

Geometría Euclídea Plana

Primer Cuatrimestre 2005

Área de figuras

Introducción	1
1. Área de figuras simples	2
2. Teorema de Pitágoras	5
Bibliografía	6

Introducción

Hasta ahora hemos considerado las figuras como «alambres» (los lados) que se juntan en «nudos» (los vértices), sin tener mucho en cuenta si estaban «llenas» o no. En general no tenemos distintos nombres para la figura «llena» o «vacía», siendo una excepción el caso de «círculo» y «circunferencia».

Al hablar de «área» de una figura, presuponemos que la consideramos «llena» y medimos —de alguna forma— la cantidad de puntos en el «interior». Aunque la noción de «interior» parece clara para figuras como el triángulo, en general no es sencilla. Por ejemplo, ¿cuál es el «interior» de una figura como \square ?

Sin embargo, esto no será demasiado obstáculo para determinar el área de las figuras que consideraremos: «área de un triángulo» se refiere a medir la figura «llena».

Mucho más formidable es que no podemos definir satisfactoriamente el área de modo de cumplir con las hipótesis planteadas más abajo y que todo conjunto sea medible. Para una dimensión (reemplazando el plano por la recta) y dos dimensiones, S. Banach demostró que el problema tiene soluciones pero no únicas. Para tres dimensiones (reemplazando el plano por el espacio), F. Hausdorff demostró en 1914 que el problema no tiene solución. En tres dimensiones tenemos también la célebre «paradoja de Banach y Tarski», quienes en 1924 —usando las ideas de Hausdorff— demostraron que es posible dividir a la esfera tridimensional de radio 1 en un número finito de partes (disjuntas) de modo tal que —usando sólo movimientos rígidos en tres dimensiones— estas partes se pueden reagrupar formando dos esferas de radio 1. Estos resultados —a su vez— dependen de los axiomas más básicos que fundamentan las matemáticas.⁽¹⁾

Por supuesto que estos temas se ven en cursos mucho más avanzados (de nivel de posgrado). En este curso nos contentaremos con dar una idea del tema, trabajando con las figuras planares sencillas que más conocemos como cuadriláteros, triángulos o círculos.

Tomamos como base a libro de Pogorélov [Pog], pero con algunos cambios tratando de precisar sobre si las figuras están «llenas» o no, y «axiomatizando» el área.

⁽¹⁾ Concretamente, si se incluye el llamado «axioma de elección» o no.

1. Área de figuras simples

1.1. Definición. Un segmento es *abierto* si no incluye sus extremos.

- Una semirrecta es *abierto* si no incluye su origen.
- Un semiplano es *abierto* si no incluye la recta que lo determina.

1.2. Definición. Dado un polígono convexo $A_1A_2\dots A_n$ decimos que un punto P está en el *interior* si para cada lado $A'A''$ del polígono, el punto está en el mismo semiplano abierto que los restantes vértices (de $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \setminus \{A', A''\}$).

☞ Pogorélov [Pog, pág. 81] define puntos *dentro* de triángulos en forma equivalente.

- Si un punto es vértice o está en uno de los lados del polígono, diremos que está en el *borde* del polígono.
- Cuando consideramos los puntos del interior del polígono, decimos que consideramos al polígono *abierto*.
- Cuando consideramos tanto los puntos del interior y del borde, decimos que consideramos al polígono *completo*.

1.3. Definición. Una figura es *simple* si es la unión de un número finito de puntos, segmentos abiertos y triángulos abiertos.

☞ Observar las diferencias con la definición en [Pog, pág. 120].

☞ El círculo no es una figura simple según esta definición, ni tampoco una recta o un semiplano.

1.4. Lema. *Un polígono convexo completo es una figura simple.*

☞ Trazamos las diagonales desde un vértice, dividiendo el polígono en triángulos (ver argumentos similares en los incisos 9.6 a 9.9 del apunte *Elementos básicos*). La unión de los interiores de esos triángulos, sus lados y sus vértices dan el polígono completo.

