fuese inyectiva; o que $b \in B$ y $c = g(b)$. Sin añadir alguna condición como éstas, no puede garantizarse la validez del resultado final: considérese, por ejemplo, el caso de las funciones definidas en \mathbb{R} por

$$f(x) = 0, \quad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

Entonces $g(f(x)) = 1$ para todo x , y así

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 1.$$

A veces es útil en el cálculo de límites tener en cuenta las siguientes consecuencias inmediatas de la definición de límite:

Proposición 4.1.13. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, a punto de acumulación de A y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - b| = 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|.$

El recíproco solo es cierto, en general, cuando $b = 0$.

c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \ (a \in \mathbb{R}) \iff \lim_{t \rightarrow 0} f(a + t) = b.$

4.1.4. Límites laterales

Si en las definiciones de límites añadimos una de las dos condiciones $x > a$, $x < a$, entonces se habla de límites laterales (por la derecha y por la izquierda, respectivamente). Se emplea la notación $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Definición 4.1.14 (límites laterales: por la derecha y por la izquierda). Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A y $b \in \mathbb{R}$.

a) Se dice que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < x - a < \delta$ cumplen $|f(x) - b| < \varepsilon$.

b) Se dice que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < x - a < \delta$ cumplen $f(x) > M$.

c) Se dice que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < x - a < \delta$ cumplen $f(x) < M$.

d) Se dice que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < a - x < \delta$ cumplen $|f(x) - b| < \varepsilon$.

e) Se dice que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < a - x < \delta$ cumplen $f(x) > M$.

f) Se dice que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < a - x < \delta$ cumplen $f(x) < M$.

En términos de entornos reducidos, la definición anterior se puede escribir de manera más breve. Para los límites laterales se puede probar el resultado análogo a la proposición 4.1.9. También, y como consecuencia inmediata de las definiciones, tenemos:

Proposición 4.1.15. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ de modo que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq A$ para algún $\delta > 0$. Sea $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b.$$

Las proposiciones siguientes demuestran que las funciones monótonas tienen límites laterales en todos los puntos.

Proposición 4.1.16. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **monótona no decreciente**, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

a) si $a \in [A \cap (-\infty, a)]'$, entonces f tiene límite por la izquierda en a (finito o infinito) y es

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A \cap (-\infty, a)\}$$

(entendiendo que si el conjunto no está acotado superiormente, su supremo es $+\infty$).

b) si $a \in [A \cap (a, +\infty)]'$ entonces f tiene límite por la derecha en a (finito o infinito) y es

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A \cap (a, +\infty)\}$$

(entendiendo que si el conjunto no está acotado inferiormente, su ínfimo es $-\infty$).

Demostración. Solo demostramos el apartado a) y en el caso de que $a \in \mathbb{R}$ y el conjunto $\{f(x) : x \in A \cap (-\infty, a)\}$ esté acotado. Los demás casos son similares.

Sea $L = \sup\{f(x) : x \in A \cap (-\infty, a)\} \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, $L - \varepsilon$ no es una cota superior del conjunto $\{f(x) : x \in A \cap (-\infty, a)\}$, así que existe algún $r \in A \cap (-\infty, a)$ tal que $L - \varepsilon < f(r)$. Si ahora elegimos $\delta = a - r$, todos los $x \in A$ tales que $0 < a - x < \delta$ cumplen

$$r = a - \delta < x,$$

luego $L - \varepsilon < f(r) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon$, es decir: $|f(x) - L| < \varepsilon$. □

La variante para funciones monótonas no crecientes, que enunciamos a continuación, se demuestra de igual manera.

Proposición 4.1.17. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ **monótona no creciente**, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

a) si $a \in [A \cap (-\infty, a)]'$, entonces f tiene límite por la izquierda en a y es

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A \cap (-\infty, a)\}$$

(entendiendo que si el conjunto no está acotado inferiormente, su ínfimo es $-\infty$).

b) si $a \in [A \cap (a, +\infty)]'$ entonces f tiene límite por la derecha en a y es

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A \cap (a, +\infty)\}$$

(entendiendo que si el conjunto no está acotado superiormente, su supremo es $+\infty$).

