

ANÁLISIS BÁSICO DE CIRCUITOS LINEALES

1.-Introducción	3
1.1.-Introducción.	3
1.2.-Magnitudes de Electricidad y Electrónica.	4
1.3.-Elementos circuitales básicos.	5
1.3.1.-Elementos pasivos.	5
Resistores.	5
Capacidad (CONDENSADOR).	6
Inductancia	7
1.3.2.-Elementos activos.	8
Generador ideal de tensión.	8
Generador ideal de corriente.	9
1.4.-Red eléctrica	10
1.5.-Prefijos.	11
2.-Leyes de Kirchoff.	12
2.1.-Ley de los nudos.	12
2.2.-Ley de las mallas.	13
3.-Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes	16
3.1.-Solución de la ecuación homogénea.	17
3.2.-Solución particular de la ecuación completa.	18
- Tipo exponencial.	18
- Tipo polinómico.	19
- Tipo	19
- Combinación lineal de las anteriores	19
4.-Regímenes libre, forzado, transitorio y permanente.	23
5.-Régimen transitorio en sistemas lineales simples	26
5.1.-Régimen transitorio: condiciones lineales y tipos de excitación	26
5.2.-Funciones de excitación básicas.	28
6.-Circuitos de primer orden, respuestas transitorias de circuitos RL y RC	29
7.-Régimen permanente sinusoidal.	39
7.1.-Introducción	39
7.2.-Resolución de un circuito RCL con generadores sinusoidales	40
7.3.-Representación matricial de un circuito (Método de Cramer)	42
7.4.-Impedancia	43
7.4.1.-Concepto de impedancia	43
7.4.2.-Impedancias de elementos circuitales pasivos	43
7.5.-Leyes de Kirchoff para fasores	44

8.-Impedancias y admitancias equivalentes. Combinación de generadores lineales.	47
8.1.-Impedancias en serie y admitancias en paralelo	47
9.-El generador Real.	49
9.1.-Teorema de Millmann (combinación de generadores).	50
10.-Análisis por Mallas	51
11.-Análisis por nudos	53
12.-Fuentes controladas	56
13.-Amplificadores ideales de tensión. El amplificador operacional ideal	58
14.-Bibliografía	61

1.-Introducción

1.1.-Introducción.

Estos apuntes están pensados como complemento a la asignatura de Laboratorio de Tecnología Electrónica y surgen debido a la necesidad de impartir unos conocimientos básicos de las herramientas de análisis de circuitos básicas.

Esta introducción esta concebida como complemento a las explicaciones de clase, centrandose sobre todo en las herramientas matemáticas, a fin de que el alumno tenga disponible un documento, donde aparecen recogidas todas estas herramientas. En ningún momento se han concebido como unos apuntes autónomos de clase, sino como un complemento.

En el primer capítulo de estos apuntes se realiza una introducción donde se ven los múltiplos de las unidades de los elementos circuitales básicos y se realiza una identificación de estos. En el capítulo 2 se explican las leyes de Kirchoff, el dejar un capítulo para explicar las leyes de Kirchoff es debido a su importancia, ya que todas las herramientas de análisis están basadas en estas. Los capítulos 3,4,5 y 6 tratan sobre los mecanismos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales y resolver, utilizando estas, el comportamiento de los circuitos en los distintos regímenes. Los capítulos 7 y 8 están basados en el análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal. El capítulo 9 es una introducción al generador real de tensión y corriente. Los capítulos 10 y 11 se han reservado para explicar mediante un ejemplo las dos técnicas para resolver circuitos, el análisis por mallas y el análisis por nodos. El capítulo 12 esta centrado en los generadores controlados, estos generadores tienen una gran importancia, ya que el comportamiento de la gran mayoría de los dispositivos semiconductores es modelado mediante fuentes controladas. Por último, en el capítulo 14 se realiza una introducción a los amplificadores operacionales.

Existe una abundante bibliografía sobre este tema a la que el alumno puede dirigirse para completar conocimientos. A fin de no abrumar al alumno, aquí solo se han puesto dos referencias. La primera referencia, “Electrónica Analógica”, es un libro muy asequible a los alumnos con multitud de problemas y ejemplos. Si se desea un mayor conocimiento el alumno puede utilizar sin acudir al segundo libro, este libro es mucho más completo, tratando con mucha más profundidad todos los temas aquí expuestos, pero presenta una mayor dificultad de comprensión.

1.2.-Magnitudes de Electricidad y Electrónica.

Las magnitudes básicas empleadas en electrónica son:

Magnitud		Unidad básica		Múltiplos y submúltiplos más usuales	Relación con otras magnitudes
Cantidad de electricidad	Q	Culombio	C	Electrón (e^-) $1C = 6,3 \cdot 10^{18} e^-$	$Q = I \cdot t$
Intensidad	I	Amperio	A	mA μ A nA	$I = Q \cdot t$
Fuerza electromotriz Tensión Diferencia de potencial	Fem U D.d.p	Voltio	V	MV KV mV μ V	
Resistencia	R	Ohmio	Ω	M Ω K Ω m Ω	$R = V/I$
Capacidad	C	Faradio	F	mF μ F nF pF	$C = Q/V$
Autoinducción	L	Henrio	H	mH μ H	
Frecuencia	f	Herzio	Hz	GHz MHz KHz	$f = 1/T = \omega/2\pi$
Pulsación angular	ω	rad/s	rad/s		$\omega = f \cdot 2\pi$

Tabla 1. Magnitudes

1.3.-Elementos circuitales básicos.

Los elementos circuitales se pueden dividir en dos grupos, elementos activos y elementos pasivos, el primer grupo engloba a los elementos resistivos, capacitivos e inductivos, en el segundo grupo tenemos a los generadores, que a su vez se pueden clasificar en generadores de tensión y generadores de corriente.

1.3.1.-Elementos pasivos.

Resistores.

Los resistores presentan una relación lineal entre tensión y corriente expresada en la ecuación (1).

$$V(t) = R I(t) \quad (1)$$

La representación gráfica de la resistencia la podemos ver en la figura 1.

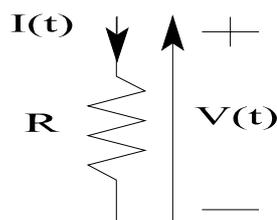


Figura 1

La unidad de medida del resistor es el ohmio y se representa por Ω . Los múltiplos más empleados los podemos ver en la tabla 2.

Nombre	Siglas	Valor
Kilo ohmio	K Ω	$10^3 \Omega$
Mega ohmio	M Ω	$10^6 \Omega$
Giga ohmio	G Ω	$10^9 \Omega$

Tabla 2.

El valor de las resistencias suele venir dado mediante un código de colores, además otra característica de éstas es su tolerancia. La tolerancia indica el rango de error del valor real del valor de la resistencia frente al valor nominal. Así pues, una resistencia de 1000Ω con una tolerancia del 5% su valor real estará comprendido en entre 950Ω y 1050Ω .

El inverso de R se denomina conductancia $G = 1/R \Omega^{-1}$.

$$I(t) = G V(t) \quad (2)$$

Esta unidad se suele emplear para los conductores donde la resistencia es muy pequeña, y da una idea de la capacidad de un material para conducir la electricidad.

La resistencia es un dispositivo que extrae y disipa energía del sistema. De hecho, la capacidad de un dispositivo electrónico de disipar energía se representa como una resistencia de mayor o menor tamaño, en función de la cantidad de energía disipada.

La energía que es capaz de disipar una resistencia depende del valor de la resistencia y de la corriente que circula por ella.

$$Potencia\ disipada = I^2(t)R. \quad (3)$$

Donde I es la corriente que circula por la resistencia y R el valor de la resistencia.

Capacidad (CONDENSADOR).

Las capacidades se caracterizan por su capacidad de almacenar carga, no disipan energía como ocurre con los resistores, si no que la almacenan.

Las capacidades presentan una relación lineal entre la carga y la tensión de la siguiente forma.

$$q(t) = C V(t) \quad (4)$$

La representación gráfica del condensador la podemos ver en la figura 2

La relación entre tensión y corriente viene dada por la ecuación diferencial (5).

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad ; \quad I(t) = C \frac{dV(t)}{dt} \quad (5)$$

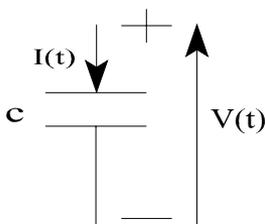


Figura 2

Esta expresión la podemos poner a continuación.

$$V(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt \quad (6)$$

Si conocemos en algún instante t_0 el valor de $V(t)$ podemos transformar la integral en una integral definida de la forma expresada en la ecuación (7).

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t) dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t) dt + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} I(t) dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t) dt + V(t_0) \quad (7)$$

La unidad de medida es el faradio. Se utiliza normalmente submúltiplos de del faradio. Los submúltiplos más empleados aparecen en la tabla 3.

Nombre	Siglas	Valor
micro Faradio	μF	10^{-6} F
nano Faradio	nF	10^{-9} F
pico Faradio	pF	10^{-12} F

Tabla 3.

Inductancia

Las inductancias se caracterizan por su capacidad de almacenar energía, no disipan energía como ocurre con los resistores. La energía en las bobinas es almacenada en forma de campo magnético. Las inductancias presentan una relación lineal entre el flujo magnético y la corriente de la expresada en la ecuación (8).

$$\varphi(t) = L I(t) \quad (8)$$

La representación gráfica de la autoinducción la podemos ver en la figura número 3.

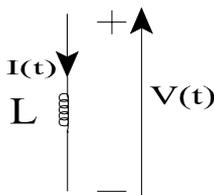


Figura 3

La relación entre tensión y corriente viene dada por una ecuación diferencial.

$$V(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad ; \quad V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (9)$$

Esta ecuación la podemos poner a continuación.

$$I(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt \quad (10)$$

Si conocemos en algún instante t_0 el valor de $i(t)$ podemos transformar la integral en una integral definida como aparece en la ecuación (11).