Hipótesis sobre el área de figuras. Supondremos que hay una familia de figuras del plano, que llamaremos *medibles*, tales que se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si F es una figura medible, $\text{área}(F)$ está definida y es un número real no negativo.
2. Si dos figuras F_1 y F_2 son medibles, entonces
 - i) $F_1 \cup F_2$ y $F_1 \setminus F_2$ son medibles.
 - ii) Si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ entonces $\text{área}(F_1 \cup F_2) = \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2)$.
3. Si F_1 y F_2 son iguales⁽²⁾ y F_1 es medible, entonces F_2 es medible y $\text{área}(F_1) = \text{área}(F_2)$.
4. Toda figura simple es medible.
5. El área de un cuadrado «completo» de lado 1 (unidad de longitud) es 1 (unidad de área).

☞ Observar que la unidad de área está ligada a la unidad de longitud. Así, si nuestra unidad de longitud es el centímetro, la unidad de área es el «centímetro cuadrado»: un cuadrado con lados de 1 cm tiene área de 1 cm².

☞ Como los cuadrados de lado 1 son iguales, en el sentido que se puede transformar uno en otro mediante un movimiento rígido, el área de *cualquier* cuadrado unitario es 1, por la propiedad 3.

☞ Los cuadrados servirán como «bloques» con los cuales mediremos el área de otras figuras.

1.5. Lema. *Si F_1 y F_2 son medibles entonces*

⁽²⁾ Recordar que, por definición, esto significa que una se transforma en otra mediante un movimiento rígido.

- i) Si $F_1 \subset F_2$, entonces $\text{área}(F_1) \leq \text{área}(F_2)$.
- ii) $\text{área}(F_1 \cup F_2) \leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2)$.

☞ Si $F_1 \subset F_2$, $F_3 = F_2 \setminus F_1$ es medible por la propiedad 2 y $\text{área}(F_3) \geq 0$ por la propiedad 1. De $F_1 \cap F_3 = \emptyset$ y $F_1 \cup F_3 = F_2$, usando la propiedad 1 tenemos $\text{área}(F_2) = \text{área}(F_1) + \text{área}(F_3) \geq \text{área}(F_1)$.

Por otro lado, $F_1 \cup F_2 = F_1 \cup (F_2 \setminus F_1)$, de modo que $\text{área}(F_1 \cup F_2) = \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2 \setminus F_1) \leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2)$ (usando la propiedad 2 y el inciso anterior).

1.6. Corolario. Si F_1, F_2, \dots, F_n son n figuras medibles, entonces

$$\text{área}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) \leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2) + \dots + \text{área}(F_n).$$

☞ Usando 1.5 sucesivamente,

$$\begin{aligned} \text{área}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) &= \text{área}((F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n-1}) \cup F_n) \leq \\ &\leq \text{área}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n-1}) + \text{área}(F_n) \leq \\ &\leq \text{área}((F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n-2}) \cup F_{n-1}) + \text{área}(F_n) \leq \\ &\leq \dots \leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2) + \dots + \text{área}(F_n). \end{aligned}$$

1.7. Lema. Si F_1, F_2, \dots, F_n son n figuras medibles, tales que para $i = 1, \dots, n$:

- i) $F_i = G_i \cup H_i$, donde G_i y H_i son medibles con $\text{área}(H_i) = 0$.
- ii) $G_i \cap G_j = \emptyset$ para $j \neq i$.

Entonces

$$\text{área}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) = \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2) + \dots + \text{área}(F_n).$$

☞ Si $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ y $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$, entonces por 1.6, propiedad 2 y 1.5,

$$\begin{aligned} \text{área}(F) &\leq \text{área}(F_1) + \text{área}(F_2) + \dots + \text{área}(F_n) = \\ &= \text{área}(G_1 \cup H_1) + \text{área}(G_2 \cup H_2) + \dots + \text{área}(G_n \cup H_n) \leq \\ &\leq \text{área}(G_1) + \text{área}(H_1) + \text{área}(G_2) + \text{área}(H_2) + \dots + \text{área}(G_n) + \text{área}(H_n) = \\ &= \text{área}(G_1) + \text{área}(G_2) + \dots + \text{área}(G_n) = \text{área}(G) \leq \text{área}(F). \end{aligned}$$

y debe valer la igualdad en todos los casos.