4.1.5. Límites de funciones elementales

Si $f(x)$ representa una cualquiera de las funciones e^x , $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cos} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, x^r , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

para cualquier punto a del dominio de la función. Otros límites son los siguientes:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = +\infty & \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = -\frac{\pi}{2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty \quad (\text{si } r > 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = 0 \quad (\text{si } r < 0) \end{array}$$

Si $f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_0$ es un polinomio (con $r \in \mathbb{N}$ y $a_r \neq 0$), entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty & (\text{si } a_r > 0), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty & (\text{si } a_r < 0).\end{aligned}$$

Así mismo, se tiene el siguiente orden de infinitud, donde $a > 0$ y $b > 1$:

$$\log x \ll x^a \ll b^x \ll x^x \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Aquí, “ $f(x) \ll g(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ ” significa que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(o bien que $g(x)/f(x) \rightarrow +\infty$).

Definición 4.1.18. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A , y $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es **equivalente a g cuando x tiende al punto a** , y escribiremos

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a)$$

si se verifica

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Nota. Los resultados sobre sucesiones equivalentes se trasladan sin dificultad a funciones equivalentes.

En general, podemos “traducir” las equivalencias entre sucesiones a equivalencias entre funciones. Por ejemplo:

- Equivalencias de infinitésimos: cuando $x \rightarrow 0$,

$$\begin{array}{lll} e^x - 1 \sim x & \log(1+x) \sim x & (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \\ \operatorname{sen} x \sim x & 1 - \cos x \sim x^2/2 & \operatorname{tg} x \sim x \\ \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \sim x & \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \sim x & \end{array}$$

- Equivalencias de infinitos: sea $f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_0$, con $a_r \neq 0$; cuando $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned}f(x) &\sim a_r x^r, \\ \log f(x) &\sim r \log x \quad (\text{si } a_r > 0).\end{aligned}$$

4.1.6. Límites y desigualdades

Notación. Para abreviar y unificar algunos enunciados, a veces es cómoda la siguiente notación: dados $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $r \in \mathbb{R}$, pondremos

$$E(a; r) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < r\} & \text{si } a \in \mathbb{R} \text{ (y entonces } r > 0) \\ \{x \in \mathbb{R} : x > r\} & \text{si } a = +\infty \\ \{x \in \mathbb{R} : x < r\} & \text{si } a = -\infty. \end{cases}$$

Proposición 4.1.19. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ para la que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se tiene:

a) dado $c < b$, existe r tal que

$$c < f(x) \quad \forall x \in A \cap E(a; r)$$

(en palabras, cuando el límite de f en a es mayor que c , también la función f se mantiene mayor que c en puntos ‘suficientemente próximos’ al punto a , pero distintos de a).

b) dado $c > b$, existe r tal que

$$f(x) < c \quad \forall x \in A \cap E(a; r)$$

(en palabras, cuando el límite de f en a es menor que c , también la función f se mantiene menor que c en puntos ‘suficientemente próximos’ al punto a , pero distintos de a).

Corolario 4.1.20. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A y $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se tiene:

a) Si $b > 0$, entonces existe algún $r > 0$ tal que

$$0 < f(x) \quad \forall x \in A \cap E(a; r).$$

b) Si $b < 0$, entonces existe algún $r > 0$ tal que

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in A \cap E(a; r).$$

c) Si $b < c$, entonces existe algún $r > 0$ tal que

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in A \cap E(a; r).$$

En particular, f conserva el signo del límite en puntos ‘suficientemente próximos’ al punto a , pero distintos de a (cuando el límite no es nulo).

Observación. En el enunciado anterior, no se puede cambiar $<$ por \leq .

Corolario 4.1.21. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones para las que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si existe algún $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in A \cap E(a; r),$$

entonces $b \leq c$.