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V(t) dt = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t V(t) dt + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} V(t) dt = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t V(t) dt + I(t_0) \quad (11)$$

La unidad de medida de la inducción es el Henrio. Los submúltiplos más empleados aparecen en la tabla 4.

Nombre	Siglas	Valor
mili Henrio	mH	10^{-3} H
micro Henrio	μ H	10^{-6} H

Tabla 4.

1.3.2.-Elementos activos.

Generador ideal de tensión.

Mantiene entre sus bornas una tensión independientemente de la corriente que circule. Su resistencia interna es nula. La representación gráfica del generador la podemos ver en la figura 4. Si la tensión entre las bornas del generador es constante el generador se representa gráficamente como en la figura 5.

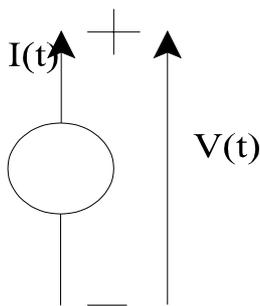


Figura 4

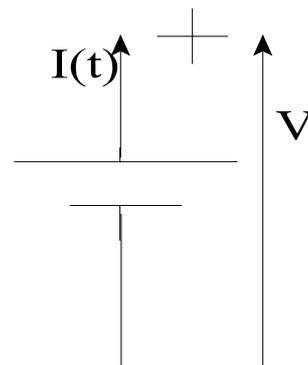


Figura 5

Generador ideal de corriente.

Fija la corriente que circula por el independientemente de la tensión entre sus bornas.

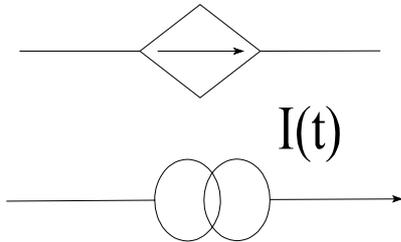


Figura 6

1.4.-Red eléctrica

Definimos red eléctrica como la estructura resultante de la interconexión de elementos circuitales.

Dentro de una red podemos distinguir los siguientes elementos:

Nudos.- Confluencia de dos o más elementos.

Rama.- Elemento o conjunto de elementos entre dos nudos.

Lazo.- Cualquier conjunto de elementos (ramas) que forman un camino cerrado. Cuando un lazo no tiene elementos en su interior se denomina malla.

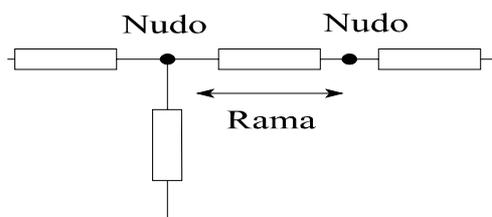


Figura 7

y dos mallas

En la figura 8 podemos ver un ejemplo con tres lazos

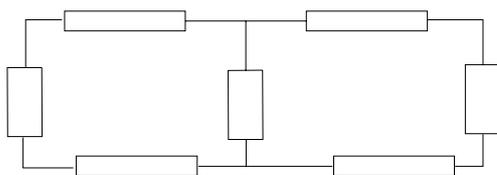


Figura 8

1.5.-Prefijos.

Los prefijos se utilizan anteponiéndose al nombre de la unidad base de una magnitud para formar los nombres de los diferentes múltiplos y submúltiplos de dicha unidad.

Los prefijos más importantes aparecen en la tabla 1.

Nombre	Sigla	Valor
TERA	T...	$\times 1.000.000.000.000 = 10^{12}$
GIGA	G...	$\times 1.000.000.000 = 10^9$
MEGA	M...	$\times 1.000.000 = 10^6$
KILO	K...	$\times 1.000 = 10^3$
unidad	...	$\times 1$
mili	m...	$\div 1.000 = 10^{-3}$
micro	μ ...	$\div 1.000.000 = 10^{-6}$
nano	n...	$\div 1.000.000.000 = 10^{-9}$
pico	p...	$\div 1.000.000.000.000 = 10^{-12}$
femto	f...	$\div 1.000.000.000.000 = 10^{-15}$

Tabla 5. Prefijos

2.-Leyes de Kirchoff.

2.1.-Ley de los nudos.

La suma algebraica de las corrientes que confluyen en un nudo es igual a 0.

$$\sum I_j = 0 \quad (12)$$

La suma de las corrientes que entran es igual a la suma de las corrientes que salen.
Un ejemplo de la primera ley lo podemos ver en la figura 9.

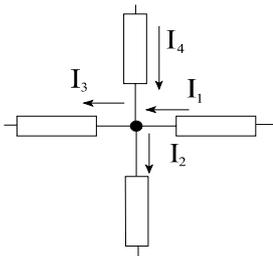


Figura 9

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0 \quad (13)$$

2.2.-Ley de las mallas.

La suma algebraica de las caídas de tensión a lo largo de un lazo es igual a 0.

$$\sum V_j = 0 \quad (14)$$

Antes de continuar, y a fin de utilizar una nomenclatura uniforme a lo largo del texto, utilizaremos las letras minúsculas para indicar tensiones y corrientes variables en el tiempo. Las letras mayúsculas las reservaremos para identificar las tensiones y corrientes constantes en el tiempo o tensiones y corrientes, que si bien presentan una dependencia con el tiempo, poseen una componente constante en el tiempo.

Ejemplo 1

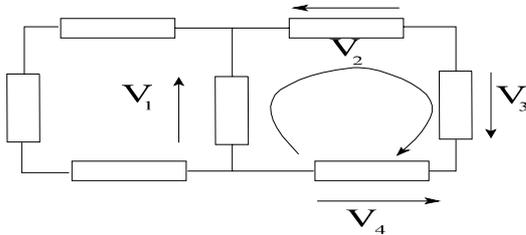


Figura 10

$$V_1 + V_3 - V_2 - V_4 = 0 \quad (15)$$

Si aplicamos los lemas de Kirchoff sobre la malla de la figura 10 tendríamos 6 ecuaciones de las que no todas serían linealmente independientes.

$$i_g = i_{R_1} + i_{R_2} + i_C \quad (16)$$

$$v = v_{R_1} = v_{R_2} = v_C \quad (17)$$

$$i_{R_1} = \frac{v}{R_1} \quad (19)$$

$$i_{R_2} = \frac{v}{R_2} \quad (18)$$

$$i_C = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (20)$$

$$i_g(t) = \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} + C \frac{dv(t)}{dt} \quad (21)$$

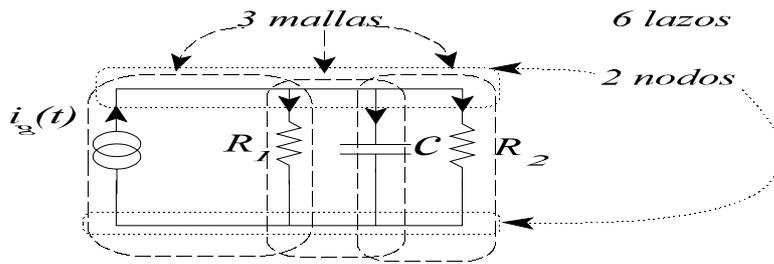


Figura 11

La resolución de la ecuación diferencial da como resultado $v(t)$.

El ejemplo anterior se puede simplificar si agrupamos las dos resistencias como una única resistencia R de la forma $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. La agrupación de impedancias se tratará con más detalle en el tema 8.

Ejemplo 2

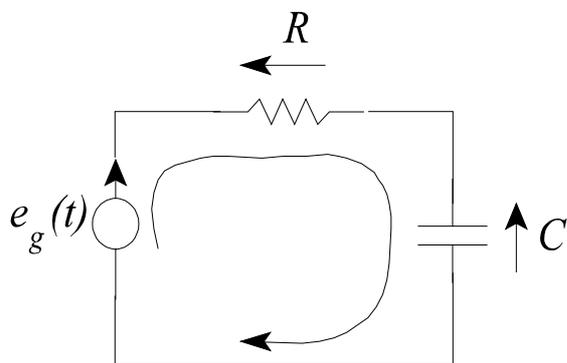


Figura 12

Aplicamos la segunda ley a la malla de la figura 12 tenemos .

$$i_R = i_g = i_C \quad (22)$$

$$e_g(t) = v_R + v_C \quad (23)$$

$$e_g(t) = R i_g(t) + \frac{1}{C} \int i_g(t) dt \quad (24)$$

Ejemplo 3

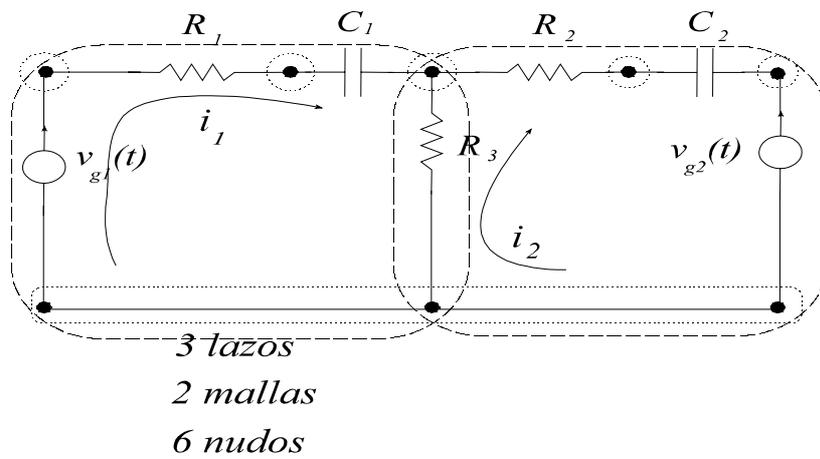


Figura 13

i_1 e i_2 son las corrientes de lazo.