1.8. Lema. El área de un segmento es 0. En consecuencia, también todo punto tiene área 0.

☞ Para $n \in \mathbb{N}$ dividamos el cuadrado completo de lado 1 en un segmento (cerrado) de longitud 1 y n rectángulos completos de lados 1 y $1/n$, a los que se les ha quitado un segmento cerrado de longitud 1 en el borde, como se indica en la figura 1, donde a la derecha hemos separado las partes dentro del cuadrado.

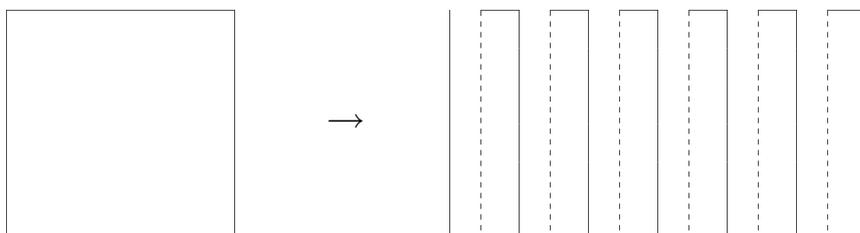


Figura 1: Dividiendo el cuadrado «completo» en un segmento y varios rectángulos

Puesto que los n rectángulos iguales son disjuntos y están contenidos en el cuadrado completo de lado 1, si r es el área de cada uno de ellos debe ser $n \times r \leq 1$, o $r \leq 1/n$. A su vez, mediante traslación podemos poner al segmento de longitud 1 en uno de los rectángulos, de

modo que si el área del segmento es a , debe ser $a \leq r \leq 1/n$. Como esto sucede para todo n , y $a \geq 0$, debe ser $a = 0$. De modo que el segmento cerrado de longitud 1 tiene área 0. Pero todo otro segmento puede incluirse dentro de la unión de un número finito de segmentos de longitud 1. Por 1.6, también el área de cualquier segmento es 0.

1.9. Corolario. *El área de un polígono convexo completo y la de su interior coinciden. Además, si el polígono se escribe como unión disjunta de un número finito de polígonos convexos abiertos, segmentos abiertos y puntos, el área del polígono completo es la suma de las medidas de los polígonos convexos abiertos.*

☛ Usamos 1.7 y 1.8.

De ahora en más, nos referiremos al área de un polígono convexo como el área común del polígono abierto o completo, omitiendo «abierto» o «completo»: el *área de un cuadrado* será el área del «cuadrado completo», y también el área del «cuadrado abierto», o cualquier otra variante.

1.10. Teorema. *Si un rectángulo R tiene lados de longitudes a y b , entonces $\text{área}(R) = a \times b$.*

☛ Observamos que siendo el rectángulo una figura simple, su área debe estar definida. Consideramos distintos casos.

- i) El rectángulo es un cuadrado de lados $1/n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Como uniendo n^2 de ellos formamos un cuadrado de lado 1, cada uno tendrá área de $1/n^2$ (ignoramos que hay lados que se «solapan» pues tienen área nula y usamos 1.7).
- ii) Los lados del rectángulo son racionales, digamos $a = m/n$, $b = m'/n$, con $m, m', n \in \mathbb{N}$, habiendo elegido un denominador común. Como podemos formar el rectángulo con $m \times m'$ cuadrados de lado $1/n$, el área será $mm' \times (1/n^2) = a \times b$.
- iii) Los lados del rectángulo son números reales arbitrarios. Sean

$$A = \{\text{área}(R') : R' \text{ es rectángulo de lados racionales y } R' \subset R\},$$

$$B = \{\text{área}(R'') : R'' \text{ es rectángulo de lados racionales y } R'' \supset R\}.$$