Observación. En el enunciado anterior, no se puede cambiar \leq por $<$.

Proposición 4.1.22 (regla del sandwich para funciones con límite finito). Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que:

a) existe r de modo que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A \cap E(a; r)$.

b) existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \in \mathbb{R}$.

Entonces también existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ y es igual a b .

Demostración. Basta aplicar la proposición 4.1.9 y el resultado análogo para sucesiones. O bien, se puede demostrar de manera similar al caso de las sucesiones. \square

La versión para límites infinitos es más simple:

Proposición 4.1.23 (regla del sandwich para funciones con límite infinito). Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que existe r de modo que

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in A \cap E(a; r).$$

a) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, entonces también se tiene $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.

b) si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, entonces también se tiene $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Demostración. Basta aplicar la proposición 4.1.9 y el resultado análogo para sucesiones. \square

4.1.7. Condición de Cauchy para funciones

Proposición 4.1.24. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

a) f tiene límite **finito** cuando x tiende a a ;

b) se cumple la siguiente **condición de Cauchy**: para cada $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in A \cap E(a; r)$ se verifica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;

c) para cada sucesión (x_n) de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n x_n = a$ se verifica que la sucesión $(f(x_n))$ es de Cauchy.

Demostración. (a) \implies (b) Sea $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in A \cap E(a; r)$ se tiene

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

luego para cualesquiera $x, y \in A \cap E(a; r)$ será

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - b| + |b - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) \implies (c) Es una comprobación sencilla.

(c) \implies (a) Dada una sucesión (x_n) de puntos de $A \setminus \{a\}$ tal que $\lim_n x_n = a$, como la sucesión $(f(x_n))$ es de Cauchy tendrá un límite b , posiblemente distinto para cada sucesión (x_n) considerada. Según la caracterización del límite que hemos obtenido mediante sucesiones, para completar la demostración será suficiente que probemos que $\lim_n f(x_n)$ es el mismo para todas las sucesiones (x_n) .

Sean, pues, (y_n) , (z_n) sucesiones de puntos de $A \setminus \{a\}$ tales que $\lim_n y_n = a = \lim_n z_n$, y sean $c = \lim_n f(y_n)$, $d = \lim_n f(z_n)$. La sucesión (x_n) definida por $x_{2n-1} = y_n$, $x_{2n} = z_n$ sigue siendo una sucesión de puntos de $A \setminus \{a\}$ con $\lim_n x_n = a$, luego $(f(x_n))$ será una sucesión convergente. Si b es su límite, como $(f(y_n))$, $(f(z_n))$ son subsucesiones suyas, debe cumplirse $c = b = d$. \square

4.1.8. Límites de restricciones y extensiones de funciones

Proposición 4.1.25. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A , $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se cumple:

a) si $A_1 \subseteq A$, $a \in A_1'$, $f_1 = f|_{A_1}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \implies \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b.$$

El recíproco, en general, no es cierto. Sin embargo:

b) cuando $A_1 = A \cap E(a; r)$ para algún r ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b$$

(nos referiremos a este hecho diciendo que “el concepto de límite es un concepto local”).

c) si $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ y para $1 \leq j \leq m$ es $a \in A'_j$, $f_j = f|_{A_j}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = b \quad (1 \leq j \leq m) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Observación. Suele ponerse

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in S} f(x)$$

en vez de $\lim_{x \rightarrow a} (f|_S)(x)$, y se lee *límite de $f(x)$ cuando x tiende a a a través de S* .

4.2. Funciones continuas

4.2.1. Definiciones de continuidad. Operaciones con funciones continuas

Definición 4.2.1. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Diremos que f es **continua en el punto a** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in D$ con $|x - a| < \delta$ es $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Gráficamente: hay siempre una ‘ventana’ o ‘pantalla’ centrada en $(a, f(a))$ de altura arbitrariamente prefijada (2ε) que, con la anchura ajustada convenientemente (2δ), no deja ‘fuera de pantalla’ puntos de la gráfica de abscisa igual a los de la base de la ventana (ver [GUZMÁN, págs. 174–175]).