Si analizamos la red de la figura 13 y aplicamos la segunda ley tenemos:

Malla 1

$$i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_3 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = v_{g1}(t) \quad (25)$$

Malla 2

$$i_2 R_2 + (i_2 - i_1) R_3 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + v_{g2}(t) = 0 \quad (26)$$

3.-Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

Como hemos podido ver en los ejemplos anteriores, para la descripción de la evolución de las variables circuitales tensión y corriente a lo largo del tiempo, es necesario recurrir a la utilización de ecuaciones diferenciales de primer orden. Si además de condensadores y resistores utilizamos bobinas necesitaremos ecuaciones diferenciales de segundo orden. Así pues antes de continuar es necesario explicar la resolución de las ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial de grado n se puede expresar de forma general como:

Donde a_0, a_1, a_{n-1}, a_n son coeficientes constantes.

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = f(t) \quad (27)$$

La solución general de la ecuación se puede descomponer en dos términos de la forma

$$v(t) = v_H(t) + v_p(t).$$

$v_H(t)$ - Solución general de la ecuación homogénea, se obtiene cuando $f(t) = 0$.

$v_p(t)$ - Solución particular de la ecuación completa.

3.1.-Solución de la ecuación homogénea.

La ecuación homogénea se obtiene igualando $f(t) = 0$ con lo que queda la ecuación diferencial de la siguiente manera.

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv(t)}{dt} + a_0 v(t) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \quad (28)$$

Para calcular $v(t)$ recurrimos a la denominada **ecuación característica**, consiste en un polinomio del mismo orden de la ecuación diferencial y cuyos coeficientes son los mismos que los de la ecuación diferencial (27).

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i r^i = 0 \quad (29)$$

Es necesario hallar las raíces de la ecuación característica, se pueden dar varios casos.

1- La ecuación posee raíces simples r_1, r_2, \dots, r_n donde $r_i \neq r_j$ para todo $i \neq j$.

En este caso la solución general adopta la forma:

$$A_n e^{t r_n} + A_{n-1} e^{t r_{n-1}} + \dots + A_1 e^{t r_1} = \sum_{i=1}^n A_i e^{t r_i} = v_H(t) \quad (30)$$

2- La ecuación posee raíces múltiples $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_m, r_{m+1}, \dots, r_n$ donde $m < n$ $r_i \neq r_j \forall i, j$ tal que $i \neq j$ y $i, j = m+1, \dots, n$.

En este caso la solución general tendrá dos formas:

$$A_n e^{t r_n} + \dots + A_{m+1} e^{t r_{m+1}} + (A_m t^{m-1} + A_{m-1} t^{m-2} + \dots + A_2 t + A_1) e^{t r_1} = v_H(t) \quad (31)$$

3- La ecuación presenta raíces complejas. En este caso si un número complejo es raíz de la ecuación su conjugado también es raíz. Además, se cumple:

$$r_i^* = r_j \Rightarrow A_i^* = A_j.$$

$$r_i = \sigma_i + \omega_i \quad A_i = |A_i| e^{i\varphi_i} \quad (32)$$

$$v_H(t) = A_i e^{r_i t} + A_j e^{r_j t} = 2 \operatorname{Re}[A_i e^{r_i t}] = 2 |A_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (33)$$

3.2.-Solución particular de la ecuación completa.

Para resolver la ecuación particular se ensayan soluciones del mismo tipo que $f(t)$. También podemos distinguir varios casos.

- **Tipo exponencial.** La función de excitación tiene la forma de la ecuación (34).

$$f(t) = A_0 e^{r_0 t} \quad (34)$$

Existen varios casos:

1.- Si r_0 no es solución de la ecuación característica ensayamos una solución particular de la forma de la ecuación (35) y obtenemos B.

$$v_p(t) = B e^{r_0 t} \quad (35)$$

$$B (a_n r_0^n + a_{n-1} r_0^{n-1} + \dots + a_1 r_0 + a_0) e^{r_0 t} = A_0 e^{r_0 t} \quad (36)$$

$$B = \frac{A_0}{(a_n r_0^n + a_{n-1} r_0^{n-1} + \dots + a_1 r_0 + a_0)} \quad (37)$$

2.- Si r_0 es solución simple de la ecuación característica ensayamos una solución particular de la forma de la ecuación (38).

$$v_p(t) = B t e^{r_0 t} \quad (38)$$

3.- Si r_0 es solución doble ensayamos una solución particular de la forma de la ecuación (39).

$$v_p(t) = B t^2 e^{r_0 t} \quad (39)$$

4.- Si r_0 es solución de orden m la ecuación particular a probar la podemos ver en la ecuación (40).

$$v_p(t) = B t^m e^{r_0 t} \quad (40)$$

- **Tipo polinómico.** La función de excitación tiene la forma de la ecuación (41).

$$f(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0 \quad (41)$$

En este caso se sustituye el polinomio en la ecuación diferencial y se identifican los coeficientes.

- **Tipo trigonométrico.** La función de excitación tiene la forma de la ecuación (42).

$$f(t) = B_0 \sin(\omega_0 t) + C_0 \cos(\omega_0 t) \quad (42)$$

En este caso también tenemos varios tipos posibles de soluciones de la ecuación particular.

1.- Si $j\omega_0$ no es raíz de la ecuación diferencial

$$v_p(t) = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t) \quad (43)$$

2.- Si $j\omega_0$ es raíz simple

$$v_p(t) = B t \sin(\omega_0 t) + C t \cos(\omega_0 t) \quad (44)$$

- **Combinación lineal de las anteriores**

Se hallan las soluciones particulares de cada uno de los sumandos y se suman.

$$v_{p_{total}} = \sum v_{p_i} \quad (45)$$

Ejemplo 4

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = -3t^2 + t + 1$$

La solución posee una componente homogénea y una componente particular : $v = v_H + v_p$
Calculo de la ecuación homogénea.

$$\frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = 0 \quad (47)$$

Para calcular la solución el primer paso es obtener la ecuación característica:

$$\begin{aligned} r + 4 &= 0 \\ r &= -4 \end{aligned} \quad (48)$$

La ecuación característica es un polinomio cuyos coeficientes son los mismos que los de la ecuación homogénea y las incógnitas están elevadas a la misma potencia que la derivada que acompaña al coeficiente.

La solución de la ecuación homogénea queda:

$$v_H(t) = Ae^{-4t} \quad (49)$$

Para obtener la solución de la ecuación particular, puesto que la función de excitación es de tipo polinómico probábamos una solución particular de tipo polinómico:

$$a_2t^2 + a_1t + a_0 \quad (50)$$

Ahora sustituimos esta solución en la ecuación diferencial e identificamos coeficientes:

$$\begin{aligned} \frac{d(a_2t^2 + a_1t + a_0)}{dt} + 4(a_2t^2 + a_1t + a_0) &= -3t^2 + t + 1 \\ 2a_2t + a_1 + 4a_2t^2 + 4a_1t + 4a_0 &= -3t^2 + t + 1 \\ 4a_2 &= -3 \\ 2a_2 + 4a_1 &= 1 \\ a_1 + 4a_0 &= 1 \end{aligned} \quad (51)$$

$$v_P(t) = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{8}t - \frac{3}{32}$$

La solución completa de la ecuación diferencial es:

$$v(t) = Ae^{-4t} - \frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{8}t - \frac{3}{32} \quad (52)$$

Ejemplo 5

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 5 \frac{dv(t)}{dt} + 6 v(t) = 2 e^{5t} \quad (53)$$

Procedemos de igual forma que en el ejemplo anterior. $v(t) = v_H(t) + v_P(t)$

Solución de la ecuación homogénea $v_H(t)$

Planteamos su ecuación característica y la resolvemos.

$$r^2 + 5 r + 6 = 0 \quad (54)$$

$$r = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 24}}{2} \Rightarrow r_1 = -2, r_2 = -3 \quad (55)$$

$$v_H = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} \quad (56)$$

Para obtener la solución particular, puesto que la función de excitación es de tipo exponencial probamos con una solución de tipo exponencial (ecuación 35). Luego la función a probar la podemos ver en la ecuación (57).

$$v_P(t) = B e^{5t} \quad (57)$$

Puesto que la particular es solución de la ecuación diferencial introducimos esta solución en la ecuación diferencial para hallar B.

$$(25 B + 25 B + 6 B) e^{5t} = 2 e^{5t} \quad ; \quad B = \frac{1}{28} \quad (58)$$

Luego la solución completa de la ecuación diferencial queda:

$$v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + \frac{1}{28} e^{5t} \quad (59)$$

Para poder obtener los valores de A_1 y A_2 necesitamos una serie de condiciones de contorno. Si se dan las siguientes condiciones de contorno:

$$v(t=0) = 8 \quad (60)$$

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1 \quad (62)$$

\Leftrightarrow

$$A_1 + A_2 + \frac{1}{28} = 8 \quad (61)$$

$$-2 A_1 - 3 A_2 + \frac{5}{28} = 1 \quad (63)$$



Cuando $t \rightarrow \infty$ la solución homogénea tiende a desaparecer quedando únicamente la solución particular. Esto es lo que ocurre en las redes reales.