De $R' \subset R \subset R''$ resultará

$$x \leq \text{área}(R) \leq y \quad \text{para todo } x \in A, y \in B.$$

Si fijamos $q \in \mathbb{N}$ arbitrariamente, y ponemos $a = p/q + r$, $b = p'/q + r'$, donde $0 \leq r, r' < 1/q$, podemos encontrar rectángulos R' de lados p/q y p'/q , y R'' de lados $(p+1)/q$ y $(p'+1)/q$, de modo que $R' \subset R \subset R''$, quedando

$$p/q \leq a < (p+1)/q \quad \text{y} \quad p'/q \leq b < (p'+1)/q,$$

de donde $\text{área}(R') \leq ab < \text{área}(R'')$, i.e.

$$x \leq a \times b \leq y \quad \text{para todo } x \in A, y \in B.$$

Pero

$$\begin{aligned} 0 < \text{área}(R'') - \text{área}(R') &= \frac{(p+1)(p'+1)}{q^2} - \frac{pp'}{q^2} = \\ &= \frac{p+p'+1}{q^2} = \frac{p/q + p'/q + 1/q}{q} < \frac{a+b+1}{q}, \end{aligned}$$

y el miembro derecho puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando $q \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. De acuerdo a la propiedad de completitud de los reales (pág. 5 en el apunte de *Notaciones y bibliografía*), debe ser $\text{área}(R) = ab$ pues hay un único número m tal que $x \leq m \leq y$ para todo $x \in A$ y $y \in B$.

1.11. Teorema (Euclides I.35, I.36). Si dos paralelogramos tienen un lado común, y los lados opuestos están sobre una misma recta, entonces sus áreas coinciden.

☞ Bastará comparar cada paralelogramo con un rectángulo con el mismo lado en común y el lado opuesto sobre la misma recta. Si un paralelogramo es $ABCD$ y el rectángulo es $ABC'D'$, hay dos casos posibles según CD y $C'D'$ se intersequen o no (ver figura 2).

☞ La demostración en [Pog, pág. 122] sólo cubre el primer caso, mientras que Euclides [Euc, Hea] cubre el segundo, que es más complejo.

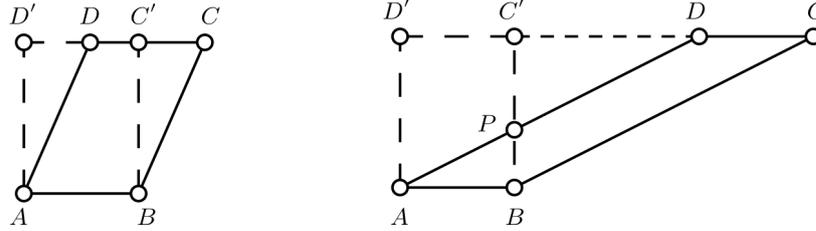


Figura 2: Posibles posiciones del paralelogramo

Guiándonos por la figura, en cualquier caso los triángulos ADD' y BCC' son iguales ($AD' = BC'$, $\angle DAD' = \angle CBC'$ porque sus lados son paralelos, y $\angle D' = \angle C' = 90^\circ$).

En el primer caso el cuadrilátero $ABC'D$ es común, y

$$\begin{aligned} AB \times AD' &= \text{área}(ABC'D') = \text{área}(ADD') + \text{área}(ABC'D) = \\ &= \text{área}(BCC') + \text{área}(ABC'D) = \text{área}(ABCD). \end{aligned}$$

En el segundo caso, los segmentos AD y BC' se cortan en P , y el triángulo ABP es común al rectángulo y al paralelogramo, mientras que ninguno contiene al triángulo PDC' que sí es común a los triángulos ADD' y BCC' . Tenemos

$$\begin{aligned} AB \times AD' &= \text{área}(ABC'D') = \text{área}(ADD') - \text{área}(PDC') + \text{área}(ABP) = \\ &= \text{área}(BCC') - \text{área}(PDC') + \text{área}(ABP) = \text{área}(ABCD). \end{aligned}$$

1.12. Definición. Dado un paralelogramo $ABCD$, llamamos *altura* correspondiente al lado AB a la distancia entre las rectas AB y CD .