Proposición 4.2.2. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Se tiene:

- a) si a es un **punto aislado** de D , lo que significa que $a \notin D'$, entonces f es continua en a .
- b) si a es un punto de acumulación de D , $a \in D'$, entonces f es continua en a si y solo si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y es igual a $f(a)$.

Definición 4.2.3. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subseteq D$. Diremos que f es **continua en el conjunto S** si f es continua en todos los puntos de S . Si $S = D$, diremos simplemente que f es **continua**.

Ejemplos. a) Dado $c \in \mathbb{R}$, la función constante $f(x) = c$ es continua (en todos los puntos).

b) La función identidad, $f(x) = x$, es continua.

c) La función valor absoluto, $f(x) = |x|$, es continua.

d) Las funciones e^x , $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cos} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, x^r son todas ellas continuas en sus respectivos dominios de definición.

e) La función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es continua en ningún punto.

f) La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es continua en 0.

g) La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0.

Proposición 4.2.4. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) f es continua en a ;
- b) si (x_n) es una sucesión de puntos de D convergente al punto a , entonces la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(a)$;

Demostración. Análoga a la de la proposición 4.1.9. □

Proposición 4.2.5. Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, $c \in \mathbb{R}$, y supongamos que f y g son continuas en a . Se tiene:

- a) $f + g$ es continua en a .
- b) cf es continua en a .
- c) fg es continua en a .
- d) si $g(a) \neq 0$, f/g es continua en a .

Demostración. Basta aplicar la proposición 4.2.4 y el resultado análogo para sucesiones. □

Proposición 4.2.6. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, y supongamos que $f(D) \subseteq E$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en a .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en el punto $f(a)$, existe algún $r > 0$ tal que para todo $y \in E$ con $|y - f(a)| < r$, se tiene $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$.

Ahora, como f es continua en a , existe algún $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D$ con $|x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(a)| < r$.

Sea $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$ [es decir, $x \in D$ y $f(x) \in E$] con $|x - a| < \delta$. Entonces, $|f(x) - f(a)| < r$, luego $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$. □

Ejercicio. Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Probar que si f y g son continuas en a , entonces que $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ son también continuas en a ([Ross, Ejercicio 17-8, pág. 94]).

4.2.2. Propiedades de las funciones continuas: teoremas de Weierstrass, Bolzano y Darboux; funciones continuas monótonas

Teorema 4.2.7 (de Weierstrass). Sea f una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Entonces:

- a) f está acotada;
- b) f alcanza un valor mínimo y un valor máximo, es decir, existen puntos $r, s \in [a, b]$ (no necesariamente únicos) tales que para todo $x \in [a, b]$ es $f(r) \leq f(x) \leq f(s)$.

Demostración. a) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada y probemos que entonces hay algún punto del intervalo $[a, b]$ donde la función no es continua. Dado que f no está acotada, para cada $n \in \mathbb{N}$ hay algún punto $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. En particular,

$$\lim_n |f(x_n)| = +\infty.$$

Pero la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ sí está acotada, así que, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, hay alguna subsucesión suya que converge:

$$x_{\varphi(n)} \rightarrow c \in [a, b].$$

Sabemos que

$$\lim_n |f(x_{\varphi(n)})| = +\infty,$$

por ser una subsucesión de $(|f(x_n)|)_{n=1}^\infty$. Entonces, la función f no es continua en c , ya que si lo fuera debería ser

$$\lim_n |f(x_{\varphi(n)})| = |f(c)|.$$

b) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Por el apartado anterior, ya sabemos que está acotada, de modo que tiene supremo e ínfimo; sean

$$M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\} \in \mathbb{R},$$

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\} \in \mathbb{R}.$$

Se trata de probar que ese supremo y ese ínfimo se alcanzan, es decir, que existen ciertos $r, s \in [a, b]$ tales que $f(r) = m$, $f(s) = M$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número $M - \frac{1}{n}$ no es una cota superior de f , de modo que podemos elegir algún $x_n \in [a, b]$ tal que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