Ejemplo 6

$$\frac{dv(t)}{dt} + 3 v(t) = \frac{1}{2} \cos(t) \quad (64)$$

Para resolver esta ecuación diferencial procedemos como en los casos anteriores. Ecuación homogénea (65).

$$3r + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -3 \quad \Rightarrow \quad v_H = A e^{-3t} \quad (65)$$

La función de excitación es de tipo trigonométrico, por lo cual la solución particular a probar será de tipo trigonométrico.

$$v_p(t) = B \cos(t) + C \sin(t) \quad (66)$$

$$\frac{dv_p(t)}{dt} = -B \sin(t) + C \cos(t) \quad (67)$$

$$-B \sin(t) + C \cos(t) + 3B \cos(t) + 3C \sin(t) = \frac{1}{2} \cos(t) \quad (68)$$

$$3C - B = 0 \quad B = 3/20$$

$$3B + C = 1/2 \quad C = 1/20$$

En la ecuación (69) podemos ver la solución completa de la ecuación diferencial.

$$v(t) = A e^{-3t} + \frac{3}{20} \cos(t) + \frac{1}{20} \sin(t) \quad (69)$$

4.-Regímenes libre, forzado, transitorio y permanente.

- **Régimen libre**
Respuesta del circuito cuando desaparece la excitación. Su descripción viene dada por la solución homogénea de la ecuación diferencial. Solo depende de la estructura del circuito de los elementos pasivos.
- **Régimen forzado**
Su descripción viene dada por la solución particular de la ecuación diferencial, y depende de la excitación del circuito.
- **Régimen transitorio**
Respuesta de la red en el primer intervalo de tiempo después de conectar la excitación. Régimen transitorio = Régimen libre + Régimen forzado en el instante inicial.
- **Régimen permanente**
Respuesta de la red a partir del primer intervalo de tiempo después del transitorio.

Régimen libre solución general:

$$v_H(t) = \sum A_k e^{r_k t} + \sum (A_1 + A_2 t + \dots + A_m t^{m-1}) e^{r_i t} + \sum B_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (70)$$

donde las raíces se pueden expresar como $r_i = \sigma_i + j\omega_i$ y se cumple que $\sigma_i \leq 0$ con lo que los términos $e^{\sigma t}$ tienden a 0 con el tiempo y el régimen libre tiende a desaparecer.

Aplicación a circuitos RCL

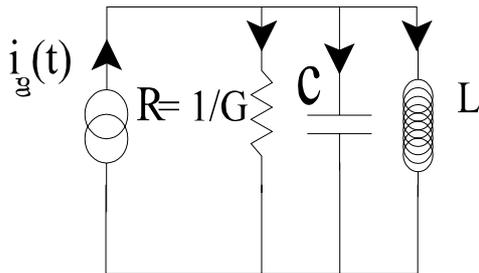


Figura 14

Las ecuaciones diferenciales del circuito de la figura aplicando la primera ley de Kirchoff son:

$$G v(t) + \frac{1}{L} \int v(t) dt + C \frac{dv(t)}{dt} = i_g(t) \quad (71)$$

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \frac{d}{dt} [i_g(t)] \quad (72)$$

Casos :

Generador de corriente continua $\Rightarrow i_g(t) = I_{CC}$

En este caso particular la solución de la ecuación diferencial es igual a la solución de la ecuación homogénea.

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \frac{d}{dt}[i_g(t)] = 0 \quad (73)$$

$$r^2 + \frac{G}{C} r + \frac{1}{LC} = 0 \quad r_1, r_2 \quad (74)$$

1.- $r_1 = r_2^*$

$$v(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = A e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (75)$$

$$A = 2 |A_1| \quad \varphi = \arg [A_1] \quad \sigma \leq 0 \quad (76)$$

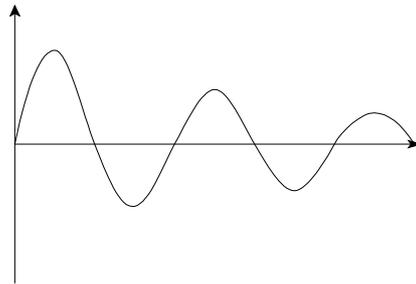


Figura 15

Cuando $t \Rightarrow \infty$ toda la corriente del generador tiende a pasar por la bobina (la caída de tensión en bornas de la bobina es 0).

2.- $r_1 \neq r_2$ y reales.

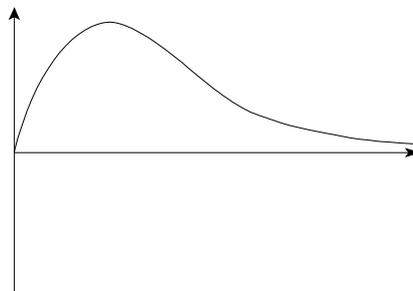


Figura 16

$i_g(t)$ Función exponencial $i_g(t) = I_g e^{rt}$

En este caso la solución de la ecuación viene dada por la solución completa.
Ecuación homogénea.

$$v_H(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (77)$$

Cálculo de la solución particular:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \frac{d}{dt} [i_g(t)] = \frac{I}{C} r e^{rt} \quad (78)$$

Probamos soluciones del tipo $v_p = A e^{rt}$ con lo cual la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$(A r^2 + A \frac{G}{C} r + \frac{A}{LC}) e^{rt} = r \frac{I}{C} e^{rt} \quad (79)$$

$$A = \frac{I}{C r + G + \frac{1}{L r}} \quad (80)$$

En el caso que las raíces r_1 y r_2 sean complejas se cumple que $r_1 = r_2^*$ y la solución es de la forma de la ecuación (81).

$$v(t) = A e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{I}{C r + G + \frac{1}{L r}} e^{rt} \quad (81)$$

De todas formas quedan dos constantes por determinar (A y φ o A_1 y A_2) por lo que son necesarias dos condiciones de contorno.

5.-Régimen transitorio en sistemas lineales simples

5.1.-Régimen transitorio: condiciones lineales y tipos de excitación

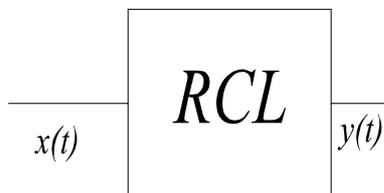


Figura 17

La ecuación que caracteriza un circuito RCL genérico se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} + a_0 y(t) = \sum_{i=1}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} + b_0 x(t) \quad (82)$$

La solución como hemos comentado anteriormente se puede escribir como $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$. Para resolver la ecuación necesito tantas condiciones iniciales como el orden de la ecuación.

Condiciones iniciales primarias

- Resistencia

$$v(t) = R i(t)$$

No se necesitan condiciones de contorno, no tiene memoria (no necesitamos conocer el valor de i en t_0).

- Inducción

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt + i(t_0) \quad (83)$$

Necesitamos conocer las condiciones iniciales para la resolución del problema.

Una de las características a tener en cuenta a la hora de seleccionar las condiciones iniciales necesarias es que la corriente no puede variar bruscamente en una bobina (pero sí la tensión).

Supongamos un circuito formado por una bobina y un generador de tensión constante. En el instante t_0 cerramos el circuito, podemos distinguir dos instantes iniciales, el instante infinitesimal previo a cerrar el circuito y el instante infinitesimal posterior a cerrar el circuito. En una bobina el flujo magnético no puede variar bruscamente por lo que la corriente tampoco puede, así pues, podemos decir $i(0^-) = i(0^+)$.

- *Capacidad*

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + v(t_0) \quad (84)$$

Necesitamos conocer las condiciones iniciales para la resolución del problema.

Una de las características a tener en cuenta a la hora de seleccionar las condiciones iniciales necesarias es que la tensión no puede variar bruscamente en un condensador (pero sí la corriente).

De forma análoga al caso anterior supongamos un circuito formado por un condensador y un generador de corriente constante. En el instante t_0 cerramos el circuito, podemos distinguir dos instantes iniciales, el instante infinitesimal previo a cerrar el circuito y el instante infinitesimal posterior a cerrar el circuito.

$$v(0^+) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i(t) dt + v(0^-) = v(0^-) \quad (85)$$

5.2-Funciones de excitación básicas.

1.- Escalón unidad.

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (86)$$

2.- Función pulso

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (87)$$

3.- Función exponencial

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases} \quad (88)$$

4.- Función sinusoidal

$$x(t) = \text{sen} (\omega t + \varphi) \quad (89)$$

6.-Circuitos de primer orden, respuestas transitorias de circuitos RL y RC

Definimos como circuitos de primer orden a aquellos que solo tienen un tipo de elemento reactivo (capacidad o inductancia, pero no de los dos tipos simultáneamente).

1.- Circuito RL. (Figura 18).

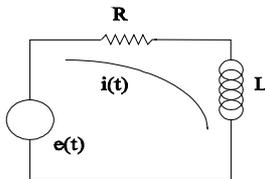


Figura 18

- Función de excitación: Función escalón $e(t) = E u_{-1}(t)$

Para este caso la ecuación diferencial resultante viene dada por la ecuación (90).

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E \quad t > 0 \quad (90)$$

Al ser una ecuación diferencial de primer orden únicamente se necesita una condición inicial para la cual escogemos $i(0) = 0$ (la corriente no puede variar de forma brusca en una bobina).

La ecuación característica queda: $R + L r = 0$ $r = -R/L$ y la solución de la ecuación homogénea queda como:

$$i_H(t) = A e^{-\frac{R}{L} t} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (91)$$

Para el cálculo de la ecuación particular interpretamos que la función excitación es de tipo polinómico con lo que:

$$i_P(t) = \frac{E}{R} \quad (92)$$

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \quad (93)$$

Para el cálculo de la constante A aplicamos la condición inicial en la bobina

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = i(0) = 0$$

$$0 = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = -\frac{E}{R} \quad (94)$$

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (95)$$

- τ Tiempo que tarda en llegar a su valor final si crece de la misma forma que su valor inicial.
- t_e Tiempo de subida. Tiempo que tarda en llegar del 10 % del valor final al 90 % del valor final $\approx 2.2 \tau$
- t Tiempo que tarda en llegar al 99 % de su valor final $\approx 5 \tau$

- Función de excitación: Función pulso.