1.13. Corolario. El área de un paralelogramo es el producto de un lado por la altura correspondiente.

☞ Se compara el paralelogramo con un rectángulo con el lado en común e igual altura correspondiente.

1.14. Corolario. Si un triángulo $T = ABC$ tiene $AC = b$ y la altura correspondiente de longitud h , entonces $\text{área}(T) = (b \times h)/2$.

☞ Uno de los ángulos $\angle A$ o $\angle C$ es agudo. Si es $\angle A$, tomando el simétrico C' de C respecto del punto medio del lado AB , construimos un paralelogramo $ACBC'$ de altura h correspondiente al lado AC , y luego usamos que los triángulos ABC y BAC' son iguales.

2. Teorema de Pitágoras

2.1. Teorema (de Pitágoras, Euclides I.47). Si el triángulo ABC es rectángulo en A , entonces

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

- ✎ Hacemos la demostración en Euclides. En los ejercicios de la práctica 4 vemos otra demostración usando áreas, la «versión china». Más adelante veremos otra usando semejanzas. Hay cientos de demostraciones de este teorema fundamental.
- ✎ Construimos externamente los cuadrados sobre los lados, ABB_1A_1 , ACC_1A_1 y BCC_2B_2 . También trazamos los segmentos B_1C y AB_2 , AP (la altura en A), y PQ (continuación de AP de modo que $Q \in B_2C_2$), como se indica en la figura 3.

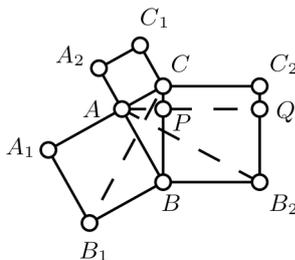


Figura 3: Pitágoras según Euclides

Como $\angle BAC = \angle BAA_1 = 90^\circ$, los puntos C, A, A_1 están alineados. Además $BB_1 \parallel AA_1$ de modo que

$$\text{área}(CBB_1) = \text{área}(ABB_1) = \text{área}(ABB_1A_1)/2.$$

También por ser AP altura es $\angle APB = 90^\circ$ de modo que $\angle QPB = 90^\circ$ y $BB_2 \parallel PQ$, y por lo tanto

$$\text{área}(ABB_2) = \text{área}(PBB_2) = \text{área}(PBB_2Q)/2.$$

Pero los triángulos CBB_1 y B_2BA son iguales pues $CB = B_2B$ (siendo lados del cuadrado BB_2C_2C), $BB_1 = BA$ (siendo lados del cuadrado ABB_1A_1), y $\angle CBB_1 = \angle B_2BA$ (pues ambos son $90^\circ + \angle ABC$), o de otra forma, uno se obtiene a partir del otro rotando 90° alrededor de B . Siendo los triángulos iguales, sus áreas también lo son y entonces

$$AB^2 = \text{área}(ABB_1A_1) = \text{área}(PBB_2Q).$$

De modo similar, $AC^2 = \text{área}(ACC_1A_2) = \text{área}(PCC_2Q)$. Finalmente,

$$BC^2 = \text{área}(BCC_2B_2) = \text{área}(PBB_2Q) + \text{área}(PCC_2Q) = AB^2 + AC^2.$$

2.2. Teorema (recíproco de Pitágoras, Euclides I.48). Si un triángulo ABC es tal que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

entonces el triángulo es rectángulo en A .

- ✎ Sea $A'B'C'$ un triángulo constuido con $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ y $\angle BAC = 90^\circ$. Usando el teorema de Pitágoras, la definición del triángulo $A'B'C'$, y la hipótesis, $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2$, luego $B'C' = BC$ y por «LLL» los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces $\angle BAC = \angle B'A'C' = 90^\circ$.

Bibliografía

[Hea] T. L. HEATH: *The thirteen books of Euclid's Elements*, Dover Publications, 1956.

[Euc] D. E. JOYCE: *Euclid's Elements*, en <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

[Pog] A. V. POGORÉLOV: *Geometría elemental*, Editorial MIR, Moscú, 1974.