En particular,

$$\lim_n f(x_n) = M.$$

Como la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty$ está acotada, tendrá alguna subsucesión $(x_{\varphi(n)})_{n=1}^\infty$ convergente:

$$x_{\varphi(n)} \rightarrow s \in [a, b].$$

Por una parte, la función f es continua en todos los puntos de $[a, b]$; por otra, $f(x_{\varphi(n)})$ es una subsucesión de $f(x_n)$. Entonces,

$$f(s) = \lim_n f(x_{\varphi(n)}) = M.$$

De manera análoga se demuestra que existe algún punto $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = m$. □

Pasamos a ver dos resultados íntimamente relacionados entre sí, el teorema de Bolzano y el teorema de los valores intermedios o propiedad de Darboux. Algunos libros comienzan por probar el teorema de los valores intermedios (por ejemplo, [Ross, pág. 96, Teorema 18.2]) y el teorema de Bolzano resulta como caso particular; otros proceden al revés, demostrando primero el teorema de Bolzano y obteniendo después el teorema de los valores intermedios como consecuencia. Tomaremos este segundo camino, que utiliza una demostración más ‘constructiva’ que sugiere un procedimiento (un tanto rudimentario) para obtener aproximaciones de raíces de ecuaciones.

Teorema 4.2.8 (de los ceros, de Bolzano). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Supongamos que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.*

Demostración. Sea, por ejemplo, $f(a) < 0 < f(b)$. Veamos mediante inducción que podemos construir sucesiones (x_n) , (y_n) tales que

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n < y_n \leq \cdots \leq y_1 \leq b,$$

$$y_i - x_i = \frac{b-a}{2^i}, f(x_i) \leq 0, f(y_i) > 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Para ello, comencemos tomando $z_1 = \frac{a+b}{2}$. O bien $f(z_1) \leq 0$, o $f(z_1) > 0$. En el primer caso, hagamos $x_1 = z_1$, $y_1 = b$; en el segundo caso hagamos $x_1 = a$, $y_1 = z_1$. En ambos casos, resulta $a \leq x_1 < y_1 \leq b$, $y_1 - x_1 = (b-a)/2$, $f(x_1) \leq 0$, $f(y_1) > 0$.

Supongamos construidos $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, de manera que

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n < y_n \leq \cdots \leq y_1 \leq b,$$

$y_i - x_i = \frac{b-a}{2^i}$, $f(x_i) \leq 0$, $f(y_i) > 0$ ($1 \leq i \leq n$). Tomamos entonces $z_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$; o bien $f(z_{n+1}) \leq 0$ o $f(z_{n+1}) > 0$. En el primer caso, hagamos $x_{n+1} = z_{n+1}$, $y_{n+1} = y_n$, en el segundo caso hagamos $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = z_n$; en ambos casos resulta

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n \leq \cdots \leq y_1 \leq b,$$

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}, f(x_{n+1}) \leq 0, f(y_{n+1}) > 0.$$

La sucesión (x_n) es una sucesión monótona no decreciente, acotada superiormente por b . Entonces tiene un límite c , y necesariamente $c \leq b$. Análogamente, (y_n) es una sucesión monótona no creciente acotada inferiormente por a . Así que tiene límite y necesariamente $\lim_n y_n \geq a$. Pero como

$$\lim_n (y_n - x_n) = \lim_n \frac{b-a}{2^n} = 0, \text{ resulta que } \lim_n y_n = \lim_n x_n = c, \text{ con lo que } a \leq c \leq b.$$

Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $f(x_n) \leq 0$, $f(y_n) > 0$, usando la continuidad de f en c se deduce finalmente

$$f(c) = \lim_n f(x_n) \leq 0, \quad f(c) = \lim_n f(y_n) \geq 0,$$

o sea, $f(c) = 0$ (lo que garantiza además que $a \neq c \neq b$). □

Teorema 4.2.9 (teorema de los valores intermedios o propiedad de Darboux). *Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f tiene la **propiedad de los valores intermedios**: si $a < b$ y λ está entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, $f(a) < \lambda < f(b)$ o $f(a) > \lambda > f(b)$, entonces existe al menos un $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = \lambda$.*

Demostración. Aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) - \lambda$ en el intervalo $[a, b]$. □

Corolario 4.2.10. *Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Aplicaciones. a) Toda aplicación continua de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ tiene un punto fijo (ver [Ross, pág. 97]).

b) Dado $m \in \mathbb{N}$, todo $y > 0$ tiene raíz m -ésima positiva (ver [Ross, pág. 97]).

Lema 4.2.11. *Sea g una función estrictamente monótona en un intervalo J y tal que $g(J)$ es un intervalo I . Entonces g es continua en J .*

Demostración. Podemos suponer que g es estrictamente creciente (en el otro caso, se sigue de forma análoga). Sea $c \in J$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^-} g(x) &= \sup\{g(x) : x \in J, x < c\} \leq g(c), \\ \lim_{x \rightarrow c^+} g(x) &= \inf\{g(x) : x \in J, x > c\} \geq g(c) \end{aligned}$$

(esto, en caso de que c no sea uno de los extremos del intervalo; si lo es, la demostración se reduce a tomar el único límite lateral que tenga sentido).

Se trata de probar que las dos desigualdades son igualdades. Supongamos que, por ejemplo,

$$\sup\{g(x) : x \in J, x < c\} < g(c)$$

(para la otra desigualdad se procede de manera similar). Elijamos cualquier λ tal que

$$\sup\{g(x) : x \in J, x < c\} < \lambda < g(c).$$

Entonces, $g(x) < \lambda$ para todos los $x \in J, x < c$. Y si $x \in J$, pero $x \geq c$, resulta que $\lambda < g(c) \leq g(x)$. Así que $\lambda \notin g(J)$. Sin embargo, tomando cualquier $x \in J$ tal que $x < c$, se tiene $g(x) < \lambda < g(c)$, $g(x) \in g(J)$, $g(c) \in g(J)$. Por lo tanto, $g(J)$ no es un intervalo, lo que contradice las hipótesis. \square

Proposición 4.2.12. *Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente (resp., estrictamente decreciente), $J = f(I)$ el intervalo imagen. Entonces la función inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ es asimismo continua y estrictamente creciente (resp., estrictamente decreciente).*

Demostración. Es una consecuencia directa del lema anterior, ya que la función inversa de una estrictamente monótona es también estrictamente monótona (y del mismo tipo) y $f^{-1}(J) = I$ es un intervalo. \square

Teorema 4.2.13 (continuidad de la función inversa). *Sea f una función continua e inyectiva en un intervalo I . Entonces f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, y la inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ es asimismo estrictamente monótona (del mismo tipo) y continua.*

Demostración. De acuerdo con la proposición anterior, basta demostrar que f es estrictamente monótona. Supongamos que f no es estrictamente decreciente; entonces existen ciertos $a, b \in I$ tales que

$$a < b, \quad f(a) \leq f(b).$$

Como f es inyectiva, se deduce que $f(a) < f(b)$. Vamos a probar que f es estrictamente creciente, es decir, que

$$\forall r, s \in I \text{ con } r < s, \text{ resulta que } f(r) < f(s).$$

Consideramos seis casos: en los tres primeros uno de los dos puntos r, s es el punto a ; en los tres últimos ninguno es a . Tendremos en cuenta que la función es inyectiva, así que, por ejemplo, tenemos descartado que sea $f(r) = f(s)$.

a) $r = a, s = b$. Ya sabemos que $f(a) < f(b)$.