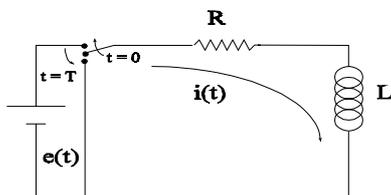


Figura 19

Podemos dividir el tiempo en tres partes $t < 0$, $0 < t < T$ y $t > T$. Para el tiempo $0 < t < T$ es idéntico al caso anterior con lo que ecuación queda:

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad 0 < t < T \quad (96)$$

Nos queda estudiar el caso para $t > T$

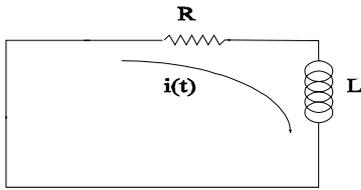


Figura 20

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad t > T \quad (97)$$

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (98)$$

Condición inicial

$$i(T) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \quad (99)$$

$$i(T) = A e^{-\frac{T}{\tau}} = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \Rightarrow A = \frac{E}{R} (e^{\frac{T}{\tau}} - 1) = I e^{\frac{T}{\tau}} \quad (100)$$

$$i(t) = I e^{-\frac{T-t}{\tau}} \quad t > T \quad (101)$$

- Función de excitación: Función sinusoidal.

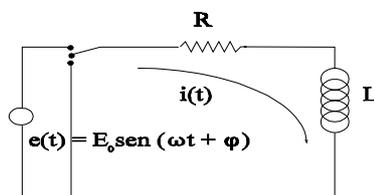


Figura 21

Ecuación diferencial :

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = Ee(t) \quad t > 0 \quad (102)$$

Al ser una ecuación diferencial de primer orden solo necesito una única condición inicial para lo cual escogemos $i(0) = 0$.

$$i_H(t) = A e^{-\frac{R}{L}t} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (103)$$

Para el cálculo de la solución particular ponemos la excitación en forma exponencial.

$$e(t) = \operatorname{Re}[e^{-j\frac{\pi}{2}} E_o e^{j(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[E e^{j\omega t}] \quad E = -jE_o e^{j\varphi} \quad (104)$$

$$i_p(t) = I e^{j\omega t} \quad (105)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$R I + j\omega L I = E \quad I = \frac{E}{R + j\omega L} = \frac{E}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{\frac{1}{2}} e^{j\Psi}} \quad (106)$$

$$\operatorname{tag}^{-1}\Psi = \omega \frac{L}{R} \quad (107)$$

$$I = -\frac{jE_o}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-j(\varphi - \Psi)} \quad (108)$$

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \Psi) \quad (110)$$

$$i_p(t) = \text{Re}[I e^{j\omega t}] = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \Psi) \quad (109)$$

$$0 = A + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\varphi - \Psi) \quad (111)$$

$$A = - \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\varphi - \Psi) \quad (112)$$

$$i(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} [\sin(\omega t + \varphi - \Psi) - \sin(\varphi - \Psi) e^{-\frac{t}{\tau}}] \quad (113)$$

2.- Circuito RC. (Figura 22).

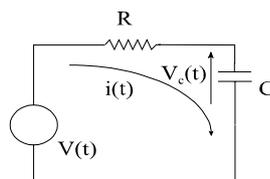


Figura 22

- Función de excitación: Función escalón $v(t) = V_{cc} u_1(t)$

Para este caso la ecuación diferencial queda:

$$R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_{cc} \quad t > 0 \quad (114)$$

Esta ecuación la podemos reescribir en función de $v_c(t)$.

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad CR \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = V_{cc} \quad (115)$$

Al ser una ecuación diferencial de primer orden se necesita una única condición inicial para lo cual escogemos $v_c(0) = 0$ (la tensión no puede variar de forma brusca en un condensador).

$$v_H(t) = A e^{-\frac{1}{RC} t} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (116)$$

Para el cálculo de la ecuación particular interpretamos que la función excitación es de tipo polinómico con lo que:

$$v_P(t) = V_{cc} \quad (117)$$

$$v_c(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{cc} \quad (118)$$

Para el cálculo de la constante A aplicamos la condición inicial en el condensador

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$$

$$0 = A + V_{cc} \quad \Rightarrow \quad A = -V_{cc} \quad (119)$$

$$v_c(t) = V_{cc} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (120)$$

$$i(t) = \frac{V_{cc}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (121)$$

En la fase inicial de carga el condensador equivale a un cortocircuito, conforme el condensador se carga disminuye al corriente que circula por él, cuando el condensador esta completamente cargado equivale a un circuito abierto.

- Función de excitación: Función pulso.

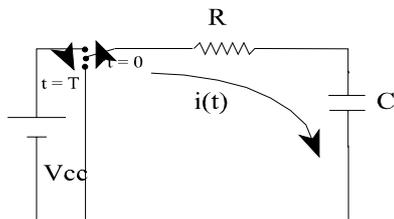


Figura 23

Podemos dividir el tiempo en tres partes $t < 0$, $0 < t < T$ y $t > T$. Para el tiempo $t > T$ es idéntico al caso anterior con lo que ecuación queda:

$$v_c(t) = V_{cc} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad 0 < t < T \quad (122)$$

Nos queda estudiar el caso para $t > T$

$$\frac{v_c(t)}{RC} + \frac{dv_c(t)}{dt} = 0 \quad t > T \quad (123)$$

La condición inicial viene dada en la ecuación (124).

$$v_c(T) = V_{cc} (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \quad (124)$$

$$v_c(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (125)$$

$$v_c(T) = A e^{-\frac{T}{\tau}} = V_{cc} (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) \Rightarrow A = V_{cc} (e^{\frac{T}{\tau}} - 1) \quad (126)$$

$$v_c(t) = V_{cc} (e^{\frac{T}{\tau}} - 1) e^{-\frac{t}{\tau}} = V e^{-\frac{t-T}{\tau}} \quad (127)$$

- Función de excitación: Función sinusoidal.

$$\frac{v_c(t)}{RC} + \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{e(t)}{RC} \quad t > 0 \quad (128)$$

Al ser una ecuación diferencial de primer orden solo necesito una única condición inicial para lo cual escogemos $v(0) = 0$.

$$v_H(t) = A e^{-\frac{1}{RC} t} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (129)$$

Para el cálculo de la solución particular ponemos la excitación en forma exponencial. La función de excitación tiene la forma de la ecuación

$$e(t) = \operatorname{Re}[e^{-j\frac{\pi}{2}} V_g e^{j(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[V e^{j\omega t}] \quad V = -jV_g e^{j\varphi} \quad (130)$$

$$v_P(t) = V e^{j\omega t} \quad (131)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$V = V_g \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (132)$$

$$v_P(t) = \operatorname{Re}[V e^{j\omega t}] = \frac{V_g}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} \sin(\omega t + \varphi - \Psi) \quad (133)$$

$$v_c(t) = \frac{V_g}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} [\sin(\omega t + \varphi - \Psi) - \sin(\varphi - \Psi) e^{-\frac{t}{\tau}}] \quad (134)$$

Esta construcción se denomina filtro paso bajo, pues como podemos ver en la ecuación atenúa las altas frecuencias dejando pasar las bajas.

Se denomina frecuencia de corte al valor $f_c = 1 / (2\pi RC)$ e indica la frecuencia a partir de la cual la amplitud de la señal es atenuada más de

Un caso especial del filtro paso bajo es el circuito integrador. En este caso la constante τ es mucho mayor que el tiempo de observación del circuito, con lo que durante ese tiempo el circuito se encuentra en régimen transitorio.

7.-Régimen permanente sinusoidal.

7.1.-Introducción

Denominamos fasor a un número complejo expresado de forma exponencial $A = a + bj = |A| e^{j\varphi}$

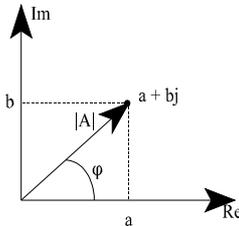


Figura 24

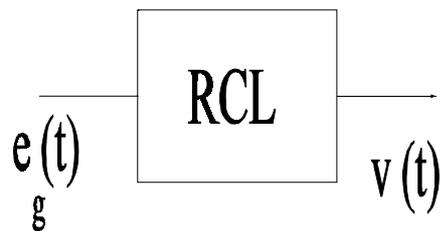
Nota La utilización de notación exponencial (fasores) cuando los generadores son de tipo sinusoidal viene dado por una cuestión de simplificación.

$$v_g(t) = |V_g| \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[|V_g| e^{j(\omega t + \varphi)}] = |V_g| \text{Re}[e^{j(\omega t + \varphi)}] \quad (137)$$

$$i_g(t) = |I_g| \sin(\omega t + \theta) = \text{Im}[|I_g| e^{j(\omega t + \theta)}] = |I_g| \text{Re}[e^{j(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2})}] \quad (136)$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \quad (138)$$

7.2.-Resolución de un circuito RCL con generadores sinusoidales



Si partimos de la ecuación diferencial de un circuito RCL:

$$G v(t) + \frac{1}{L} \int v(t) dt + C \frac{dv(t)}{dt} = \Sigma Re[i_g(t) |D| e^{j(\omega t + \varphi)}] \quad (139)$$

y tomamos soluciones particulares del mismo tipo exponencial.

$$v_p = B e^{j\omega t}$$

$$\frac{dv_p}{dt} = B j\omega e^{j\omega t}$$

$$v_p dt = \frac{1}{j\omega} B e^{j\omega t}$$

$$v(t) = Re[Be^{j\omega t}]$$

Con lo, cual la solución para el régimen permanente queda:

Para la resistencia

R es el valor de la resistencia

$$v(t) = Ri(t) \quad (144)$$

Para el condensador

$$v(t) = \frac{i(t)}{i\omega C} \quad (145)$$

C es el valor en faradios del condensador y ω el valor de la pulsación angular en radianes/segundo

Para la inductancia (bobina)

$$v(t) = j\omega L i(t) \quad (146)$$

L es el valor en Henrios de la bobina y ω el valor de la pulsación angular en radianes/segundo

Nota La utilización fasores simplifica las operaciones de derivación e integración, para obtener la solución basta con obtener la parte real.

7.3.-Representación matricial de un circuito (Método de Cramer)

Antes de continuar veamos la representación matricial de un sistema. Sea un sistema con n nudos tenemos un sistema con n ecuaciones siendo la ecuación para cada nudo.

$$\begin{aligned} A_{11} V_1 + A_{12} V_2 + \dots + A_{1n} V_n &= \sum I_{gk}^1 \\ A_{21} V_1 + A_{22} V_2 + \dots + A_{2n} V_n &= \sum I_{gk}^2 \\ \dots & \\ A_{n1} V_1 + A_{n2} V_2 + \dots + A_{nn} V_n &= \sum I_{gk}^n \end{aligned}$$

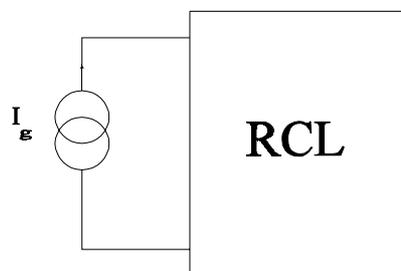
V_i Tensión nudo i

I_{gk}^i Corriente generada por el generador k que entra en el nudo i

Este conjunto de ecuaciones se puede representar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum I_{gk}^1 \\ \sum I_{gk}^2 \\ \dots \\ \sum I_{gk}^n \end{pmatrix} \quad (147)$$

Resolución :



$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} I_g & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$$

7.4.-Impedancia

7.4.1.-Concepto de impedancia

Impedancia compleja Únicamente tiene sentido hablar de ella en régimen permanente sinusoidal.

$$Z(j\omega) = \frac{V}{I_g} \quad (152)$$

Admitancia compleja Se define como la inversa de la impedancia compleja.

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{I_g}{V} \quad (153)$$

7.4.2.-Impedancias de elementos circuitales pasivos

1.- Resistencia.

$$\begin{aligned} i(t) &\Rightarrow I e^{i\omega t} \\ v(t) &\Rightarrow V e^{i\omega t} \\ v(t) &= R i(t) \\ V e^{i\omega t} &= R I e^{i\omega t} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Z_R = R, \quad Y_R = 1/R$$

2.- Inductancia

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ V &= j\omega L I \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Z_L = j\omega L$$

3.- Capacidad

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dV(t)}{dt} \\ I &= j\omega C V \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Z_C = 1 / j\omega C$$

7.5.-Leyes de Kirchoff para fasores

1) Las sumas de corrientes en un nudo debe de ser 0

$$\sum i_k(t) = 0 \Rightarrow \text{En régimen permanente } \sum I_k = 0$$

2) Las sumas de tensiones en una malla debe de ser 0

$$\sum v_k(t) = 0 \Rightarrow \text{En régimen permanente } \sum V_k = 0$$

Ejemplo 7

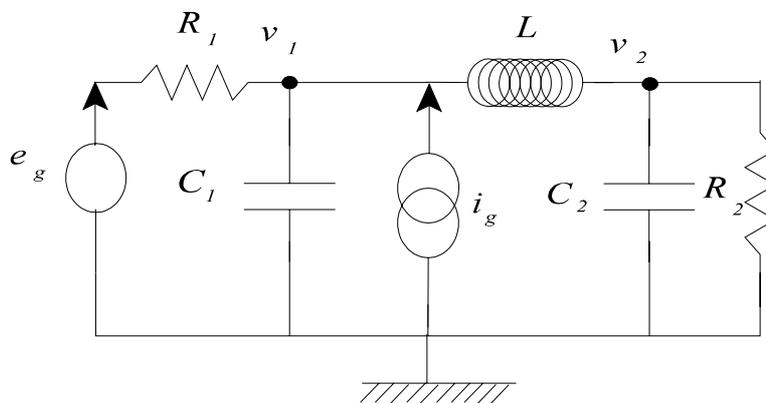


Figura 26

$$e_g = E_0 \cos(\omega t)$$

$$i_g = I_0 \sin(\omega t)$$

Analizando la red por nudos (existen 2 nudos mas tierra y 4 mallas).

$$\frac{e_g - v_1}{R_1} - C_1 \frac{dv_1}{dt} - \frac{1}{L} \int (v_1 - v_2) dt = -i_g \quad (156)$$

$$\frac{e_g - v_1}{R_1} - C_1 \frac{dv_1}{dt} - \frac{1}{L} \int (v_1 - v_2) dt = -i_g \frac{v_2}{R_2} + C_2 \frac{dv_1}{dt} \quad (157)$$

Sistema con dos ecuaciones diferenciales de 2^o grado

Por convenio se interpretan que las corrientes entrantes al nudo son positivas y las corrientes salientes son negativas.

Si ahora utilizamos fasores para el análisis podemos describir el sistema:

$$e_g = E_0 \cos(\omega t) = \text{Re} [E_0 e^{j\omega t}]$$

$$\text{Fasor: } E_g = E_0$$

$$i_g = I_0 \sin(\omega t) = \text{Re}[-j I_0 e^{j\omega t}] = \text{Re}[I_0 e^{-j\pi/2} e^{j\omega t}] \quad \text{Fasor } I_g = -j I_0 = I_0 e^{-j\pi/2}$$

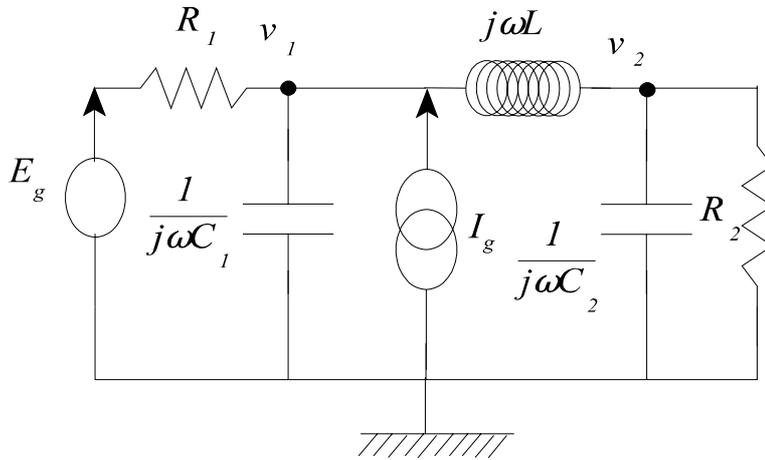


Figura 27

$$v_1 \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L} \right) - \frac{v_2}{j\omega L} = \frac{E_g}{R_1} + I_g e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (158)$$

$$v_1 \left(-\frac{1}{j\omega L} \right) + v_2 \left(j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} \right) dt = \frac{v_2}{R_2} + C_2 \frac{dv_1}{dt} \quad (159)$$

Resolviendo por el método de Cramer (matricialmente)

$$\Delta = \begin{vmatrix} j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{j\omega L} & j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_1} \end{vmatrix} = \quad (160)$$

$$-C_1 C_2 \omega^2 + \left(\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) j\omega + \left(\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{C_1 + C_2}{L} \right) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{j\omega L}$$

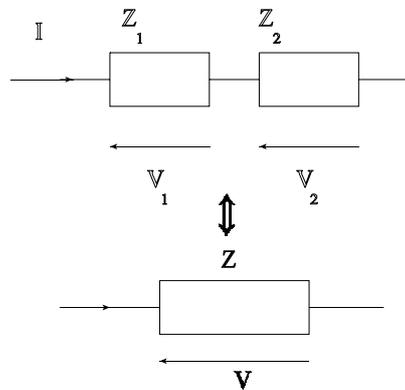
Para obtener v_2

$$\Delta v_2 = \begin{vmatrix} j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_1} & -I_0 e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{E_0}{R_1} \\ -\frac{1}{j\omega L} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{E_0}{R_1} - jI_0 \right) \frac{1}{j\omega L} \quad (161)$$

$$v_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta} \quad (162)$$

8.-Impedancias y admitancias equivalentes. Combinación de generadores lineales.

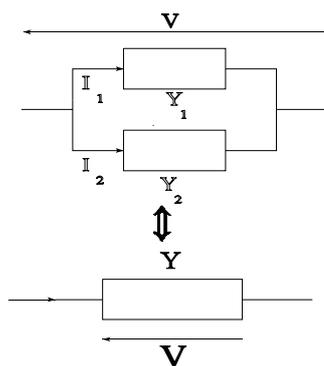
8.1.-Impedancias en serie y admitancias en paralelo.



$$Z_1 I + Z_2 I = V_1 + V_2 = V \quad (163)$$

$$Z = \frac{V}{I} = Z_1 + Z_2 \quad (164)$$

Figura 28



$$Y_1 V + Y_2 V = I_1 + I_2 = I \quad (165)$$

$$Y = \frac{I}{V} = Y_1 + Y_2 \quad (166)$$

Figura 29

Un caso de agrupamiento de impedancias es la estructura en escalera

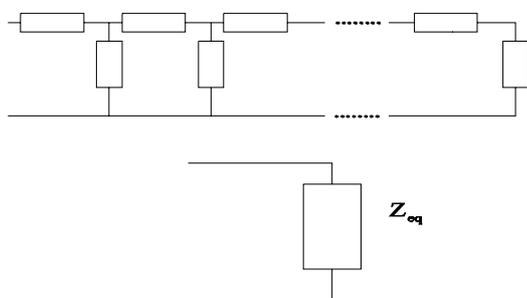


Figura 30

En la figura 31 podemos ver como se resuelve esta estructura agrupando las impedancias de derecha a izquierda de la forma 2 serie-2 paralelo.