b) $r = a, a < s, s \neq b$. Hay que probar que $f(a) < f(s)$. Pero si fuera $f(s) < f(a)$, entonces $f(a)$ estaría comprendido entre $f(s)$ y $f(b)$, luego habría algún c comprendido entre s y b tal que $f(c) = f(a)$. Esto no puede ser, porque f es inyectiva.

c) $s = a, r < a$. Hay que probar que $f(r) < f(a)$. Pero si fuera $f(r) > f(a)$, entonces podríamos tomar algún λ tal que

$$\begin{aligned} f(a) < \lambda < f(r), \\ f(a) < \lambda < f(b). \end{aligned}$$

Habría algún c comprendido entre r y a tal que $f(c) = \lambda$ y algún d comprendido entre a y b tal que $f(d) = \lambda$. Esto no puede ser, porque f es inyectiva.

d) $r < a < s$. Según los apartados anteriores, ya sabemos que $f(r) < f(a) < f(s)$.

e) $a < r < s$. Ya sabemos que $f(a) < f(r)$ y que $f(a) < f(s)$. Si fuera $f(r) > f(s)$, entonces $f(s)$ estaría comprendido entre $f(a)$ y $f(r)$, luego habría algún $c \in (a, r)$ tal que $f(c) = f(s)$. Esto no puede ser, porque f es inyectiva.

f) $r < s < a$. Ya sabemos que $f(r) < f(a)$ y que $f(s) < f(a)$. Si fuera $f(r) > f(s)$, entonces $f(r)$ estaría comprendido entre $f(s)$ y $f(a)$, luego habría algún $c \in (s, a)$ tal que $f(c) = f(r)$. Esto no puede ser, porque f es inyectiva. \square

4.2.3. Clasificación de discontinuidades

Definiciones 4.2.14 (tipos de discontinuidades). Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in D'$. Diremos que f tiene en c una **discontinuidad evitable** si existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$ pero o bien el límite no coincide con $f(c)$, o bien $c \notin D$.

Nótese que en tal caso, la función g definida por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in D \setminus \{c\} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) & \text{si } t = c \end{cases}$$

que es ‘casi la misma’ que f , resulta continua en el punto c : hemos ‘evitado’ la discontinuidad de f redefiniendo adecuadamente el valor en c como $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Este límite se denomina a veces el **valor asintótico** de f en c .

Diremos que f tiene en c una **discontinuidad de salto** si existen $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \in \mathbb{R}$, pero son distintos. En algunos libros llaman a este tipo de discontinuidad **discontinuidad de salto finito**. La diferencia $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ recibe el nombre de **salto** de f en c (hay textos que dan este nombre al valor absoluto de la diferencia).

Corolario 4.2.15. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función **monótona**. Si $c \in (a, b)$, entonces o bien f es continua en c o bien f tiene en c una discontinuidad de salto.

Nota. Puede probarse que, como consecuencia de este resultado, el conjunto de discontinuidades de una función monótona en un intervalo es finito o numerable.

4.2.4. Continuidad uniforme. Teorema de Heine. Extensión de funciones continuas

Definición 4.2.16. Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es **uniformemente continua** en S si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in S$ con $|x - y| < \delta$ es $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Nótese que una función uniformemente continua es, necesariamente, continua. El recíproco, en general, no es cierto.

Ejemplo. La función

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

es continua, pero no uniformemente continua. Sin embargo, para cada $a > 0$, la función

$$g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

es uniformemente continua.

Nota. Por comodidad, diremos a veces que *una función es uniformemente continua en un subconjunto de su dominio* en vez de decir que la restricción de la función a dicho subconjunto es uniformemente continua. Así, en el ejemplo anterior, la función $1/x$ es uniformemente continua en $[a, +\infty)$ (para cualquier $a > 0$) pero no es uniformemente continua en $(0, 1]$.

Teorema 4.2.17 (de Heine). Si f es continua en un intervalo compacto $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Demostración. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, supongamos que no es uniformemente continua en $[a, b]$ y probemos que entonces hay algún punto de $[a, b]$ donde f no es continua.