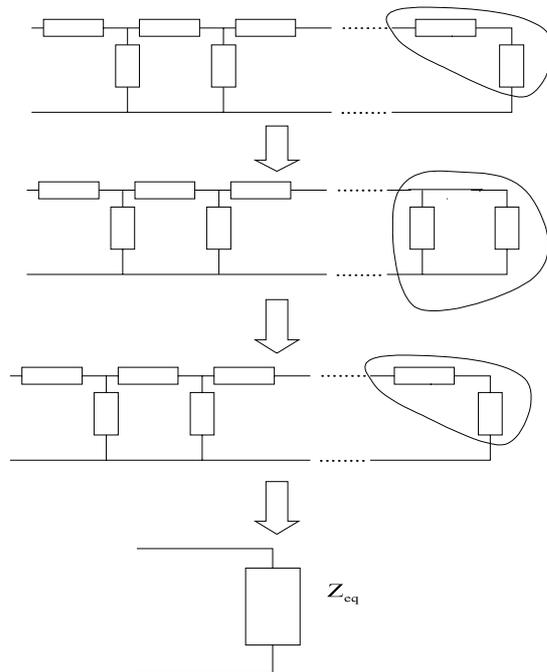


Figura 31

9.-El generador Real.

El generador real presenta una impedancia interna distinta de 0 que se denomina Z_g

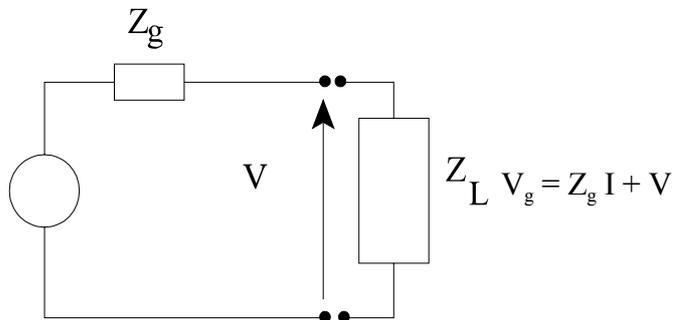


Figura 32

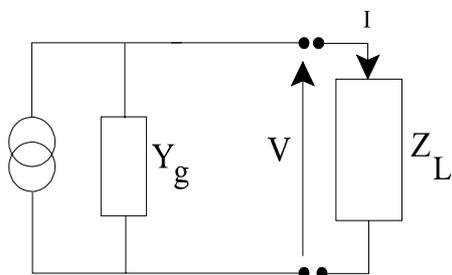


Figura 33

De forma análoga el generador real de corriente tiene una admitancia interna distinta de 0 (resistencia distinta de infinito).

$$I_g = V Y_g + I$$

I

Para un generador real de tensión es posible encontrar un generador real de corriente equivalente y al contrario.

$$\frac{V_g}{Z_g} = I + V Y_g = I_g \quad (167)$$

9.1.-Teorema de Millmann (combinación de generadores).

N generadores de tensión puestos en paralelo con admitancias internas Y_i se pueden poner como un único generador real de corriente donde el valor del generador real de corriente equivalente viene dado por la ecuación (168).

$$I_{gT} = \sum_{i=1}^N V_{gi} Y_i \quad ; \quad Y_{gT} = \sum_{i=1}^N Y_i \quad (168)$$

De igual forma N generadores de corriente reales puestos en serie se pueden combinar en un único generador real de tensión de la forma:

$$V_{gT} = \sum_{i=1}^N I_{gi} Z_i \quad ; \quad Z_{gT} = \sum_{i=1}^N Z_i \quad (169)$$

10.-Análisis por Mallas

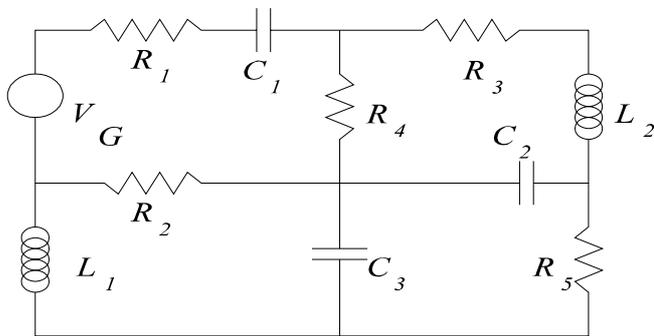


Figura 34

Pasos iniciales

1º Identificar las mallas de la red.

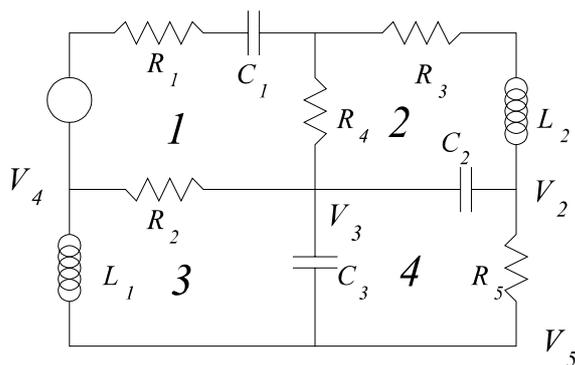


Figura 35

2º Asignar corrientes y sus sentidos de circulación a cada malla.

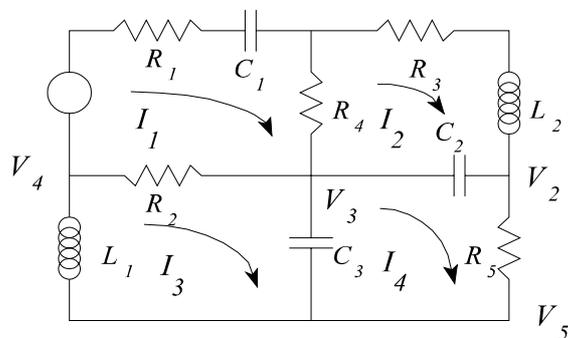


Figura 36

Una vez realizada las consideraciones iniciales empezamos a plantear las ecuaciones de las mallas. Las caídas de tensión a lo largo de las mallas es igual a cero.

Ecuación de la malla 1.

$$V_G - I_1 R_1 - \frac{I_1}{j\omega C_1} - (I_1 - I_2) R_4 - (I_1 - I_3) R_2 = 0 \quad (170)$$

Ecuación malla 2°

$$I_2 R_3 + I_2 j\omega L_2 + \frac{I_2 - I_4}{j\omega C_2} + (I_2 - I_1) R_4 = 0 \quad (171)$$

Ecuación malla 3°

$$\frac{(I_3 - I_4)}{j\omega C_3} + I_3 j\omega L_1 + (I_3 - I_1) R_2 = 0 \quad (172)$$

Ecuación malla 4

$$I_4 R_5 + \frac{I_4 - I_2}{j\omega C_2} + \frac{I_4 - I_3}{j\omega C_3} = 0 \quad (173)$$

11.-Análisis por nudos

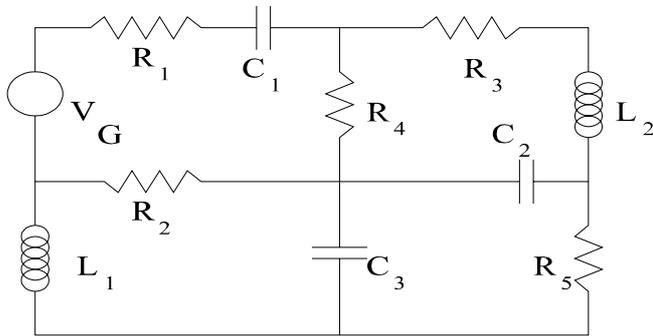


Figura 37

Pasos iniciales

1º Identificar los nudos de la red.

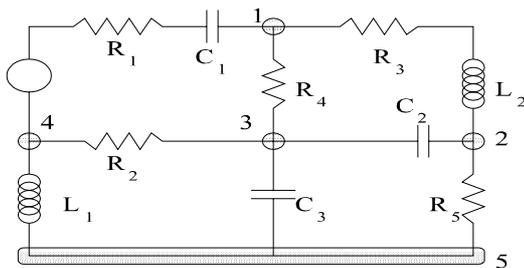


Figura 38

2º Asignar tensiones a los nudos.

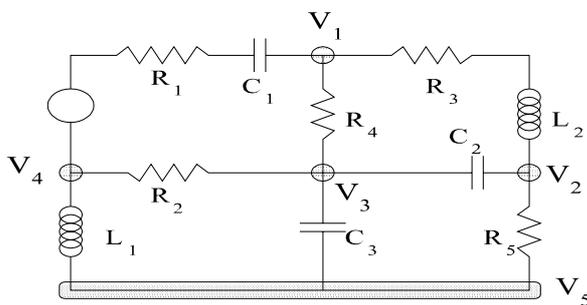


Figura 39

Una vez realizada las consideraciones iniciales empezamos a plantear las ecuaciones de los nudos. Suma de las corrientes entrantes igual a la suma de las corrientes salientes.

A fin de simplificar la obtención de la ecuación de cada nudo, se considera que todas las corrientes del nudo son todas entrantes en el nudo o todas salientes.

Ecuación del nudo 1.

Consideraciones

$$V_4 = 0$$

$$0 = I_1 + I_2 + I_3 \quad (174)$$

$$0 = \frac{V_1 - V_G}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{V_1 - V_2}{R_3 + j\omega L_2} + \frac{V_1 - V_3}{R_4} \quad (175)$$

Ecuación nudo 2°

$$0 = I_2 + I_4 + I_5 \quad (177)$$

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{R_3 + j\omega L_2} + (V_2 - V_3) j\omega C_2 + \frac{V_2 - V_5}{R_5} \quad (176)$$

Ecuación nudo 3°

$$0 = I_4 + I_3 + I_6 + I_7 \quad (178)$$

$$0 = (V_3 - V_5) j\omega C_3 + \frac{V_3}{R_2} + (V_3 - V_2) j\omega C_2 + \frac{V_3 - V_1}{R_4} \quad (179)$$

Ecuación nudo 4

$$0 = I_1 + I_7 + I_8 \quad (180)$$

$$0 = \frac{(V_G - V_1)}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_2}} + \frac{-V_5}{j\omega L_1} + \frac{-V_3}{R_2} \quad (181)$$

Ecuación nudo 5°

$$0 = I_5 + I_6 + I_8 \quad (182)$$

$$0 = (V_5 - V_3) j\omega C_3 + \frac{V_5 - V_2}{R_5} + \frac{V_5}{j\omega L_1} \quad (183)$$

Se ha supuesto para plantear las ecuaciones de cada nudo que las corrientes siempre son entrantes en cada nudo.

12.-Fuentes controladas

Las fuentes controladas son generadores de tensión o corriente que dependen de una variable circuital. Hay 4 posibilidades:

a) Generador de tensión controlado por tensión.



Figura 40

b) Generador de tensión controlador por corriente



Figura 41

c) Generador de corriente controlador por tensión



Figura 42

d) Generador de corriente controlador por corriente



Figura 43

Los operadores α , β , γ y δ son lineales, no tienen por qué ser constantes. Normalmente para el régimen permanente sinusoidal estos parámetros dependen de la frecuencia.

$$\begin{aligned} V_0 &= \alpha(j\omega) V_e \\ V_0 &= \beta(j\omega) I_e \\ I_0 &= \gamma(j\omega) V_e \\ I_0 &= \delta(j\omega) I_e \end{aligned}$$

Ejemplo 8

Plantear las ecuaciones en régimen permanente sinusoidal del siguiente circuito.

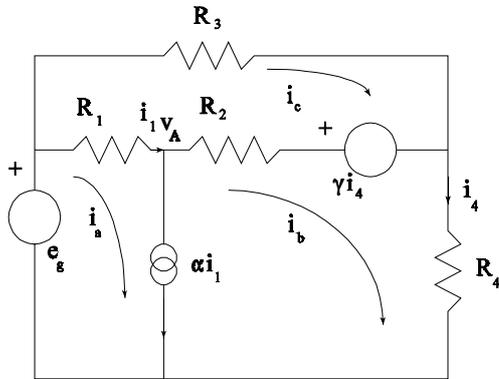


Figura 44

5 nudos 4 ecuaciones y 4 incógnitas.
3 mallas 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

$$e_g = R_1 (i_a - i_c) + v_A \quad (184)$$

$$v_A = R_2 (i_b - i_c) + \gamma i_4 + R_4 i_b \quad (185)$$

$$0 = R_3 i_c - \gamma i_4 + R_2 (i_c - i_b) + R_1 (i_c - i_a) \quad (186)$$

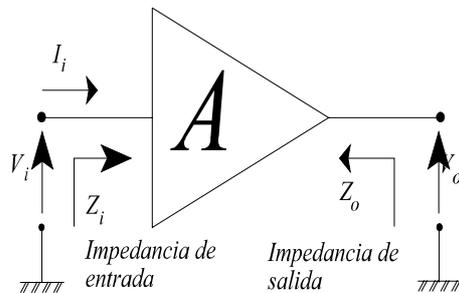
Además, aplicando las funciones de los generadores controlados sabemos que:

$$v_A = e_g - R_1 (i_a - i_c) \quad i_1 = i_a - i_c$$

$$i_4 = i_b \quad \alpha i_1 = i_a - i_b$$

13.-Amplificadores ideales de tensión. El amplificador operacional ideal

El amplificador ideal de tensión es un dispositivo de ganancia A que se caracteriza por una impedancia de entrada infinita (no absorbe corriente) y una impedancia de salida 0.



$$Z_i \rightarrow \infty \Rightarrow I_i \rightarrow 0$$

$$Z_o \rightarrow 0$$

$$A = \frac{V_o}{V_i} = Cte.$$

Figura 45

En la siguiente figura, podemos ver el circuito equivalente al amplificador representado en la figura 45.

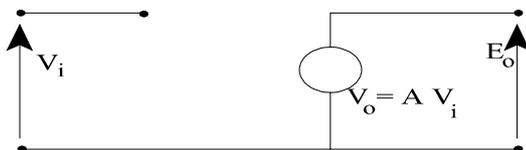
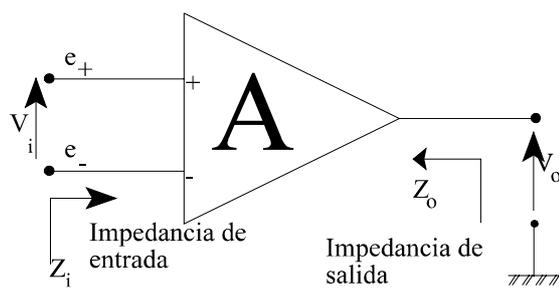


Figura 46

El amplificador operacional presenta frente al amplificador ideal de tensión varias características.

- a) En lugar de tener una única borna de entrada presenta dos bornas.
- b) La tensión de salida es la diferencia entre las dos bornas multiplicadas por una constante de ganancia, el valor de esta constante es infinito.



$$Z_i \rightarrow \infty \Rightarrow I_i \rightarrow 0$$

$$Z_o \rightarrow 0$$

$$V_o = A (e_+ - e_-) = A V_i$$

$$A = \frac{V_o}{V_i} = Cte = \infty.$$

Figura 47

En la figura 47 podemos ver la representación circuital de un amplificador operacional. El circuito equivalente de un amplificador operacional lo podemos ver en la figura 48.

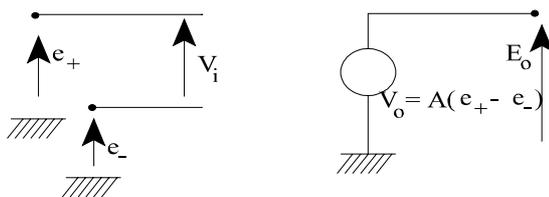


Figura 48

La ganancia infinita que presentan los amplificadores operacionales implica que para tener una tensión distinta de infinito a la salida la diferencia de tensión entre las dos bornas de entrada debe de ser cero, esto es lo que conoce como cortocircuito virtual. Esta característica sumada a la impedancia de entrada infinita es lo que permite diseñar fácilmente circuitos que utilicen el amplificador operacional.

Para ver esto un poco más claro vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo 9

Vamos a hallar los valores que deben de tener las resistencias de la figura 49 para que el circuito presente un factor de amplificación 9.

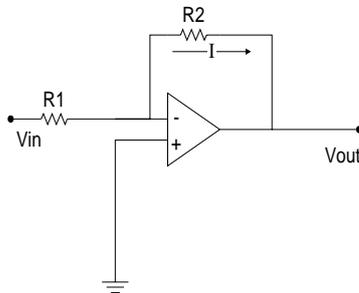


Figura 49

Debido a la ganancia infinita del amplificador, la tensión en la patilla “-” debe de ser la misma tensión que la patilla “+”. Puesto que la patilla “+” esta puesta a masa (cero voltios) la patilla “-” también estará a cero voltios, esto es lo que se denomina tierra virtual (el punto está a la misma tensión que la masa sin estar conectado físicamente a masa). Puesto que la impedancia de entrada del amplificador es infinita, no entra corriente por el, luego la corriente que pasa por R1 es la misma corriente que la que pasa por R2. Para calcular la corriente que pasa por R1 basta con aplicar la ley de Ohm, donde un extremo de la resistencia esta a Vin voltios y el otro punto esta a cero voltios.

De aquí podemos deducir las expresiones que aparecen en la ecuación (193).

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_{in} - 0}{R1} \\ -I &= \frac{V_{out} - 0}{R2} \\ V_{out} &= - \frac{R2}{R1} V_{in} \end{aligned} \tag{193}$$

Luego para tener una ganancia de valor 9 se debe de cumplir la siguiente condición:

$$9 = \frac{R2}{R1} \tag{194}$$

Si introducimos una condición adicional como el valor de la impedancia de entrada que debe de tener el amplificador podremos determinar el valor que deben de tener las dos resistencias, ya que la impedancia de entrada viene dada por la ecuación (195).

$$Z_{in} = R1 + R2 \tag{195}$$

14.-Bibliografía

L. Cuesta, A.Gil Padilla, F. Remiro, “Electrónica Amalógica”, Ed. Mc Graw Hill. 1991

W. Warzanskyj , “Análisis de Circuitos”, Departamento de publicaciones de la E.T.S.I. de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid. 1985.

Acrónimos

$i(t)$	Corriente variable en el tiempo.
I	Corriente constante en el tiempo.
$I(t)$	Corriente que posee una parte constante en el tiempo y otra variable en el tiempo. $I(t) = I + i(t)$.
$I(j\omega)$	Corriente en el dominio de la frecuencia. Representa el valor fasorial (modulo y fase) de una corriente en régimen permanente sinusoidal
$v(t)$	Tensión variable en el tiempo.
V	Tensión constante en el tiempo.
$V(t)$	Tensión que posee una parte constante en el tiempo y otra variable en el tiempo. $V(t) = V + v(t)$.
$V(j\omega)$	Tensión en el dominio de la frecuencia. Representa el valor fasorial (modulo y fase) de una tensión en régimen permanente sinusoidal
C	Capacidad.
L	Bobina.
R	Resistencia.
$Z(j\omega)$	Impedancia compleja. Representa el valor fasorial de una impedancia en régimen permanente sinusoidal. $Z = V/I$.
$Y(j\omega)$	Admitancia compleja. Representa el valor fasorial de una admitancia en régimen permanente sinusoidal. $Y = I/V$.