Como f no es uniformemente continua, existe algún $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ hay al menos un par de puntos $x, y \in [a, b]$ (que dependerán de δ) para los cuales $|x - y| < \delta$, pero $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un par de puntos $x_n, y_n \in [a, b]$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

En particular, $x_n - y_n \rightarrow 0$. Dado que la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada, hay alguna subsucesión cuya convergente:

$$y_{\varphi(n)} \rightarrow c \in [a, b].$$

Por otra parte, y dado que $x_n - y_n \rightarrow 0$, también $x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \rightarrow 0$. Por lo tanto,

$$x_{\varphi(n)} = (x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}) + y_{\varphi(n)} \rightarrow c.$$

Por último, la función f no puede ser continua en el punto c , ya que entonces se tendría

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \rightarrow |f(c) - f(c)| = 0$$

y, sin embargo,

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$$

para todos los $n \in \mathbb{N}$. □

Sin embargo, la continuidad en intervalos del tipo $(a, b]$ o $[a, +\infty)$ no produce el mismo efecto: ya hemos visto, por ejemplo, que

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

no es uniformemente continua, pese a ser continua; también es continua, pero no uniformemente continua, la función

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2$$

(considérense, por ejemplo, los valores de g en $n + \frac{1}{n}$ y n).

Proposición 4.2.18. *Si f es uniformemente continua en un conjunto S y (s_n) es una sucesión de Cauchy contenida en S , entonces $(f(s_n))$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe algún $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in S$ con $|x - y| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ahora, como la sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe algún $K \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m > K$ se tiene $|s_n - s_m| < \delta$. Y además, $s_n, s_m \in S$. Entonces, para cualesquiera $n, m > K$ se tiene $|f(s_n) - f(s_m)| < \varepsilon$.

Por lo tanto, la sucesión $(f(s_n))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. □

Proposición 4.2.19. *Una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua si y solo si posee una extensión continua en $[a, b]$.*

Demostración. Si f tiene una extensión continua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces g es uniformemente continua, según el teorema de Heine. Cualquier restricción de una función uniformemente continua también es uniformemente continua, y en particular, f .

Ahora supongamos que f es uniformemente continua en (a, b) ; se trata de probar que existen los dos límites

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

y que son números reales, ya que entonces la siguiente función será una extensión continua de f al intervalo $[a, b]$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), & \text{si } x = a \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), & \text{si } x = b \end{cases}$$

Solo vamos a probar que existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y que es un número real; el otro límite se prueba de manera análoga.

Elijamos una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ contenida en el intervalo (a, b) y tal que $\lim_n s_n = a$. Como es convergente, la sucesión es de Cauchy; y como la función f es uniformemente continua, la sucesión $(f(s_n))_{n=1}^{\infty}$ es también de Cauchy y, por lo tanto, convergente. Sea

$$\lim_n f(s_n) = L \in \mathbb{R}.$$

Ahora sea $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión cualquiera contenida en el intervalo (a, b) y tal que $\lim_n t_n = a$. Definamos la nueva sucesión

$$r_{2n} = t_n, \quad r_{2n-1} = s_n.$$

Por la misma razón que antes, la sucesión $(f(r_n))_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Como $(f(t_n))_{n=1}^{\infty}$ y $(f(s_n))_{n=1}^{\infty}$ son dos subsucesiones suyas, deducimos que

$$\lim_n f(t_n) = \lim_n f(r_n) = \lim_n f(s_n) = L.$$

Según la proposición 4.1.9,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

□

Bibliografía

- [GUZMÁN] **Guzmán, M.:** *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático.* Pirámide, Madrid, 1996. Citado en la(s) página(s) 60
- [ROSS] **Ross, K. A.:** *Elementary Analysis: The Theory of Calculus.* Springer, Berlín, 1980. Citado en la(s) página(s) 61, 62, 63